ODENSE UNIVERSITET
MATEMATISK INSTITUT

Kr. 107,50

FORELÆSNINGER OVER DIFFERENTIALGEOMETRI OG DIFFERENTIALTOPOLOGI

INDLEDNING TIL DIFFERENTIAL-GEOMETRI OG DIFFERENTIALTOPOLOGI

VAGN LUNDSGAARD HANSEN

ODENSE UNIVERSITETS TRYKKERI
U.nr.: 03-04-90
Oplag: 20-02-85

De foreliggende noter har været anvendt med stor succes som en introduktion til differentialgeometri og differential-topologi ved universiteterne i både Århus og København. Jeg takker professor Vagn Lundsgaard Hansen for tilladelsen til at genoptrykke og benytte hans noter her i Odense.

Odense, November 1985

Henrik Pedersen

Forelæsninger over

DIFFERENTIALGEOMETRI

og

DIFFERENTIALTOPOLOGI

Indledning til differential-geometri og differentialtopologi

Vagn Lundsgaard Hansen

December 1968.

Indledning til differential-
geometri og differentialtopologi

Indhold:

§ 0: Notation 2
§ 1: Euklidiske rum 3
§ 2: Differentiabilitet 8
§ 3: Differentiable mangfoldigheder i
euklidiske rum 22
§ 4: Differentiable afbildninger 34
§ 5: Tangentrum og inducerede afbildninger.. 39
§ 6: Regulære punkter og værdier 45

INDLEDNING TIL DIFFERENTIALGEOMETRIEN

Det er hensigten i denne indledning at give læseren en introduktion til begreberne differentiabel mangfoldighed og differentiabel afbildning. Den generelle teori vil dernæst senere blive udviklet i en række afsnit under fællestitlen DIFFERENTIABLE MANGFOLDIGHEDER.

0. Notation.

Om den grundlæggende notation vil vi her kun gøre nogle få bemærkninger.

En afbildning f fra en mængde A til en mængde B vil vi betegne med $f: A \longrightarrow B$ eller $A \xrightarrow{f} B$. Hvis $f: A \longrightarrow B$ og $g: B \longrightarrow C$ betegner $gf: A \longrightarrow C$ eller $g \circ f: A \longrightarrow C$ den sammensatte afbildning af f og g.

Vi vil ofte angive et system af afbildninger i et <u>diagram</u>, som f.eks. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eller

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd} \quad \text{og} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

I et diagram interesserer vi os for mulige sammensætninger af afbildninger. I "trekanten" kan vi kun danne én sammensat afbildning, nemlig $gf: A \longrightarrow C$, mens "kvadratet" har præcis to sammensætninger, $gf: A \longrightarrow D$ og $kh: A \longrightarrow D$. Hvis henholdsvis $h = gf$ og $gf = kh$, siger vi, at diagrammerne er kommutative. Generelt siges et diagram at være <u>kommutativt</u>, når alle sammensætninger af afbildninger i diagrammet mellem to vilkårlige mængder er sammenfaldende.

<u>Opgave</u>. Vis, at nedenstående diagram er kommutativt, hvis "trekanten" og "kvadratet" er kommutative

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "m"'] & E \end{tikzcd}$$

At et diagram er kommutativt, angiver man ofte således:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & C \end{tikzcd}$$

Hvis A er en vilkårlig mængde, betegner $1_A: A \longrightarrow A$ den identiske afbildning af A på sig selv.

Hvis $f: A \longrightarrow B$ er en vilkårlig afbildning, og $C \subseteq A$ er en delmængde af A skal $f|C: C \longrightarrow B$ betegne restriktionen af f til C.

Punkter i en mængde vil vi som regel betegne med p eller q. For punkter i et vektorrum vil vi også bruge vektornotationen $\underline{p}$, $\underline{q}$.

1. Euklidiske rum.

Det n-dimensionale euklidiske rum, der består af alle reelle talsæt $\underline{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, vil vi betegne med E^n.

E^n kan som bekendt udstyres som et reelt vektorrum med indre produkt ved følgende definitioner:

$$(u_1 \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) = (u_1+v_1, \cdots, u_n+v_n)$$

$$a \cdot (u_1, \cdots, u_n) = (au_1, \cdots, au_n)$$

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \text{(indre produkt)}$$

Den kanoniske basis i dette vektorrum udgøres af vektorerne $\underline{e}_1 = (1,0,\cdots,0), \cdots, \underline{e}_n = (0,\cdots,0,1)$.

V.hj.a. normen $||\cdot||$ hørende til det indre produkt kan E^n udstyres som metrisk rum med metrik d defineret ved fastsættelsen:

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = ||\underline{u} - \underline{v}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

for ethvert $\underline{u}, \underline{v} \in E^n$.

Vi har dermed pålagt E^n to matematiske strukturer, en lineær struktur og en topologi. I det følgende skal vi skiftevis møde E^n i rollerne som vektorrum og topologisk rum (metrisk rum).

Da afbildningerne

$$+ : E^n \times E^n \longrightarrow E^n$$
$$\cdot : E^1 \times E^n \longrightarrow E^n ,$$

defineret ved henholdsvis addition og multiplikation med reel skalar, begge er kontinuerte, siger man, at E^n med denne vektorrumsstruktur og topologi er et <u>topologisk vektorrum</u>.

Hvis $n \leq k$ har vi naturlige afbildninger $I: E^n \longrightarrow E^k$ og $P: E^k \longrightarrow E^n$ defineret ved

$$I(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n, 0, \cdots, 0)$$
$$P(u_1, \cdots, u_k) = (u_1, \cdots, u_n)$$

Vi bemærker, at $P \circ I = 1_{E^n}$.

Den injektive afbildning I kaldes for den naturlige <u>indlægning</u>, og den surjektive afbildning P for den naturlige <u>projektion</u>.

I det følgende vil vi for $n \leq k$ ofte identificere E^n med sit billede $I(E^n)$ i E^k og derved opfatte E^n som et delrum af E^k; skrivemåden $E^n \subseteq E^k$ vil blive benyttet. Dette volder ingen vanskeligheder, rent faktisk kunne vi have defineret alle euklidiske rum som delrum af et enkelt rum E^∞ (se nedenstående opgave).

<u>Opgave 1</u>. Definer det uendelig dimensionale euklidiske rum E^∞ som mængden af alle reelle talfølger $\underline{u} = (u_1, \cdots, u_n, \cdots)$, hvor $u_n \neq 0$ for højst endelig mange n. Definer dernæst for ethvert n afbildningen $i_n: E^n \longrightarrow E^\infty$ ved fastsættelsen

$$i_n(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n, 0, 0, \cdots)$$

Vis, at E^∞ på netop én måde kan udstyres som reelt vektorrum med indre produkt, således at i_n er lineær og bevarer det indre produkt for ethvert n.

For $n \leq k$ skal $I_n^k = I: E^n \longrightarrow E^k$ betegne den naturlige indlægning.

Vis relationerne

$$I_n^n = 1_{E^n} \quad \text{og} \quad I_m^k \circ I_n^m = I_n^k (n \leq m \leq k)$$

Vis, at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd} E^k \arrow[dr, "i_k"] & \\ & E^\infty \\ E^n \arrow[uu, "I_n^k"] \arrow[ur, "i_n"'] & \end{tikzcd}$$

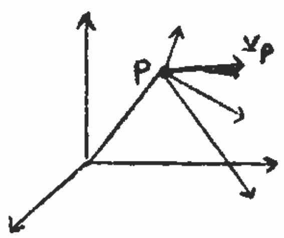
Vis, at hvis X er et vilkårligt topologisk rum og $\{j_n : E^n \longrightarrow X\}$ et system af kontinuerte afbildninger, så $j_n = j_k \circ I_n^k$ for $n \leq k$, da findes der en entydig bestemt kontinuert afbildning $F: E^\infty \longrightarrow X$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} E^k \arrow[dr, "i_k"] \arrow[drr, "j_k"] & & \\ & E^\infty \arrow[r, "F"] & X \\ E^n \arrow[uu, "I_n^k"] \arrow[ur, "i_n"'] \arrow[urr, "j_n"'] & & \end{tikzcd}$$

Begrebet tangentvektor til E^n vil komme til at spille en væsentlig rolle.

<u>Definition 1.1</u>. En <u>tangentvektor</u> $\underline{v}_p$ til E^n består af 2 punkter i E^n, et <u>fodpunkt</u> $\underline{p}$ og en <u>vektorpart</u> $\underline{v}$.

Tangentvektoren $\underline{v}_p$ genspejler begrebet 'et orienteret liniestykke' med begyndelsespunkt $\underline{p}$ og endepunkt $\underline{p} + \underline{v}$. Hvis vi som sædvanlig identificerer E^3 med det fysiske rum via valg af retvinklet koordinatsystem, vil vi derfor også afbilde $\underline{v}_p$ som et orienteret liniestykke, der udgår fra $\underline{p}$ og ender i $p + \underline{v}$.



Man fremhæver ofte fodpunktet $\underline{p}$ for tangentvektoren $\underline{v}_p$ ved at tale om en tangentvektor til E^n <u>i</u> punktet $\underline{p} \in E^n$.

Både fodpunkt og vektorpart for en tangentvektor til E^n har betydning, vi understreger, at tangentvektorerne $\underline{v}_p$ og $\underline{w}_q$ til E^n kun er ens, hvis både $\underline{p} = \underline{q}$ og $\underline{v} = \underline{w}$.

Samlingen af alle tangentvektorer til E^n i $\underline{p} \in E^n$ vil vi betegne med T_pE^n.

Der findes en kanonisk bijektion

$$t_p : E^n \longrightarrow T_pE^n$$

defineret ved fastsættelsen:

$$\forall \underline{v} \in E^n : t_p(\underline{v}) = \underline{v}_p$$

Da t_p er en bijektiv afbildning, findes der en entydig bestemt lineær struktur på T_pE^n, således at t_p bliver en isomorfi mellem vektorrum. Hvis $\underline{v}_p, \underline{w}_p \in T_pE^n$ og a er et reelt tal bliver denne vektorrumsstruktur på T_pE^n netop fastlagt, således at

$$\underline{v}_p + \underline{w}_p = (\underline{v}+\underline{w})_p \quad \text{og} \quad a\underline{v}_p = (a\underline{v})_p$$

Vektorrummet T_pE^n vil vi kalde <u>tangentrummet</u> for E^n i $\underline{p} \in E^n$.

Da E^n er n-dimensional får vi trivielt følgende sætning:

<u>Sætning 1.2</u>. Tangentrummet T_pE^n til E^n i $\underline{p} \in E^n$ er et n-dimensionalt reelt vektorrum.

Hvis $\{\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n\}$ er den kanoniske basis for E^n, vil vi kalde $\{(\underline{e}_1)_p, \cdots, (\underline{e}_n)_p\}$ for den kanoniske basis for T_pE^n.

<u>Opgaver</u>.

I de følgende opgaver betragtes en række specielle afbildninger i euklidiske rum.

<u>Definition</u>. En afbildning $F: E^n \longrightarrow E^n$ kaldes en <u>isometri</u> i E^n, hvis

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in E^n : d(F(\underline{u}), F(\underline{v})) = d(\underline{u},\underline{v})$$

En lineær afbildning $A: E^n \longrightarrow E^n$ kaldes en <u>ortogonal transformation</u> i E^n, hvis

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in E^n : (A\underline{u}, A\underline{v}) = (\underline{u},\underline{v})$$

Hvis $\underline{a} \in E^n$ er et fast element i E^n kaldes afbildningen $\tau_{\underline{a}}: E^n \longrightarrow E^n$ defineret ved fastsættelsen

$$\forall \underline{u} \in E^n: \tau_{\underline{a}}(\underline{u}) = \underline{a} + \underline{u}$$

for <u>translation i E^n med $\underline{a} \in E^n$</u>

Vi betegner mængden af isometrier i E^n med $\mathcal{E}(n)$, mængden ortogonale transformationer i E^n med $O(n)$ og mængden af translationer i E^n med $\mathcal{T}(n)$.

