Wavelet transformationer, basisskift

Torben K. Jensen

01456 Wavelets og Multiskala Analyse, forår 2000

1 Indledning

Lad $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ være en Multiresolution Analysis med en skaleringsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$. Vi vil definere V_j ved[1]

$$V_j = \text{span}\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

det afsluttede underrum af $L_2(\mathbb{R})$ udspændt af funktionerne

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Phi(2^j x - k). \tag{2}$$

Idet $\{\Phi(x-k):\ k \in \mathbb{Z}\}$ er et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{R})$, pr. antagelse, vil også $\{\Phi_{j,k}:\ k \in \mathbb{Z}\}$ være et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{R})$.

Komplementrummene W_j defineres ved udtrykket

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \tag{3}$$

hvor

$$W_j \equiv V_j^{\perp} = \{f \in V_{j+1}:\ \langle f, g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0\ \forall g \in V_j\}. \tag{4}$$

Ligningen (3) udtrykker at enhver $f_{j+1} \in V_{j+1}$ på entydig måde kan skrives som en sum $f_{j+1} = f_j + g_j$, hvor $f_j \in V_j$ og $g_j \in W_j$.

Skaleringsfunktionen Φ opfylder skaleringsligningen

$$\Phi(x) = \sum_k a_k \Phi(2x-k) = \sqrt{2}\sum_k h_k \Phi(2x-k) = \sum_k h_k \phi_{1,k}(x). \tag{5}$$

Vi har her indført nye konstanter $h_k = \frac{a_k}{\sqrt{2}}$, da dette vil være bekvemt senere. Vi vil antage at den til den givne Multiresolution Analysis $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ hørende wavelet Ψ er bestemt ved

$$\Psi(x) = \sum_k (-1)^k h_{1-k}\Phi_{1,k} = \sqrt{2}\sum_k (-1)^k h_{1-k}\Phi(2x-k). \tag{6}$$

[1] Dette adskiller sig en smule fra Wojtaszczyk, som definerer $V_j = \text{span}\{\Phi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Dette er dog kun en forskel af kosmetisk karakter.

Der erindres om at

$$W_j = \text{span}\{\Psi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{7}$$

Lad nu J og j være heltal, og $J > j$. Itereres ligningen (3) fås

$$V_J = V_j \oplus \bigoplus_{i=j}^{J-1} W_i, \tag{8}$$

som i analogi til tidligere udtrykker at ethvert $f_J \in V_J$ på entydig måde kan skrives som

$$f_J = f_j + \sum_{i=j}^{J-1} g_i, \tag{9}$$

hvor $f_j \in V_j$, og $g_i \in W_i$ for $i = j, \ldots J-1$.

Ethvert $f_J \in V_J$ kan skrives som

$$f_J = \sum_k c_k^J \Phi_{J,k}. \tag{10}$$

Ligeledes kan f_j og g_i opskrives med hensyn til baserne $\{\Phi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ og $\{\Psi_{i,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ for $i = j, \ldots J-1$ som

$$f_j = \sum_k c_k^j \Phi_{j,k} \tag{11}$$

$$g_i = \sum_k d_k^i \Psi_{i,k}, \ \ i = j, \ldots J-1. \tag{12}$$

Vi vil reservere bogstavet c til at repræsentere koordinater med hensyn til en basis bestående af translater og dilationer af skaleringsfunktionen Φ, mens bogstavet d reserveres til koordinater med hensyn til en basis bestående af translater og dilationer af waveletten Ψ. Vi vil omtale koordinaterne c_k^j som skaleringsfunktions-koordinater, og koordinaterne d_k^j som wavelet koordinater.

Ethvert $f_J \in V_J$ kan altså udtrykkes med hensyn til en *en-skala basis*

$$\{\Phi_{J,k} : \ k \in \mathbb{Z}\} \tag{13}$$

eller en *fler-skala basis*

$$\{\Phi_{j,k}, \Psi_{i,k} : \ k \in \mathbb{Z}, i = j, \ldots J-1\}. \tag{14}$$

Opskrevet med hensyn til en-skala basen (13) er f_J bestemt ved (10), mens f_J opskrevet med hensyn til fler-skala basen (14) er bestemt ved

$$f_J = \sum_k c_k^j \Phi_{j,k} + \sum_{i=j}^{J-1} \sum_k d_k^i \Psi_{i,k} \tag{15}$$

ifølge (9), (11) og (12).

Vi vil i denne note betragte problemstillingen, hvor repræsentationen af $f_J \in V_J$ med hensyn til en-skala basen (13) er kendt, og vi ønsker at finde repræsentationen af f_J med hensyn til fler-skala basen (14), og omvendt.