<u>Opgave 2</u>. Vis, at $\mathcal{E}(n)$ er lukket under sammensætning.

<u>Opgave 3</u>. Vis, at $O(n)$ er en gruppe med sammensætning som kompositionsregel.

<u>Opgave 4</u>. Lad $\{a_{ij}\}$ være matrixfremstillingen for en lineær afbildning A i E^n m.h.t. den kanoniske basis i E^n, og lad $\{a_{ij}\}^{tr}$ betegne den transponerede matrix.
Vis, at $A \in O(n)$ hvis og kun hvis $\{a_{ij}\} \cdot \{a_{ij}\}^{tr} = I$, hvor I er identitetsmatricen.

<u>Opgave 5</u>. Betragt $A \in O(2)$. Vis, at der findes et entydigt bestemt tal $\theta \in [0,2\pi[$, således at matrixfremstillingen for A i den kanoniske basis for E^2 har formen

$$\begin{Bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{Bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{Bmatrix}$$

<u>Opgave 6</u>. Antag, at $F \in \mathcal{E}(n)$ og at $F(\underline{0}) = \underline{0}$.
Vis, at F er lineær og at $F \in O(n)$.

<u>Opgave 7</u>. Vis, at $\mathcal{T}(n)$ er en gruppe under sammensætning, og at

$$\underline{a} \in E^n \longrightarrow \tau_{\underline{a}} \in \mathcal{T}(n)$$

bliver en isomorfi af den additive gruppe for E^n på denne gruppe.

Opgave 8. Vis, at enhver isometri $F \in \mathcal{E}(n)$ i E^n har en entydig fremstilling på formen $F = T \circ A$, hvor $T \in \mathcal{T}(n)$ og $A \in O(n)$.

T kaldes translationen hørende til F og A den ortogonale transformation hørende til F.

Opgave 9. Vis, at $\mathcal{E}(n)$ er en gruppe under sammensætning, og at $\mathcal{T}(n)$ og $O(n)$ er undergrupper heri.

$\mathcal{E}(n)$ kaldes ofte for den euklidiske gruppe i E^n og $O(n)$ den ortogonale gruppe i E^n.

2. Differentiabilitet.

Differentiabilitet er et så afgørende begreb i differentialgeometrien, at det berettiger til en særskilt omtale. En del af definitionerne og sætningerne i det følgende er allerede velkendte fra analysen.

Lad U være en åben delmængde af E^n. Hvis $\underline{p} \in U$ er et punkt i U, skal $U(\underline{p})$ være den åbne delmængde af E^n, der fremkommer ved at parallelforskyde U med vektoren $-\underline{p}$, d.v.s.

$$U(\underline{p}) = \{\underline{t} \in E^n \mid \underline{p} + \underline{t} \in U\}.$$

Det er klart, at $U(\underline{p})$ er en åben omegn af $\underline{0} \in E^n$ for ethvert $\underline{p} \in U$.

Som bekendt kaldes en funktion $\varepsilon: U(\underline{p}) \longrightarrow E^1$ for en ε-funktion, hvis $\varepsilon(\underline{0}) = 0$ og ε er kontinuert i $\underline{0}$, d.v.s. $\varepsilon(\underline{t}) \longrightarrow 0$ for $\underline{t} \longrightarrow \underline{0}$.

Definition 2.1. En afbildning $F: U \longrightarrow E^m$ siges at være differentiabel i $\underline{p} \in U$, hvis der findes en lineær afbildning $\varphi: E^n \longrightarrow E^m$ og en ε-funktion $\varepsilon: U(\underline{p}) \longrightarrow E^m$, således at

$$F(\underline{p}+\underline{t}) - F(\underline{p}) = \varphi(\underline{t}) + \varepsilon(\underline{t})\|\underline{t}\|$$

for ethvert $\underline{t} \in U(\underline{p})$

Det er let at indse, at der højst findes én lineær afbildning $\varphi: E^n \longrightarrow E^m$, der opfylder kravet i definition 2.1. Hvis F er differentiabel i $\underline{p} \in U$ er den lineære afbildning φ altså entydig bestemt. Man kalder denne lineære afbildning for <u>differentialet</u> af F i $\underline{p}$, og benytter traditionelt betegnelser som $dF_{\underline{p}}$, $dF(\underline{p})$ eller $DF(\underline{p})$.

Hvis $F: U \longrightarrow E^m$ er differentiabel i $\underline{p} \in U$, ser vi, at den affine afbildning $\overline{F}: U \longrightarrow E^m$ defineret ved fastsættelsen

$$\forall \underline{q} \in U: \overline{F}(\underline{q}) = F(\underline{p}) + dF_{\underline{p}}(\underline{q}-\underline{p})$$

er en approksimation til F i $\underline{p}$. Man siger derfor ofte, at differentialet af F i $\underline{p}$ er den lineære approksimation af F i $\underline{p}$.

Hvis U er en åben delmængde af E^1, og $F: U \longrightarrow E^1$ er differentiabel i $p \in U$, er $dF_p: E^1 \longrightarrow E^1$ blot multiplikation med en konstant, nemlig $dF_p(\underline{e}_1)$, hvor $\underline{e}_1$ er den kanoniske basisvektor i E^1. Denne konstant er den sædvanlige <u>differential kvotient</u> af F i p. Hvis parameteren på E^1 kaldes u_1 vil vi betegne differential kvotienten af F i p med $\frac{dF}{du_1}(p)$. Vi noterer til senere brug, at

$$\frac{dF}{du_1}(p) = dF_p(\underline{e}_1)$$

Hvis $A: E^n \longrightarrow E^m$ selv er en lineær afbildning, er det klart, at A er differentiabel i ethvert punkt $\underline{p} \in E^n$, og at $dA_p = A$ for ethvert $\underline{p} \in E^n$. Specielt er den identiske afbildning $1_{E^n}: E^n \longrightarrow E^n$ differentiabel med

$$(d1_{E^n})_p = 1_{E^n}$$

for ethvert $\underline{p} \in E^n$.

Om sammensætning af differentiable funktioner gælder en yderst vigtig sætning kendt som <u>kædereglen</u>. Lad $U \subseteq E^n$ og $V \subseteq E^m$ være åbne delmængder.

Sætning 2.2. Hvis $F: U \longrightarrow V$ er differentiabel i $\underline{p} \in U$, og $G: V \longrightarrow E^k$ er differentiabel i $F(\underline{p}) \in V$, da er sammensætningen $G \circ F$ differentiabel i $\underline{p} \in U$ og for de tilhørende differentialer gælder, at

$$d(G\circ F)_{\underline{p}} = dG_{F(\underline{p})} \circ dF_{\underline{p}}$$

Det anbefales læseren at gennemføre beviset for denne sætning.

Antag nu, at U er en åben delmængde af E^n, og at $F: U \longrightarrow E^m$ er differentiabel i $\underline{p} \in U$.

Lad $\{\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n\}$ og $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_m\}$ være de kanoniske baser for henholdsvis E^n og E^m, og lad $m{\times}n$-matricen $\{a_{ij}\}$ beskrive den lineære afbildning $dF_p: E^n \longrightarrow E^m$ i disse baser. Hvis $f_1, \cdots, f_m: U \longrightarrow E^1$ er koordinatfunktionerne for F, d.v.s.

$$\forall \underline{q} \in U: F(\underline{q}) = (f_1(\underline{q}), \cdots, f_m(\underline{q})),$$

og $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m: U(\underline{p}) \longrightarrow E^1$ tilsvarende er koordinatfunktionerne for $\varepsilon: U(\underline{p}) \longrightarrow E^m$, betyder dette, at

$$f_i(\underline{p}+\underline{t}) - f_i(\underline{p}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot t_j + \varepsilon_i(\underline{t})\|\underline{t}\|$$

for ethvert $i = 1, \cdots, m$ og enhver vektor $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in U(\underline{p})$.

Ser vi kun på tilvækster $\underline{t} = \lambda \underline{e}_j$ reduceres denne ligning til

$$f_i(\underline{p}+\lambda\underline{e}_j) - f_i(\underline{p}) = a_{ij}\cdot\lambda + \varepsilon_i(\lambda\underline{e}_j)|\lambda|$$

Definerer vi nu den reelle funktion af en reel variabel g_{ij} ved fastsættelsen $g_{ij}(\lambda) = f_i(\underline{p}+\lambda\underline{e}_j)$ for ethvert λ så $\underline{p} + \lambda\underline{e}_j \in U$, viser ovenstående ligning, at g_{ij} er differentiabel i 0 med differential kvotient a_{ij}. Denne differential kvotient kaldes <u>den partielle afledede</u> (af første orden) af f_i i punktet $\underline{p}$ m.h.t. den j'te koordinat i E^n. Vi vil bruge betegnelsen $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\underline{p})$ for denne partielle afledede. Vi har altså

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\underline{p})$$

Matricen, der beskriver $dF_{\underline{p}}$ i de kanoniske baser for E^n og E^m, er således netop matricen af første ordens partielle afledede af koordinatfunktionerne for F i $\underline{p} \in U$.

Idet vi sætter $\Delta f_i(\underline{p};\underline{t}) = f_i(\underline{p}+\underline{t}) - f_i(\underline{p})$ gælder altså:

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_1(\underline{p};\underline{t}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta f_m(\underline{p};\underline{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\underline{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(\underline{p}) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1}(\underline{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n}(\underline{p}) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(\underline{t}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_m(\underline{t}) \end{Bmatrix} \|\underline{t}\|$$

$m \times n$-matricen $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\underline{p})\right\}$ kaldes <u>Jacobiant matricen</u> for F i $\underline{p} \in U$.

Hvis $F: U \longrightarrow E^m$ er differentiabel i ethvert punkt $p \in U$, siger vi, at F er differentiabel på U. I så fald får vi en række reelle funktioner

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} : U \longrightarrow E^1$$

hvis værdi i $p \in U$ netop er den antydede partielle afledede i p. Hvis disse funktioner igen er differentiable på U giver de hver anledning til en række nye partielle afledede, f.eks.

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right) : U \longrightarrow E^1$$

Disse afledede kaldes de partielle afledede af anden orden af koordinatfunktionerne for F. Vi vil bruge betegnelsen

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$$

Vi kan nu induktivt definere partielle afledede af orden $3,4,\ldots$.

Definition 2.3. En differentiabel afbildning $F: U \longrightarrow E^m$ siges at være glat (eng.: smooth) eller af klasse C^∞ på U, hvis alle de partielle afledede af vilkårlig høj orden af koordinatfunktionerne for F eksisterer på U.

Generel Antagelse. Når vi i det følgende taler om differentiabilitet, mener vi altid af klasse C^∞. Når vi bruger det lidt "svagere" udtryk differentiabel og ikke glat skyldes det, at langt de fleste overvejelser kun kræver differentiabilitet af klasse C^k for $k = 1,2\cdots$, d.v.s. existens og kontinuitet af alle partielle afledede af orden til og med k.

Definition 2.4. En (parametriseret) kurve i E^n er en differentiabel afbildning $\alpha: I \longrightarrow E^n$ defineret på et åbent interval I af den reelle talakse E^1.