Definition 1.1 Lad $J > j$ være heltal, og lad $f_J \in V_J$. Lad repræsentationen af f_J med hensyn til en-skala basen (13) være givet ved (10), og lad repræsentationen af f_J med hensyn til fler-skala basen (14) være givet ved (15). Afbildningen

$$\mathcal{W}_{J,j} : \{c_k^J\} \mapsto \{c_k^j, d_k^j, d_k^{j+1}, \dots d_k^{J-1}\} \tag{16}$$

kaldes for *wavelet transformationen*, og afbildningen

$$\mathcal{Y}_{j,J} : \{c_k^j, d_k^j, d_k^{j+1}, \dots d_k^{J-1}\} \mapsto \{c_k^J\} \tag{17}$$

kaldes for den *inverse wavelet transformation.*

2 Wavelet transformationer

Lad $j \in \mathbb{Z}$. Indledningsvis betragtes tilfældet, hvor repræsentationen af f_{j+1} med hensyn til en-skala basen $\{\Phi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ er kendt

$$f_{j+1} = \sum_k c_k^{j+1} \Phi_{j+1,k} \tag{18}$$

og hvor vi ønsker at finde repræsentationen af f_{j+1} med hensyn til flerskala basen $\{\Phi_{j,k}, \Psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, dvs. koordinaterne c_k^j, d_k^j så

$$f_{j+1} = \sum_k c_k^j \Phi_{j,k} + \sum_k d_k^j \Psi_{j,k}, \tag{19}$$

og omvendt. Afbildningen $\mathcal{W}_{j+1,j}$ kaldes for *et-trins wavelet transformationen.* Den inverse afbildning $\mathcal{Y}_{j,j+1}$ kaldes den *inverse et-trins wavelet transformation.* Om disse transformationer haves følgende sætning.

Theorem 2.1 Antag at $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ er en Multiresolution Analysis, og at skaleringsfunktionen $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ har kompakt støtte. Antag at den tilhørende wavelet Ψ er bestemt ved ligning (6). Om et-trins wavelet transformationen og dens inverse, gælder følgende udsagn:

(i) Antag at $f_{j+1} \in V_{j+1}$ har koordinater $\{c_k^{j+1}\}$ med hensyn til en-skala basen $\{\Phi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ i V_{j+1}. Da gælder at $\mathcal{W}_{j+1,j}\{c_k^{j+1}\} = \{c_k^j, d_k^j\}$, hvor

$$c_k^j = \sum_n h_{n-2k} c_n^{j+1} \quad \text{og} \quad d_k^j = \sum_n (-1)^n h_{2k-n+1} c_n^{j+1}. \tag{20}$$

(ii) Hvis $f_{j+1} \in V_{j+1}$ har koordinaterne $\{c_k^j, d_k^j\}$ med hensyn til fler-skala basen $\{\Phi_{j,k}, \Psi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ i $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, da gælder at $\mathcal{Y}_{j,j+1}\{c_k^j, d_k^j\} = \{c_k^{j+1}\}$, hvor

$$c_k^{j+1} = \sum_n c_n^j h_{k-2n} + \sum_n (-1)^n d_n^j h_{2n-k+1}. \tag{21}$$

Bevis Idet vi antager at Φ har kompakt støtte vil alle nedenstående summer være endelige. Det er derfor tilladeligt at ombytte summationsrækkefølgen i en dobbeltsum, og vi vil gøre dette uden yderligere kommentarer.

Vi vil for enkelheds skyld definere $g_n \equiv (-1)^n h_{-n+1}$. Så får ligning (6) udseendet

$$\Psi = \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \Phi_{1,n} = \sum_n g_n \Phi_{1,n}. \tag{22}$$

Ved at benytte skaleringsligningen, fås

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\Phi(2^j x - k) = 2^{j/2}\sqrt{2}\sum_n h_n \Phi(2^{(j+1)}x - 2k - n) \\ &= \sum_n h_n \Phi_{j+1,2k+n} = \sum_n h_{n-2k}\Phi_{j+1,n} \end{aligned} \tag{23}$$

og ved benyttelse af (22) fås

$$\begin{aligned} \Psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\Psi(2^j x - k) = 2^{j/2}\sqrt{2}\sum_n g_n \Phi(2^{(j+1)}x - 2k - n) \\ &= \sum_n g_n \Phi_{j+1,2k+n} = \sum_n g_{n-2k}\Phi_{j+1,n}. \end{aligned} \tag{24}$$