I kaldes parameterintervallet for α og den uafhængige variable i I (som regel betegnet med t) kaldes parameteren eller tids-parameteren på α. Som allerede antydet i definitionen udelader man som regel ordet parametriseret og taler slet og ret om en kurve i E^n.

Lad nu $\alpha: I \longrightarrow E^n$ være en kurve i E^n, og lad $\alpha_1,\cdots,\alpha_n: I \longrightarrow E^1$ være koordinatfunktionerne for α.

Idet $\underline{e}_1$ er den kanoniske basisvektor i E^1, betragter vi for ethvert $t \in I$ følgende vektor i E^1:

$$d\alpha_t(\underline{e}_1) = ((d\alpha_1)_t(\underline{e}_1),\cdots,(d\alpha_n)_t(\underline{e}_1)).$$

Hvis vi indfører betegnelsen

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = d\alpha_t(\underline{e}_1)$$

kan denne ligning skrives på formen

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t),\cdots,\frac{d\alpha_n}{dt}(t)),$$

hvor $\frac{d\alpha_i}{dt}(t)$ som sædvanlig er differentialkvotienten af α_i i $t \in I$.

<u>Definition 2.5</u>. Ved <u>hastighedsvektoren</u> $\alpha'(t)$ på kurven $\alpha: I \longrightarrow E^n$ til tiden $t \in I$ forstår vi tangentvektoren

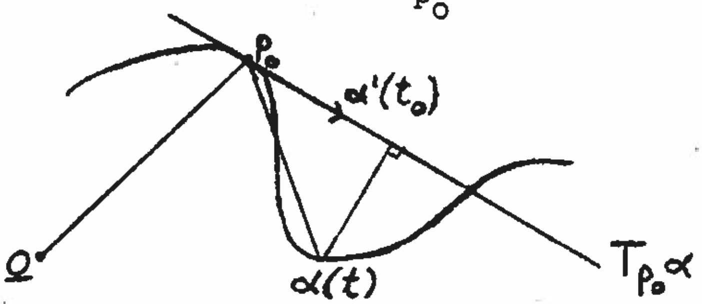
$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)}$$

til E^n i $\alpha(t)$.

Hvis $\alpha'(t_o) \neq 0$ til tiden $t_o \in I$ kan vi definere <u>tangenten</u> til α i punktet $p_o = \alpha(t_o)$ som linien

$$T_{p_o}\alpha = \left\{q \in E^n \mid \exists t' \in E^1 : q = p_o + t' \cdot \frac{d\alpha}{dt}(t_o)\right\}$$

Hvis α specielt er en kurve i E^3, og vi som sædvanlig afsætter $\alpha'(t_o)$ ud fra $p_o = \alpha(t_o)$, ser vi, at $\alpha'(t_o)$ bliver et orienteret liniestykke på $T_{p_o}\alpha$.



Når man benytter definitionsligningen for differentiabilitet, indser man let, at oplysningen $\frac{d\alpha}{dt}(t_o) \neq 0$ medfører, at der findes en åben omegn I_{t_o} af $t_o \in I$, således at $\alpha(t) \neq \alpha(t_o)$ for ethvert $t \in I_{t_o} \setminus \{t_o\}$

Idet $d(\alpha(t), T_{p_o}\alpha)$ betegner afstanden fra punktet $\alpha(t)$ til linien $T_{p_o}\alpha$, kan man nu bevise, at

$$\lim_{t \to t_o} \frac{d(\alpha(t), T_{p_o}\alpha)}{d(\alpha(t), p_o)} = 0$$

for $t \in I_{t_o} \setminus \{t_o\}$.

Dette viser, at vinklen mellem tangenten til α i p_o og sekanten gennem p_o og $\alpha(t)$ går mod 0, når punktet $\alpha(t)$ går mod p_o.

<u>Opgave 1</u>. Verificer ovenstående.

<u>Lemma 2.6</u>. Enhver tangentvektor til E^n kan opnås som hastighedsvektor på en kurve i E^n.

<u>Bevis</u>. Lad $\underline{v}_p \in T_pE^n$ være en vilkårlig tangentvektor til E^n. Hvis vi definerer kurven $\alpha : E^1 \longrightarrow E^n$ ved fastsættelsen

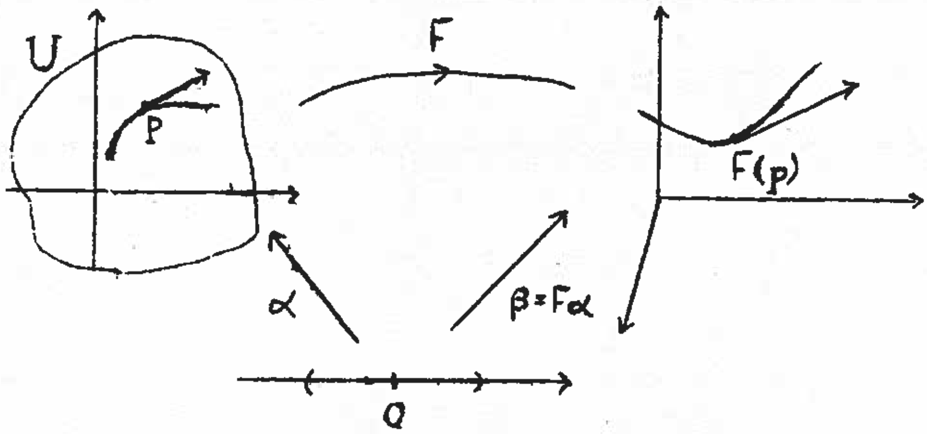
$$\forall t \in E^1 : \alpha(t) = \underline{p} + t\underline{v}$$

er det klart, at $\alpha'(0) = \underline{v}_p$. Dermed er lemmaet bevist.

Det er klart, hvordan en kurve skal afbildes ved en differentiabel afbildning. Lemma 2.6 giver os derfor en mulighed for at afbilde tangentvektorer. Vi vil nu gøre dette præcist.

Lad $U \subsetneq E^n$ være en åben delmængde og lad $F: U \longrightarrow E^m$ være en differentiabel afbildning.

Hvis $I \subsetneq E^1$ er et åbent interval omkring $0 \in E^1$ og $\alpha: I \longrightarrow E^n$ er en kurve i E^n, så $\alpha(0) = \underline{p}$ og $\alpha(I) \subsetneq U$, bliver $\beta = F\alpha: I \longrightarrow E^m$ en kurve i E^m med $\beta(0) = F(p)$.



Man kan nu spørge om relationen mellem hastighedsvektorerne for α og β til tiden $0 \in I$. Kædereglen viser, at

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt}(0) &= d\beta_0(\underline{e}_1) = dF_{\alpha(0)}(d\alpha_0(\underline{e}_1)) \\ &= dF_p(\frac{d\alpha}{dt}(0))\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\beta'(0) = (\frac{d\beta}{dt}(0))_{\beta(0)} = (dF_p(\frac{d\alpha}{dt}(0))_{F(p)}$$

Hvis vi indfører isomorfierne $t_p: E^n \longrightarrow T_pE^n$ og $t_{F(p)}: E^m \longrightarrow T_{F(p)}E^m$, ser vi, at denne relation kan skrives på formen

$$\beta'(0) = t_{F(p)} \circ dF_p \circ t_p^{-1}(\alpha'(0))$$

Dette er den søgte relation mellem hastighedsvektorerne $\alpha'(0)$ og $\beta'(0)$.

Med denne ligning som motivation definerer vi nu den lineære afbildning

$$F_{*p}: T_pE^n \longrightarrow T_{F(p)}E^m$$

som den entydigt bestemte afbildning, der gør følgende diagram kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
E^n \arrow[r, "dF_p"] \arrow[d, "t_p"'] & E^m \arrow[d, "t_{F(p)}"] \\
T_pE^n \arrow[r] & T_{F(p)}E^m
\end{tikzcd}$$

D.v.s. vi sætter

$$F_{*p} = t_{F(p)} \circ dF_p \circ t_p^{-1}$$

Hvis $\underline{v}_p \in T_pE^n$ følger heraf, at

$$F_{*p}(\underline{v}_p) = (dF_p(\underline{v}))_{F(p)}$$

P.gr.a. den nære sammenhæng mellem dF_p og F_{*p} kalder man også den lineære afbildning F_{*p} for differentialet af F i $\underline{p}$. Også betegnelser som den inducerede afbildning af F eller tangentialafbildningen for F i $\underline{p}$ anvendes hyppigt.

Hvis $\alpha: I \longrightarrow E^n$ er en kurve som i optakten, ser vi, at

$$\beta'(0) = (F\alpha)'(0) = F_{*p}(\alpha'(0))$$

Indholdet af denne ligning kan kort udtrykkes ved at sige, at F_{*p} bevarer hastighedsvektorer.

Kædereglen kan udtrykkes v.hj.a. de inducerede afbildninger. Idet $U \subsetneq E^n$ og $V \subsetneq E^m$ er åbne delmængder giver sætning 2.2 straks

Sætning 2.7. Hvis $F: U \longrightarrow V$ er differentiabel i $\underline{p} \in U$, og $G: V \longrightarrow E^k$ er differentiabel i $F(\underline{p}) \in V$, da er sammensætningen $G \circ F$ differentiabel i $\underline{p} \in U$, og

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}$$

Da $(d1_{E^n})_p = 1_{E^n}$ for ethvert $p \in E^n$, følger det også straks, at

$$(1_{E^n})_{*p} = 1_{T_pE^n}$$

for ethvert $\underline{p} \in E^n$.

Betragt nu igen en differentiabel afbildning $F: U \longrightarrow E^m$, hvor U er en åben delmængde af E^n, og lad $\underline{p} \in U$. Lad endvidere $f_1, \cdots, f_m: U \longrightarrow E^1$ være koordinatfunktionerne for F.

Sætning 2.8. F_{*p} fremstilles i de kanoniske baser for T_pE^n og $T_{F(p)}E^m$ ved Jacobiantmatricen $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\underline{p})\right\}$.

Bevis. Lad $\{\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n\}$ og $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_m\}$ være de kanoniske baser for henholdsvis E^n og E^m. Fra tidligere observationer ved vi, at Jacobiantmatricen fremstiller dF_p i disse baser, d.v.s.

$$dF_p(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p) \cdot \underline{v}_i$$

Heraf følger let, at

$$F_{*p}((\underline{e}_j)_p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p) \cdot (\underline{v}_i)_{F(p)}$$

Dette er netop, hvad vi skal vise.

Definition 2.9. Ved rangen af den differentiable afbildning $F: U \longrightarrow E^m$ i $p \in U$ forstår man rangen af den lineære afbildning $F_{*p}: T_pE^n \longrightarrow T_{F(p)}E^m$.

Som bekendt defineres rangen af en lineær afbildning som dimensionen af dens billedrum. Det er også velkendt, at man kan finde rangen af en lineær afbildning som rangen af en vilkårlig af dens associerede matricer, der på den anden side bestemmes som det maximale antal lineært uafhængige søjler (lig det maximale antal lineært uafhængige rækker) i matricen.

V.hj.a. ovenstående bemærkninger viser man nu let følgende sætning.

Sætning 2.10. Rangen af den differentiable afbildning $F: U \longrightarrow E^m$ i $p \in U \subsetneqq E^n$ kan bestemmes som

1. Dimensionen af $F_{*p}(T_pE^n)$
2. Dimensionen af $dF_p(E^n)$
3. Det maximale antal lineært uafhængige søjler i $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p)\right\}$
4. Det maximale antal lineært uafhængige rækker i $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p)\right\}$

Bevis. Til 2. benyttes at t_p og $t_{F(p)}$ er isomorfier. Til 3. og 4. benyttes sætning 2.8.

Definition 2.11. Den differentiable afbildning $F: U \longrightarrow E^m$ siges at være regulær i $p \in U \subsetneqq E^n$, hvis en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt

R.1. $F_{*p}: T_pE^n \longrightarrow T_{F(p)}E^m$ er 1-1-tydig.

R.2. Rangen af F i p er lig n.

Opgave 2. Vis ækvivalensen af R.1. og R.2.

Hvis $F: U \longrightarrow E^m$ er regulær i ethvert punkt $p \in U$, siger vi, at F er regulær på U eller blot, at F er regulær.

Eksempel 2.12. Lad $\alpha: I \longrightarrow E^n$ være en kurve i E^n. Da

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)} = (d\alpha_t(e_1))_{\alpha(t)}$$

$$= \alpha_{*t}((e_1)_t)$$

for ethvert $t \in I$, er det klart, at α er regulær i $t \in I$ hvis og kun hvis $\alpha'(t) \neq 0$ (overvej dette). Hvis α er regulær i $t \in I$ har kurven derfor som tidligere bemærket en tangent i $\alpha(t)$.

Eksempel 2.12. slut.

Definition 2.13. En differentiabel afbildning $F: U \longrightarrow V$ mellem åbne delmængder af euklidiske rum siges at være en diffeomorfi, hvis der findes en differentiabel afbildning $G: V \longrightarrow U$, således at $GF = 1_U$ og $FG = 1_V$.

Af definitionen fremgår det, at en differentiabel afbildning $F: U \longrightarrow V$ er en diffeomorfi, hvis og kun hvis den er bijektiv, og den inverse afbildning $F^{-1} = G: V \longrightarrow U$ er differentiabel.

Sætning 2.14. Lad $U \subseteq E^n$ og $V \subseteq E^m$ være åbne delmængder. Hvis $F: U \longrightarrow V$ er en diffeomorfi er F regulær på U og $n = m$.

Bevis. Lad $G: V \longrightarrow U$ være den inverse afbildning til F, og betragt $p \in U$.

Da $GF = 1_U$ og $FG = 1_V$ giver sætning 2.7:

$$G_{*F(p)} \circ F_{*p} = 1_{T_pE^n} \quad \text{og} \quad F_{*p} \circ G_{*F(p)} = 1_{T_{F(p)}E^m}$$

Disse ligninger viser, at F_{*p} er en isomorfi mellem det n-dimensionale vektorrum T_pE^n og det m-dimensionale vektorrum $T_{F(p)}E^m$. Derfor er $n = m$. Da vi samtidig specielt har vist, at F_{*p} er 1-1-tydig, følger det, at F er regulær i p. Da $p \in U$ var vilkårlig valgt, har vi dermed bevist, at F er regulær på U.

Konklusionen i sætning 2.14. er tilstrækkelig til at sikre, at F lokalt er en diffeomorfi. Dette gøres præcist i følgende vigtige sætning, sætningen om inverse funktioner.

Sætning 2.15. Lad O være en åben delmængde af E^n, og lad $F: O \longrightarrow E^n$ være en differentiabel afbildning. Hvis F er regulær i $\underline{p} \in O$, findes der åbne omegne U af $\underline{p}$ og V af $F(\underline{p})$, således at F afbilder U diffeomorft på V.

Vi vil ikke her bevise sætningen, men henvise læseren til f.eks. Rudin: "Principles of Mathematical Analysis" (thm. 9.17, p. 193).

At sætningen er rimelig kan antydes således:

Den affine afbildning $\bar{F}$ defineret ved

$$\forall q \in E^n: \bar{F}(q) = F(p) + dF_p(q-p)$$

approksimerer F i $p \in O$.

Da dF_p er en isomorfi (hvorfor?) har denne affine afbildning en invers, nemlig $\bar{G}$ defineret ved

$$\forall q \in E^n: \bar{G}(q) = p + (dF_p)^{-1}(q-F(p))$$

Denne affine afbildning bliver den lineære approksimation til den lokale invers for F i $F(p)$.

Korollar 2.16. Lad O være en åben delmængde af E^n, og lad $F: O \longrightarrow E^n$ være en differentiabel afbildning. Hvis F er regulær på O, da er $F(O)$ en åben delmængde af E^n.

Bevis. Vælg ifølge sætning 2.15. for ethvert $p \in O$ åbne omegne U_p og $V_{F(p)}$ af henholdsvis p og $F(p)$, således at F afbilder U_p diffeomorft på $V_{F(p)}$. Så er det klart, at

$$F(O) = \bigcup_{p \in O} V_{F(p)}$$

Dette beviser, at $F(O)$ er en åben delmængde af E^n.

Korollar 2.17. Lad $F: O \longrightarrow E^n$ være en differentiabel afbildning defineret på en åben delmængde O af E^n. Hvis F er 1-1-tydig og regulær på O, da er F en diffeomorfi af O på $F(O)$.

Bevis. $F(O)$ er åben ifølge korollar 2.16.

Da F er 1-1-tydig, kan vi betragte den inverse afbildning $F^{-1}: F(O) \longrightarrow O$ til F. Denne er ifølge sætning 2.15. "lokalt" differentiabel (hvorfor?) og derfor differentiabel på $F(O)$. Dette beviser, at F er en diffeomorfi.

Opgave 3. Giv et eksempel på en 1-1-tydig differentiabel afbildning $F\colon E^1 \longrightarrow E^1$ der ikke er en diffeomorfi. Regularitet er altså en nødvendig forudsætning i korollar 2.17.

Vi får brug for yderligere 2 sætninger, der kan afledes fra sætning 2.15. Bevis for disse sætninger vil blive givet i Differentiable Mangfoldigheder § 3.

Sætning 2.18. Lad O være en åben delmængde af E^n så $\underline{o} \in O$, og lad $F\colon O \longrightarrow E^k$ (med $n \leq k$) være en differentiabel afbildning, således at $F(\underline{o}) = \underline{o}$ og således at F er regulær i $\underline{o} \in E^n$ (ækvivalent: har rang n i $\underline{o} \in E^n$). Der findes da en diffeomorfi G mellem 2 åbne omegne af $\underline{o} \in E^k$, således at GF på en åben omegn U af $\underline{o} \in E^n$ har formen:

$$GF(u_1,\cdots,u_n) = (u_1,\cdots,u_n,0\quad,0)$$

Sætning 2.19. Lad O være en åben delmængde af E^n så $\underline{o} \in O$, og lad $F\colon O \longrightarrow E^k$ (med $n \geq k$) være en differentiabel afbildning, således at $F(\underline{o}) = \underline{o}$ og således at F har rang k i $\underline{o} \in E^n$. Der findes da en diffeomorfi G mellem 2 åbne omegne af $\underline{o} \in E^n$, således at FG på en åben omegn U af $\underline{o} \in E^n$ har formen:

$$FG(u_1,\cdots,u_n) = (u_1,\cdots,u_k)$$

for ethvert $(u_1,\cdots,u_n) \in U$.

Opgaver.

Opgave 4. (Middelværdi sætningen)

Bevis v.hj.a. den klassiske middelværdi sætning følgende sætning:

Lad U være en åben konveks delmængde af E^n, og lad $f\colon U \longrightarrow E^1$ være en differentiabel funktion. Der findes da til ethvert par af punkter $p,q \in U$ et $t_o \in]0,1[$, således at der for $p_o = p + t_o(q-p)$ gælder:

$$f(q) - f(p) = df_{p_o}(q-p)$$

Opgave 5. Bevis følgende sætning:

Lad $U \subseteq E^n$ og $V \subseteq E^m$ være åbne delmængder, og lad K være en konveks delmængde af U. Hvis $F: U \longrightarrow V$ er en differentiabel afbildning, således at alle de partielle afledede for F tilfredsstiller uligheden $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right| < a$ på K for en vis konstant $a > 0$, da vil

$$||F(p) - F(q)|| \leq n \cdot m \cdot a \cdot ||p-q||$$

for ethvert $p,q \in K$.

Opgave 6. Lad $U \subseteq E^n$ og $V \subseteq E^m$ være åbne delmængder, og lad $F: U \longrightarrow V$ og $G: V \longrightarrow E^k$ være regulære afbildninger.

Vis, at $G \circ F: U \longrightarrow E^k$ bliver regulær.

Opgave 7. Lad $F: E^n \longrightarrow E^n$ være en isometri i E^n $(F \in \mathcal{E}(n))$.

Vis, at F er en diffeomorfi, og at der for ethvert $p \in E^n$ gælder:

$$\forall \underline{v},\underline{w} \in E^n: (dF_p(\underline{v}), dF_p(\underline{w})) = (\underline{v},\underline{w}).$$

3. Differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum.

I differentialgeometrien undersøger man en klasse af topologiske rum, de såkaldte differentiable mangfoldigheder. Nogle af disse opstår på naturlig måde som delrum af euklidiske rum, det gælder således f.eks. kurver og flader i E^3, der er objekterne i den klassiske differentialgeometri. Vi vil her til en vis udstrækning betragte differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum som optakt til det generelle begreb.

Først bemærker vi, at der i ordet delrum ligger, at topologien er den inducerede topologi (sportopologien). At M er et delrum af E^k betyder altså, at M er en delmængde af E^k, og at M opfattes som topologisk rum med

$$\mathcal{T} = \{ O \cap M \mid O \text{ åben i } E^k \}$$

som system af åbne mængder.

Med ordene kurve og flade forbinder man henholdsvis noget 1-dimensionalt og 2-dimensionalt. Heri ligger, at man forventer lokalt at kunne beskrive en kurve ved 1 og en flade ved 2 reelle parametre. En n-dimensional mangfoldighed beskrives tilsvarende lokalt ved n reelle parametre. For at kunne gøre dette præcist indfører vi følgende definition.

<u>Definition 3.1.</u> Et <u>n-dimensionalt koordinatsystem i E^k</u> er en 1-1-tydig, regulær afbildning $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ defineret på en åben delmængde D af E^n, således at $\underline{x}^{-1}: \underline{x}(D) \longrightarrow D$ er kontinuert, når $\underline{x}(D)$ opfattes som delrum af E^k.

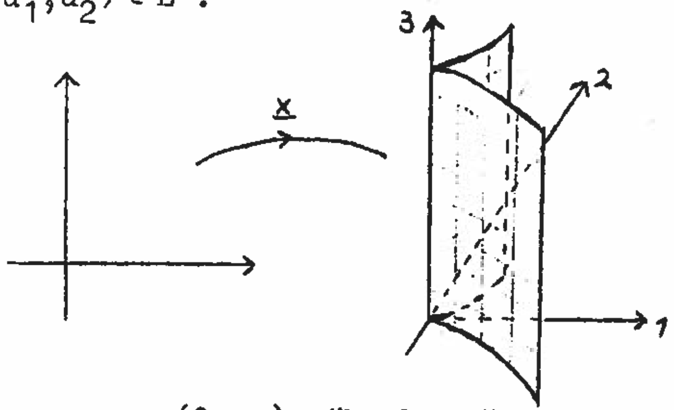
Hvis $\underline{x}$ er et n-dimensionalt koordinatsystem i E^k er det klart, at $n \leq k$, da $\underline{x}$ er regulær. Kontinuitetskravene gør $\underline{x}$ til en homeomorfi af D på $\underline{x}(D)$.

Nogle eksempler kan måske belyse kravene til et n-dimensionalt koordinatsystem i E^k.