Antag nu at repræsentationen af f_{j+1} med hensyn til en-skala basen $\{\Phi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ er kendt:

$$f_{j+1} = \sum_k c_k^{j+1}\Phi_{j+1,k} = \sum_k \langle f_{j+1}, \Phi_{j+1,k}\rangle \Phi_{j+1,k} \in V_{j+1}$$

og at vi vil bestemme repræsentation af f_{j+1} med hensyn til fler-skala basen $\{\Phi_{j,k}, \Psi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Ved benyttelse af (23) og (24) fås

$$c_k^j = \langle f_{j+1}, \Phi_{j,k}\rangle = \sum_n h_{n-2k}\langle f_{j+1}, \Phi_{j+1,n}\rangle = \sum_n h_{n-2k} c_n^{j+1} \tag{25}$$

$$d_k^j = \langle f_{j+1}, \Psi_{j,k}\rangle = \sum_n g_{n-2k}\langle f_{j+1}, \Phi_{j+1,n}\rangle = \sum_n g_{n-2k} c_n^{j+1} \tag{26}$$

og dermed

$$f_{j+1} = \sum_k \left(\sum_n h_{n-2k} c_n^{j+1}\right)\Phi_{j,k} + \sum_k \left(\sum_n g_{n-2k} c_n^{j+1}\right)\Psi_{j,k},$$

hvilket viser udsagnet i (i).

Antag nu at repræsentationen af f_{j+1} med hensyn til fler-skala basen i $\{\Phi_{j,k}, \Psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ er kendt:

$$f_{j+1} = \sum_k c_k^j \Phi_{j,k} + \sum_k d_k^j \Psi_{j,k}$$

og at vi vil bestemme repræsentationen af f_{j+1} med hensyn til en-skala basen i $\{\Phi_{j+1,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Ved brug af skaleringsligningen og (22), fås

$$\begin{aligned} c_k^{j+1} = \langle f_{j+1}, \Phi_{j+1,k} \rangle &= \sum_n c_n^j \langle \Phi_{j,n}, \Phi_{j+1,k} \rangle + \sum_n d_n^j \langle \Psi_{j,n}, \Phi_{j+1,k} \rangle \\ &= \sum_n c_n^j h_{k-2n} + \sum_n d_n^j g_{k-2n}, \end{aligned} \tag{27}$$

og dermed

$$f_{j+1} = \sum_k \left(\sum_n c_n^j h_{k-2n} + \sum_n d_n^j g_{k-2n} \right) \Phi_{j+1,k},$$

hvilket viser udsagnet i (ii). □

Hermed er det vist, hvordan et-trins wavelet transformationen og dens inverse udføres. Den generelle wavelet transformation og dens inverse udføres nu ved iterativ anvendelse af et-trins transformationerne. For at belyse dette, betragtes et eksempel. Lad $J = 3$ og $j = 0$, og lad $f_3 \in V_3$ være givet i repræsentation med hensyn til en-skala basen i V_3:

$$f_3 = \sum_k c_k^3 \Phi_{3,k}.$$

Koordinaterne af f_3 med hensyn til fler-skala basen $\{\Phi_{0,k}, \Psi_{0,k}, \Psi_{1,k}, \Psi_{2,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ fås nu ved iterativ anvendelse af et-trins wavelet transformationerne, som angivet i nedenstående diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{W}_{3,2} & & \mathcal{W}_{2,1} & & \mathcal{W}_{1,0} & \\ \{c_k^3\} & \rightarrow & \{c_k^2\} & \rightarrow & \{c_k^1\} & \rightarrow & \{c_k^0\} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \{d_k^2\} & & \{d_k^1\} & & \{d_k^0\} \\ & & & & \{d_k^2\} & & \{d_k^1\} \\ & & & & & & \{d_k^2\} \end{array} \tag{28}$$

Tilsvarende, hvis koordinaterne til f_3 med hensyn til flerskala-basen $\{\Phi_{0,k}, \Psi_{0,k}, \Psi_{1,k}, \Psi_{2,k}\}$ er kendte, fås koordinaterne af f_3 med hensyn til en-skala basen i V_3 ved iterativ anvendelse af den inverse en-skala wavelet transformation, som angivet i nedenstående diagram

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{Y}_{0,1} & & \mathcal{Y}_{1,2} & & \mathcal{Y}_{2,3} & \\
\{c_k^0\} & \rightarrow & \{c_k^1\} & \rightarrow & \{c_k^2\} & \rightarrow & \{c_k^3\} \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\{d_k^0\} & & \{d_k^1\} & & \{d_k^2\} & & \\
\{d_k^1\} & & \{d_k^2\} & & & & \\
\{d_k^2\} & & & & & &
\end{array} \tag{29}
$$

Det skal slutteligt nævnes, at ovenstående basisskifteoperationer er nemme at implementere og hurtige at eksekvere på en computer.