Eksempel 3.2. $\underline{x}: E^2 \longrightarrow E^3$ defineres ved fastsættelsen

$$\underline{x}(u_1,u_2) = ((u_1)^2,(u_1)^3,u_2)$$

for ethvert $(u_1,u_2) \in E^2$.



I punkterne $\underline{p} = \underline{x}(0,u_2)$ "knækker" billedet. At billedet her ikke blot er en glat deformering af planen skyldes at $\underline{x}$ ikke er regulær på linien $u_1 = 0$. Hvis x_1,x_2,x_3 er koordinatfunktionerne for $\underline{x}$ kan vi aflæse dette på Jacobiantmatricen

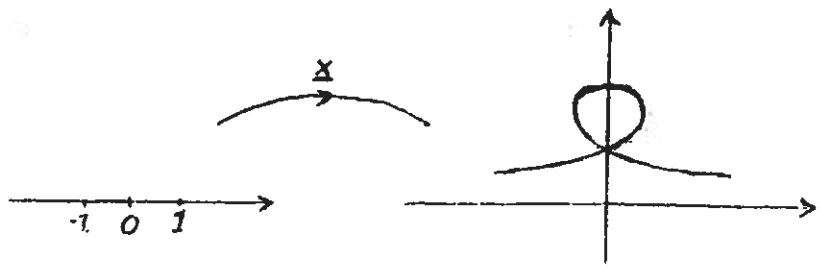
$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \begin{Bmatrix} 2u_1 & 0 \\ 3(u_1)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Det ses at rangen af $\underline{x}$ er 1 for $u_1 = 0$.

Eksempel 3.3. $\underline{x}: E^1 \longrightarrow E^2$ defineres ved fastsættelsen

$$\underline{x}(t) = (t^3 - t, \frac{2}{1+t^2})$$

for ethvert $t \in E^1$

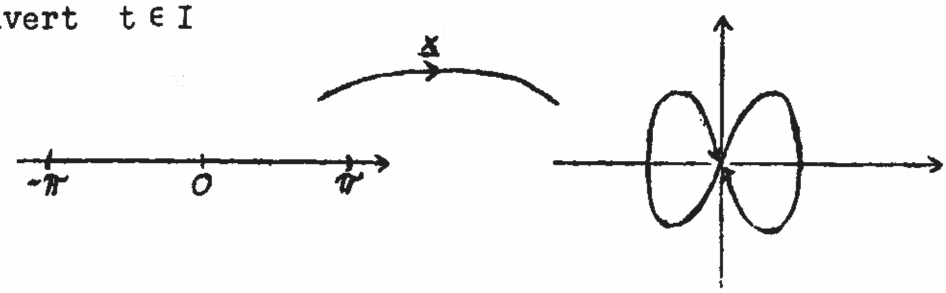


$\underline{x}$ er her ikke 1-1-tydig. I dobbeltpunktet $\underline{p} = \underline{x}(-1) = \underline{x}(1) = (0,1)$ har man 2 mulige valg af vej. Der findes derfor ingen omegn af p i $\underline{x}(E^1)$ (opfattet som delrum af E^2), der kan beskrives ved en enkelt reel parameter, eller anderledes udtrykt: Der findes ingen omegn af p i $\underline{x}(E^1)$, der er homeomorf med et åbent interval.

<u>Eksempel 3.4</u>. Betragt det åbne interval $I =]-\pi, \pi[$ og definer $\underline{x}: I \longrightarrow E^2$ ved fastsættelsen

$$\underline{x}(t) = (\sin t, \sin 2t)$$

for ethvert $t \in I$



Pilene på kurven skal antyde, at når $p = \underline{x}(0) = (0,0)$ vil $\underline{x}(t) \longrightarrow p$ for $t \longrightarrow -\pi$ og $t \longrightarrow \pi$.

I punktet p har man igen 2 mulige valg af vej. Her skyldes det, at $\underline{x}^{-1}$ <u>ikke</u> er <u>kontinuert</u> (hvorfor?)

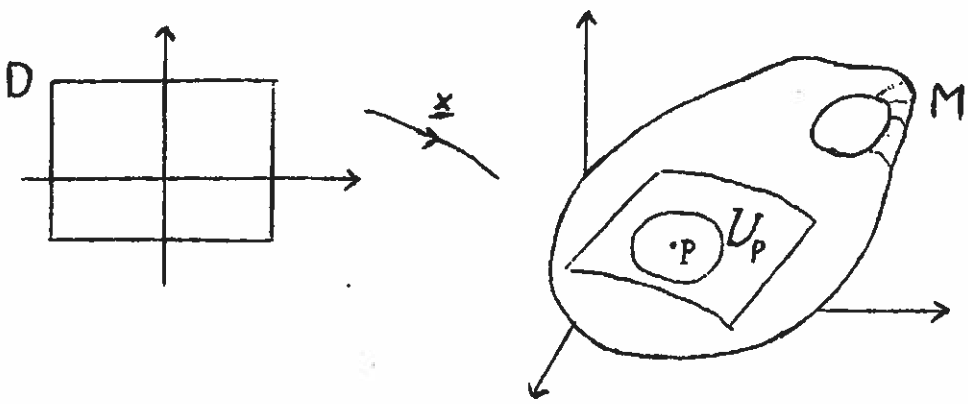
Eksempel 3.4. slut.

Hvis M er et delrum af E^k vil vi kalde et n-dimensionalt koordinatsystem $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ i E^k for et koordinatsystem (eller et lokalt koordinatsystem) <u>på</u> M, hvis $\underline{x}(D) \subseteq M$.

Vi er nu klar til den formelle definition af en differentiabel mangfoldighed i E^k.

<u>Definition 3.5</u>. Et ikke-tomt delrum M af E^k kaldes for en <u>n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k</u>, hvis ethvert punkt $p \in M$ har en åben omegn U_p i M, som helt ligger i billedet af et n-dimensionalt lokalt koordinatsystem i E^k på M.

Man markerer ofte dimensionen af M ved at skrive M^n.



Vi bemærker, at en åben delmængde D af E^k altid er en k-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k. Lad blot $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ være indlægningen af D som delrum i E^k.

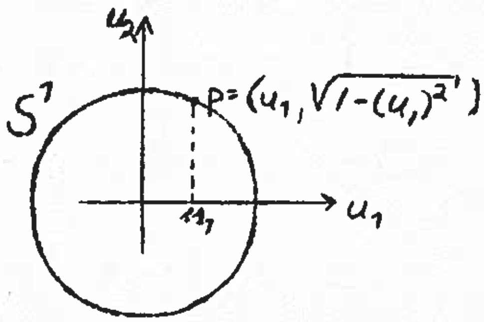
En 1-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k kaldes ofte for en <u>kurve i E^k</u> og en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k for en <u>flade i E^k</u>.

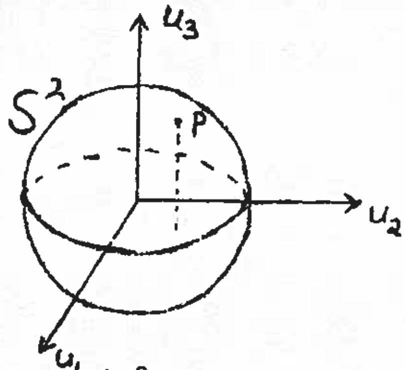
Lad os nu undersøge definition 3.5. i et eksempel.

<u>Eksempel 3.6</u>. Vi betragter <u>enheds-sfæren</u> S^n i E^{n+1}. Pr. definition er S^n følgende delmængde af E^{n+1}:

$$S^n = \left\{(u_1,\cdots,u_n) \in E^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} (u_i)^2 = 1\right\}$$

Vi ønsker at vise, at S^n er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^{n+1}.





Betragt et punkt $p \in S^n$, hvor $u_{n+1} > 0$.

Vi søger et koordinatsystem omkring p. Lad dertil D være den åbne enheds-kugle i E^n, d.v.s.

$$D = \left\{(u_1,\cdots,u_n) \in E^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 < 1\right\},$$

og definer $\underline{x}: D \longrightarrow E^{n+1}$ ved fastsættelsen

$$\underline{x}(u_1,\cdots,u_n) = \left(u_1,\cdots,u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2}\right)$$

for ethvert $(u_1,\cdots,u_n) \in D$.

Man viser let, at $\underline{x}$ er 1-1-tydig og differentiabel, og at $\underline{x}(D) \subseteq S^n$ (gør det). At $\underline{x}$ er regulær, kan vi f.eks. se på Jacobiantmatricen:

$$\left\{\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_n} \end{matrix}\right\}$$

Denne matrix har klart rang n på D.

Hvis $P: E^{n+1} \longrightarrow E^n$ er den naturlige projektion, er det klart, at

$$\underline{x}^{-1} = P|\underline{x}(D): \underline{x}(D) \longrightarrow D$$

Heraf følger (hvorfor?), at $\underline{x}^{-1}$ er kontinuert.

Vi har dermed bevist, at $\underline{x}$ er et n-dimensionalt koordinatsystem i E^{n+1} på S^n. Da $\underline{x}(D)$ er en åben delmængde af S^n i den inducerede topologi (hvorfor?), kan $\underline{x}(D)$ bruges som omegnen U_p af p i definition 3.5.

På helt tilsvarende måde kan vi konstruere koordinatsystemer omkring punkter $p \in S^n$ med $u_{n+1} < 0$.

Tager vi nu alle $n + 1$ koordinatakser i E^{n+1} i betragtning, ser vi, at man kan overdække S^n med $2\cdot(n+1)$ koordinatsystemer af ovenstående type.

Dermed har vi bevist, at S^n er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^{n+1}.

Eksempel 3.6. slut.

Hvis en differentiabel mangfoldighed M^n i E^k kan overdækkes af et enkelt koordinatsystem, d.v.s. $M^n = \underline{x}(D)$ for et n-dimensionalt koordinatsystem $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ i E^k, siger man, at mangfoldigheden er <u>simpel</u>.

Opgave 1. Er S^n simpel ?

Hvis D er en åben delmængde af E^n, og $f: D \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, da er $\underline{x}: D \longrightarrow E^{n+1}$ defineret ved fastsættelsen

$$\underline{x}(u_1,\cdots,u_n) = (u_1,\cdots u_n, f(u_1,\cdots,u_n))$$

for ethvert $(u_1,\cdots u_n) \in D$, et n-dimensionalt koordinatsystem i E^{n+1}.

Opgave 2. Bevis ovenstående.

Delrummet

$$M = \{(u_1,\cdots,u_n, f(u_1,\cdots,u_n)) \mid (u_1,\cdots,u_n) \in D\}$$

i E^{n+1} er derfor en simpel n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^{n+1}. Man siger, at en sådan mangfoldighed er af Monge-typen (efter matematikeren Monge 1746-1818).

En hel række af differentiable mangfoldigheder opstår som løsningsmængden til et system af ligninger.

Antag, at $n<k$ og lad $f_1,\cdots,f_{k-n}: E^k \longrightarrow E^1$ være differentiable funktioner. Man kan så betragte løsningsmængden $M \subsetneq E^k$ til ligningssystemet

$$\begin{aligned} f_1(u_1,\cdots u_k) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{k-n}(u_1,\cdots u_k) &= 0 \end{aligned}$$

Disse ligninger lægger $k - n$ bånd på punkterne i E^k. Under visse omstændigheder bliver løsningsmængden så en differentiabel mangfoldighed i E^k af dimension $k - (k-n) = n$. Når $f_1,\cdots,f_{k-n}$ opfattes som koordinatfunktionerne for $F: E^k \longrightarrow E^{k-n}$ har vi følgende sætning:

Sætning 3.7. Lad $F: E^k \longrightarrow E^{k-n}$ være en differentiabel afbildning, således at $M = F^{-1}(\underline{0}) \neq \emptyset$, og således at rangen af F er $k - n$ i ethvert punkt $p \in M$. Da er M en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k.

Bevis. Betragt $p \in M$. Ifølge sætning 2.19. findes en diffeomorfi G af en åben omegn U af $\underline{O} \in E^k$ på en åben omegn V af $p \in M$ i E^k, således at $G(\underline{O}) = p$, og således at

$$FG(u_1,\cdots,u_k) = (u_1,\cdots,u_{k-n})$$

for ethvert $(u_1,\cdots,u_k) \in U$.

Da $M = F^{-1}(\underline{O})$ og G er en bijektion er det klart, at

$$M \cap V = \{G(u_1,\cdots u_k) \mid u_1 = \cdots u_{k-n} = 0\}$$

Sæt derfor

$$D = \{(v_1,\cdots,v_n) \in E^n \mid (o,\cdots,o,v_1,\cdots,v_n) \in U\}$$

og definer $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ ved fastsættelsen

$$\underline{x}(v_1,\cdots,v_n) = G(o,\cdots,o,v_1,\cdots,v_n)$$

for ethvert $(v_1,\cdots,v_n) \in D$.

Pr. definition er det klart, at $\underline{x}(D) = M \cap V$, som er åben i den inducerede topologi på M, og altså en åben omegn af p i M. Vi skal derfor nu blot bevise, at $\underline{x}$ er et koordinatsystem i E^k på M for at have fuldført beviset.

Dertil indfører vi hjælpeafbildningerne $I': E^n \longrightarrow E^k$ og $P': E^k \longrightarrow E^n$, defineret ved fastsættelsenne

$$I'(v_1,\cdots v_n) = (0,\cdots,0,v_1,\cdots,v_n)$$

$$P'(v_1,\cdots v_k) = (v_{k-n+1},\cdots,v_k)$$

Da $D = (I')^{-1}(U)$ er det klart, at D er åben i E^n. Da $\underline{x} = G \circ I'$ på D er det endvidere klart, at $\underline{x}$ er en 1-1-tydig, regulær afbildning, fordi G er en diffeomorfi og I' trivielt har disse egenskaber. Kontinuiteten af $\underline{x}^{-1}: \underline{x}(D) \longrightarrow D$ følger let ved at bemærke, at $\underline{x}^{-1} = P' \circ G^{-1}$ på $\underline{x}(D)$.

Vi har dermed bevist, at $\underline{x}$ er et n-dimensionalt koordinatsystem i E^k på M. Dette afslutter som tidligere bemærket beviset.

Fra sætning 3.7. følger, at hvis ligningssystemet

$$\begin{matrix} f_1(u_1,\cdots,u_k) = 0 \\ \vdots \\ f_{k-n}(u_1,\cdots,u_k) = 0 \end{matrix} ,$$

svarende til de differentiable funktioner $f_1,\cdots,f_{k-n}: E^k \longrightarrow E^1$, har en løsning, og Jacobiantmatricen

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-n}}{\partial u_1} & & \frac{\partial f_{k-n}}{\partial u_k} \end{Bmatrix}$$

har rang $k - n$ i ethvert punkt af løsningsmængden M, da er M en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k.

En mangfoldighed opstået på denne måde kaldes hyppigt en <u>varietet</u>. Hvis funktionerne $f_1,\cdots,f_{k-n}$ specielt er polynomier i de variable $u_1,\cdots,u_k$ taler man om en <u>algebraisk varietet</u>.

<u>Eksempel 3.8</u>. S^n er en algebraisk varietet, idet den kan fås som løsningsmængden til ligningen

$$f(u_1,\cdots,u_{n+1}) = (u_1)^2 + \cdots(u_{n+1})^2 - 1 = 0$$

Bemærk at Jacobiantmatricen

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} \right\} = (2u_1,\cdots,2u_{n+1})$$

er forskellig fra 0 (har rang 1) på S^n.

<u>Eksempel 3.9</u>. Betragt ligningssystemet

$$f_1(u_1,u_2,u_3) = (u_1)^2 + (u_2)^2 - 1 = 0$$

$$f_2(u_1,u_2,u_3) = u_2 + 2u_3 = 0$$

Man indser let, at løsningsmængden $M \neq \emptyset$, thi $u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 0$ er en løsning.

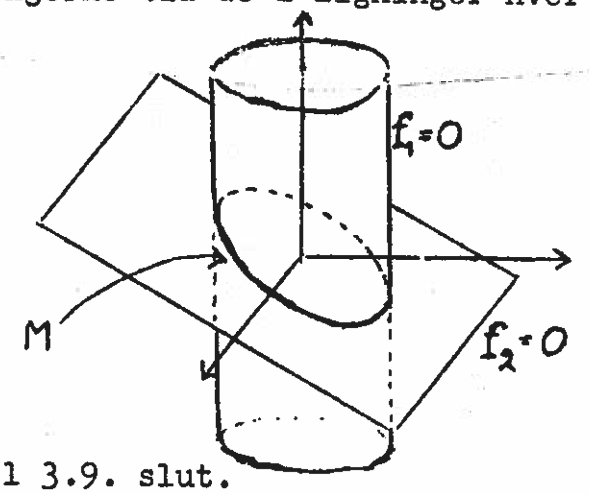
Vi undersøger dernæst Jacobiantmatricen

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2u_1 & 2u_2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\}$$

I punkter af M må $(u_1,u_2) \neq (0,0)$ (første ligning). I begge tilfælde $u_1 \neq 0$ og $u_2 \neq 0$ ser man straks, at rækkerne er lineært uafhængige. Matricen har derfor rang 2 på hele M.

Ifølge sætning 3.7. er M derfor en 1-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^3 (en kurve i E^3). M er faktisk en algebraisk varietet.

Det er her let at finde M "geometrisk" som snitkurven mellem løsningerne til de 2 ligninger hver for sig.



Eksempel 3.9. slut.

Til sidst i dette afsnit beskæftiger vi os med topologien på en differentiabel mangfoldighed i et euklidisk rum. Det vil her være rart at vide, at billedet af et koordinatsystem på en mangfoldighed er en åben delmængde af mangfoldigheden. Dette ligger ikke i definition 3.5. og kræver et bevis. Vi ønsker altså at bevise følgende sætning.

Sætning 3.10. Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k. Hvis $\mathbf{x}: D \longrightarrow E^k$ er et koordinatsystem i E^k på M, da er $\mathbf{x}(D)$ en åben delmængde af M.

Bevis. Betragt et vilkårligt punkt $p \in \underline{x}(D) \subseteq M$. Vi skal finde en åben omegn af p i M, der helt er indeholdt i $\underline{x}(D)$.

Ifølge definition 3.5. kan vi finde et koordinatsystem $\underline{y}: E \longrightarrow E^k$ i E^k på M, så $\underline{0} \in E \subseteq E^n$, $\underline{y}(\underline{0}) = p$ og $\underline{y}(E)$ er åben i M (overvej dette).

Da $\underline{y}: E \longrightarrow \underline{y}(E)$ er en homeomorfi og $\underline{y}(E)$ er åben i M er det tilstrækkeligt at finde en åben omegn V af $\underline{0} \in E^n$, således at $V \subseteq \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$, thi så vil $\underline{y}(V) \subseteq \underline{x}(D)$ være en åben omegn af p i M som ønsket.

Hvis vi kan vise, at afbildningen

$$\underline{y}^{-1}\underline{x}: \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$$

er differentiabel på en åben omegn $U' \subseteq \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \subseteq E^n$ af $\underline{x}^{-1}(p)$ i E^n og regulær i $\underline{x}^{-1}(p)$, findes der ifølge sætning 2.15. en åben omegn $U \subseteq U'$ af $\underline{x}^{-1}(p)$, der afbildes diffeomorft på en åben omegn $V \subseteq \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$ i E^n af $\underline{0} \in E^n$. Dette vil altså afslutte beviset.

Vi stræber derfor nu efter at vise ovenstående udsagn om $\underline{y}^{-1}\underline{x}$.

Ifølge sætning 2.18. kan vi finde en diffeomorfi G af en åben omegn af $p \in E^k$ på en åben omegn af $\underline{0} \in E^k$, således at $G\underline{y}$ på en åben omegn $V' \subseteq E$ af $\underline{0} \in E^n$ har formen:

$$G\underline{y}(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n, 0, \cdots, 0)$$

for ethvert $(v_1, \cdots, v_n) \in V'$.

Da $\underline{y}: E \longrightarrow \underline{y}(E)$ er en homeomorfi og $\underline{y}(E)$ er åben i M bliver $\underline{y}(V')$ åben i M. Idet $\underline{x}$ er kontinuert er $U' = \underline{x}^{-1}(\underline{y}(V'))$ derfor en åben delmængde af $D \subseteq E^n$.

Idet $P: E^k \longrightarrow E^n$ betegner den naturlige projektion, påstår vi nu, at

$$(*) \quad \underline{y}^{-1}\underline{x} = P \circ G \circ \underline{x} \qquad \text{på } U'.$$

Da alle afbildninger på højresiden er differentiable vil dette vise, at $y^{-1}x$ er differentiabel på U'. Da samtidig

$$x = y \circ (y^{-1}x) \quad \text{på} \quad U',$$

og x har rang n i $x^{-1}(p)$, må $y^{-1}x$ mindst have rang n i $x^{-1}(p)$ og derfor præcis rang n. For at have ført bevis for sætningen skal vi derfor nu blot verificere $(*)$.

For at bevise $(*)$ vælger vi $u \in U'$ vilkårligt. Svarende til u findes et entydig bestemt $v \in V'$, således at $x(u) = y(v)$. Heraf fås

$$G \circ x(u) = G \circ y(v) = (v, 0)$$

og derfor

$$P \circ G \circ x(u) = v = y^{-1}x(u)$$

Dette beviser $(*)$, og dermed er sætning 3.10. bevist.

Opgaver

Opgave 3. Lad K være en kurve i E^2. Opfat E^2 som u_1u_3-planen i E^3 og drej K omkring u_3-aksen. Vis, at der herved opstår en flade M i E^3. M kaldes en omdrejningsflade.

Vis explicit følgende: Idet v betegner drejningsvinklen, J er et interval af længde $< 2\pi$ og $x: I \longrightarrow E^2$ er et koordinatsystem i E^2 på K med parameter $u \in I$, da er

$$y: I \times J \longrightarrow E^3$$

defineret ved fastsættelsen

$$y(u,v) = (x_1(u)\cos v\,,\ x_1(u)\sin v\,,\ x_3(u))$$

for ethvert $(u,v) \in I \times J$, et koordinatsystem i E^3 på M.

Opgave 4. Betragt omdrejningsfladen T der fremkommer ved at dreje cirklen med centrum $(R,0,0)$ og radius r $(0 < r < R)$ i u_1u_3-planen omkring u_3-aksen i E^3. T kaldes en Torus.

Vis, at afbildningen

$$\underline{x}: E^1 \times E^1 \longrightarrow E^3$$

defineret ved fastsættelsen

$$\underline{x}(u,v) = ((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u)$$

for ethvert $(u,v) \in E^1 \times E^1$ er regulær, og at $\underline{x}(E^1 \times E^1) = T$.

Angiv dernæst et koordinatsystem omkring et vilkårligt punkt på Torus.

Opgave 5. (Fortsættelse af opgave 4).

1) Lad m og n være indbyrdes primiske hele tal og definer afbildningen $\alpha : E^1 \longrightarrow T$ ved fastsættelsen

$$\forall t \in E^1 : \alpha(t) = \underline{x}(mt, nt)$$

Vis, at α er en regulær, periodisk kurve på T og find perioden.

At en kurve er periodisk med perioden $p > 0$ betyder, at $\alpha(t) = \alpha(t')$ hvis og kun hvis $t' - t$ er et helt multiplum af p.

2) Lad ς være et irrationalt reelt tal og definer $\alpha: E^1 \longrightarrow T$ ved fastsættelsen

$$\forall t \in E^1 : \alpha(t) = \underline{x}(t, \varsigma t)$$

Vis, at α er 1-1-tydig og regulær, og at $\alpha(E^1)$ er en overalt tæt delmængde af Torus.

Opgave 6. Betragt følgende ligningssystem på E^4:

$$f_1(u_1,u_2,u_3,u_4) = (u_1)^2 + (u_2)^2 - 1 = 0$$

$$f_2(u_1,u_2,u_3,u_4) = (u_3)^2 + (u_4)^2 - 1 = 0$$

Vis, at løsningsmængden M er en flade i E^4.

Med notation fra opgave 4 skal man nu vise, at der defineres en bijektion $F: T \longrightarrow M$ ved fastsættelsen

$$F(\underline{x}(u,v)) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

for ethvert $(u,v) \in E^1 \times E^1$.

4. Differentiable afbildninger

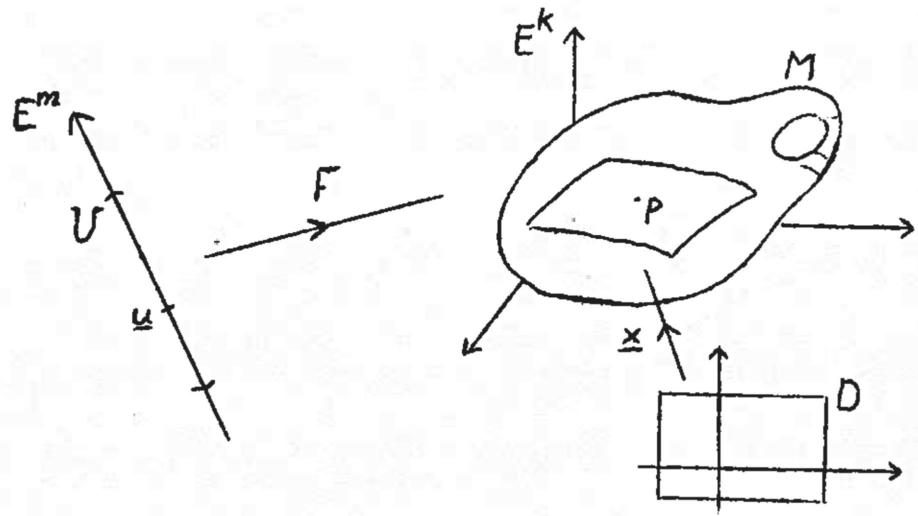
Følgende sætning er nyttig i mange forbindelser.

Sætning 4.1. Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k, og lad $F: U \longrightarrow E^k$ være en differentiabel afbildning defineret på en åben delmængde U af E^m, således at $F(U) \subseteq M$. Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ er et n-dimensionalt koordinatsystem i E^k på M således at $F(U) \cap \underline{x}(D) \neq \emptyset$, da er

$$\underline{x}^{-1}F: F^{-1}(\underline{x}(D)) \longrightarrow D$$

en differentiabel afbildning.

Bemærk, at der i udsagnet ' en afbildning er differentiabel ' altid indgår, at den er defineret på en åben mængde.



Bevis. Da $\underline{x}(D)$ er åben i M (sætning 3.10) og F er kontinuert, er $F^{-1}(\underline{x}(D))$ åben i D.

Betragt nu et vilkårligt punkt $\underline{u} \in F^{-1}(\underline{x}(D))$ og sæt $p = F(\underline{u})$. Efter en eventuel parallelforskydning af D i E^n kan vi uden indskrænkning antage, at $\underline{0} \in D$ og at $\underline{x}(\underline{0}) = p$.

Ifølge sætning 2.18. kan vi finde en diffeomorfi G af en åben omegn af $p \in E^k$ på en åben omegn af $\underline{0} \in E^k$, således at $G\underline{x}$ på en åben omegn $V \subseteq D$ af $\underline{0} \in E^n$ har formen:

$$G\underline{x}(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n, 0, \cdots, 0)$$

for ethvert $(v_1, \cdots, v_n) \in V$.

Da F er kontinuert, $\underline{x}: D \dashrightarrow \underline{x}(D)$ er en homeomorfi og $\underline{x}(D)$ er åben i M bliver

$$U' = F^{-1}(\underline{x}(V))$$

en åben omegn af $\underline{u} \in F^{-1}(\underline{x}(D)) \subseteq U$.

Idet $P: E^k \longrightarrow E^n$ er den naturlige projektion kan man nu som i beviset for sætning 3.10. indse, at

$$\underline{x}^{-1}F = P \circ G \circ F \qquad \text{på } U'$$

Da alle afbildninger på højresiden er differentiable, viser denne ligning, at $\underline{x}^{-1}F$ er differentiabel på U' og altså specielt i $\underline{u}$.

Da $\underline{u} \in F^{-1}(\underline{x}(D))$ var vilkårlig valgt er sætning 4.1. dermed bevist.

Sætning 4.1. har et yderst vigtigt korollar, der fortæller at 2 koordinatsystemer på en mangfoldighed <u>overlapper glat</u>, d.v.s. at koordinatskiftet foregår ved differentiable funktioner. Dette udsagn er uafhængigt af at mangfoldigheden ligger som delrum af et euklidisk rum og kan derfor bruges som grundsten i det generelle begreb en differentiabel mangfoldighed.

<u>Korollar 4.2</u>. Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ og $\underline{y}: E \dashrightarrow E^k$ er koordinatsystemer i E^k på den differentiable mangfoldighed M^n i E^k, da er

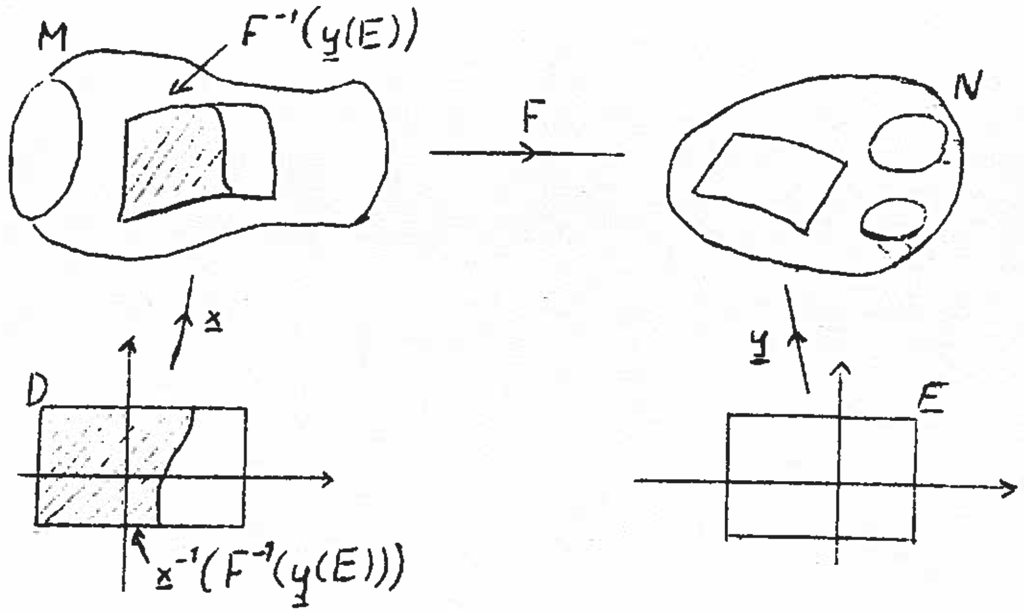
$$\underline{y}^{-1}\underline{x}: \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$$

og

$$\underline{x}^{-1}\underline{y}: \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$$

differentiable afbildninger.

<u>Definition 4.3</u>. Lad M^n og N^k være differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum. En kontinuert afbildning $F: M \longrightarrow N$ siges at være <u>differentiabel</u>, hvis $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ er differentiabel i sædvanlig euklidisk forstand for ethvert par af koordinatsystemer $\underline{x}$ på M og $\underline{y}$ på N.



Bemærk at definitionsmængden $\underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E)))$ for $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ bliver åben, da F er forudsat kontinuert.

Antag, at $M^n \subseteq E^m$ og $N^k \subseteq E^l$. Hvis M specielt er en åben delmængde U af E^n følger det fra sætning 4.1., at $F: U \longrightarrow N$ er differentiabel efter definition 4.3. hvis og kun hvis F opfattet som afbildning ind i E^l er differentiabel i sædvanlig euklidisk forstand (overvej dette). Vi kan specielt benytte dette på kurver:

En kontinuert afbildning $\alpha: I \longrightarrow N$ defineret på et åbent interval er differentiabel som afbildning ind i N (definition 4.3.) hvis og kun hvis den er en sædvanlig differentiabel kurve i E^l.

Hvis $\alpha: I \longrightarrow N$ er differentiabel, kalder vi α for en (<u>parametriseret</u>) <u>kurve</u> på N.

Det glatte overlap af koordinatsystemer (korollar 4.2.) kommer os til nytte, når vi skal checke, at en afbildning $F: M \longrightarrow N$ er differentiabel.

<u>Lemma 4.4.</u> (I tilknytning til definition 4.3.)
Hvis $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ er differentiabel for tilstrækkelig mange koordinatsystemer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ til at overdække henholdsvis M og N, da er F differentiabel.

Bevis. Lad $\tilde{\underline{x}}$ og $\tilde{\underline{y}}$ være 2 vilkårlige koordinatsystemer på henholdsvis M og N. Idet $\underline{x}$ og $\underline{y}$ gennemløber 2 samlinger af koordinatsystemer, der overdækker henholdsvis M og N, kan vi stykke $\tilde{\underline{y}}^{-1}F\tilde{\underline{x}}$ sammen ved afbildninger af typen

$$(\tilde{\underline{y}}^{-1}\underline{y})\circ(\underline{y}^{-1}F\underline{x})\circ(\underline{x}^{-1}\tilde{\underline{x}})$$

Hvis afbildningerne $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ vides at være differentiable er en sådan sammensætning differentiabel p.gr.a. det glatte overlap af koordinatsystemer. Vi vil derfor kunne slutte, at $\tilde{\underline{y}}^{-1}F\tilde{\underline{x}}$ er differentiabel. Dermed er lemmaet bevist.

Eksempel 4.5. (Stereografisk projektion)

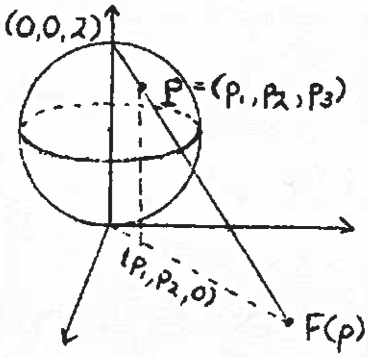
Lad Σ være sfæren i E^3 med centrum $(0,0,1)$ og radius 1, og sæt

$$\Sigma^{o} = \Sigma \setminus \{(0,0,2)\}$$

Opfat E^2 som delrum af E^3 på sædvanlig måde og definer dernæst afbildningen $F\colon \Sigma^{o} \longrightarrow E^2$ således:

Til $p \in \Sigma^{o}$ knyttes skæringspunktet $F(p) \in E^2$ mellem E^2 og sigtelinien fra $(0,0,2)$ gennem p.

Afbildningen F kaldes en stereografisk projektion.



Hvis (p_1,p_2,p_3) betegner koordinaterne for $\underline{p} \in \Sigma^{o}$, ser man let ved at betragte passende ensvinklede trekanter, at

$$F(\underline{p}) = \frac{2}{2-p_3}(p_1,p_2) = \left(\frac{2p_1}{2-p_3}, \frac{2p_2}{2-p_3}\right)$$

Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow E^3$ er et vilkårligt koordinatsystem på Σ^o er koordinatfunktionerne for $\underline{x}$ euklidisk differentiable. Ovenstående udtryk for F viser så, at også koordinatfunktionerne for $F\underline{x}$ er euklidisk differentiable. F er derfor en differentiabel afbildning.

Eksempel 4.5. slut.

<u>Sætning 4.6</u>. Hvis $F: M^n \longrightarrow N^k$ og $G: N^k \longrightarrow L^m$ er differentiable afbildninger mellem differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum, da er

$$GF: M \longrightarrow L$$

en differentiabel afbildning.

Identiteten $1_M: M \longrightarrow M$ er en differentiabel afbildning for enhver differentiabel mangfoldighed M i et euklidisk rum.

<u>Bevis</u>. Lad $\underline{x}$, $\underline{y}$ og $\underline{z}$ betegne koordinatsystemer på henholdsvis M, N og L.

Afbildningen $\underline{z}^{-1}(GF)\underline{x}$ kan stykkes sammen af afbildninger af typen

$$(\underline{z}^{-1}G\underline{y}) \circ (\underline{y}^{-1}F\underline{x})$$

når $\underline{y}$ varierer gennem koordinatsystemerne på N. At sammensætningen GF er differentiabel følger nu umiddelbart fra den tilsvarende regel (del af kædereglen) i det euklidiske tilfælde.

At en identisk afbildning er differentiabel er ækvivalent med det glatte overlap af koordinatsystemer (korollar 4.2.).

<u>Opgaver</u>

<u>Opgave 1</u>. Identificer E^2 med den komplekse plan $\mathbb{C}$ og bemærk, at

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Vis, at afbildningen $F: S^1 \longrightarrow S^1$ defineret ved fastsættelsen

$$\forall z \in S^1 : F(z) = z^k$$

er differentiabel.

Opgave 2. Betragt i E^3 følgende flader:

$$\Sigma = S^2 \setminus \{(0,0,1),\ (0,0,-1)\}$$

og

$$C = \{(u_1,u_2,u_3) \in E^3 \mid (u_1)^2 + (u_2)^2 = 1\}$$

Definer nu afbildningen $F:\Sigma \longrightarrow C$ således: Hvis $p \in \Sigma$ skal $F(p) \in C$ være det entydigt bestemte punkt på C, der ligger på linien gennem p ortogonal på u_3-aksen.

Vis, at F er differentiabel.

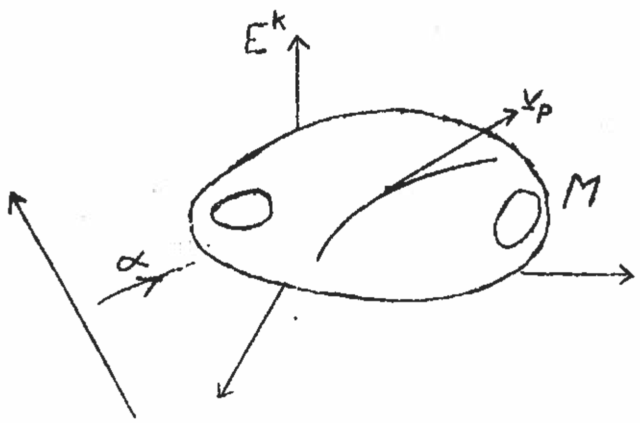
Opgave 3. Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed i E^k, og lad $\mathbf{x}: D \longrightarrow E^k$ være en 1-1-tydig, regulær afbildning defineret på en åben delmængde D af E^n, således at $\mathbf{x}(D) \subsetneq M$.

Vis, at $\mathbf{x}^{-1}: \mathbf{x}(D) \longrightarrow D$ automatisk bliver kontinuert. $\mathbf{x}$ er altså et koordinatsystem i E^k på M.

5. Tangentrum og inducerede afbildninger

Lad M^n være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^k og lad $p \in M$ være et fast punkt i M.

Definition 5.1. Ved en tangentvektor v_p til M i $p \in M$ forstås en tangentvektor til E^k i p, der kan opnås som hastighedsvektor for en kurve α på M.



Ved eventuel parallelforskydning af parameterintervallet for α kan man let indse, at det i definition 5.1. er tilstrækkeligt at betragte hastighedsvektorer $\alpha'(0)$ for kurver $\alpha: I \longrightarrow M$ defineret på et åbent interval I omkring $0 \in E^1$, således at $\alpha(0) = p$.

Mængden af tangentvektorer til M i $p \in M$ vil vi betegne med T_pM.

Sætning 5.2. Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ er et n-dimensionalt koordinatsystem i E^k på M, så $\underline{0} \in D \subseteq E^n$ og $\underline{x}(\underline{0}) = p$, da er

$$T_pM = \underline{x}_{*\underline{0}}(T_{\underline{0}}E^n)$$

Bevis. Da enhver tangentvektor til E^n kan opnås som hastighedsvektor på en kurve i E^n (lemma 2.6.), får vi straks inklusionen

$$\underline{x}_{*\underline{0}}(T_{\underline{0}}E^n) \subseteq T_pM$$

Lad dernæst $\underline{v}_p \in T_pM$ være givet som hastighedsvektoren $\underline{v}_p = \alpha'(0)$ for kurven $\alpha: I \longrightarrow M$ på M. Fra sætning 4.1. ved vi, at $\underline{x}^{-1}\alpha: I' \longrightarrow E^n$ er en differentiabel kurve i E^n defineret på intervallet $I' = \alpha^{-1}(\underline{x}(D)) \subseteq I$ omkring $0 \in E^1$.

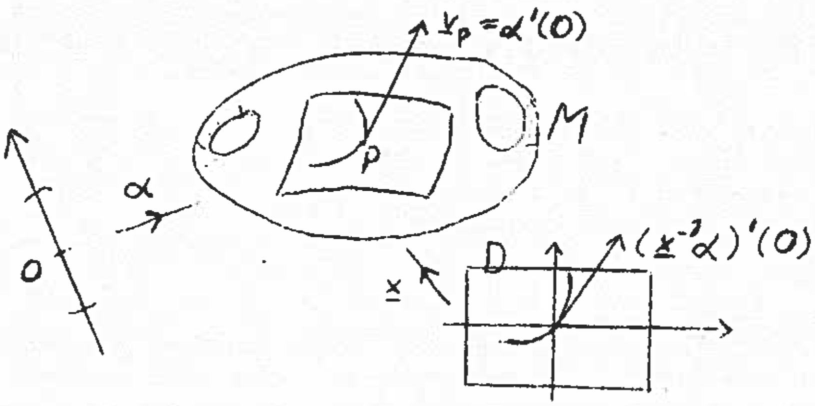
Vi udnytter nu kædereglen på $\alpha = \underline{x} \circ (\underline{x}^{-1}\alpha)$. Derved fås

$$\underline{v}_p = \alpha'(0) = \underline{x}_{*\underline{0}}((\underline{x}^{-1}\alpha)'(0))$$

Da $(\underline{x}^{-1}\alpha)'(0) \in T_{\underline{0}}E^n$ viser dette inklusionen

$$T_pM \subseteq \underline{x}_{*\underline{0}}(T_{\underline{0}}E^n)$$

Dermed er sætningen bevist.



Da vi altid kan finde et koordinatsystem $\underline{x}: D \longrightarrow E^k$ på M så $\underline{0} \in D \subsetneq E^n$ og $\underline{x}(\underline{0}) = p$, og

$$\underline{x}_{*\underline{0}}: T_{\underline{0}}E^n \longrightarrow T_pE^k$$

er en 1-1-tydig ($\underline{x}$ er regulær) lineær afbildning giver sætningerne 1.2. og 5.2. nu umiddelbart følgende resultat

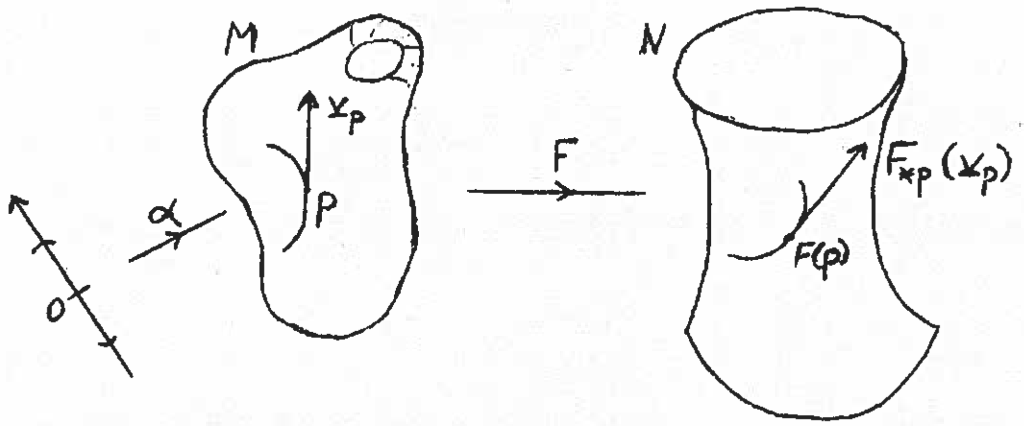
<u>Sætning 5.3</u>. T_pM^n er et n-dimensionalt reelt vektorrum.

Man kalder T_pM for <u>tangentrummet</u> til M i $p \in M$.

Vi ser faktisk, at T_pM er et n-dimensionalt underrum i T_pE^k, og at $\underline{x}_{*\underline{0}}$ definerer en isomorfi

$$\underline{x}_{*\underline{0}}: T_{\underline{0}}E^n \longrightarrow T_pM$$

Betragt nu en differentiabel afbildning $F: M^n \longrightarrow N^k$ mellem differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum, sig $M^n \subsetneq E^l$ og $N^k \subsetneq E^m$, og lad $p \in M$.



<u>Sætning 5.4</u>. Der findes en entydig bestemt lineær afbildning.

$$F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

med følgende egenskab:

Hvis $\underline{v}_p \in T_pM$ er hastighedsvektoren $\alpha'(0)$ for kurven $\alpha: I \longrightarrow M$ på M, da er $F_{*p}(\underline{v}_p)$ hastighedsvektoren $(F\alpha)'(0)$ for kurven $F\alpha: I \longrightarrow N$ på N.

F_{*p} kaldes <u>differentialet</u>, <u>tangentialafbildningen</u> eller den <u>inducerede afbildning</u> af F i $p \in M$.

Bevis. Lad $\underline{x}: D \longrightarrow E^l$ være et koordinatsystem i E^l på M så $\underline{0} \in D \subsetneq E^n$ og $\underline{x}(\underline{0}) = p$.

Antag nu, at $\alpha : I \longrightarrow M$ og $\beta : J \longrightarrow M$ er kurver på M med $\alpha(0) = \beta(0) = p$, således at $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Da $\underline{x}_{*\underline{0}}$ er 1-1-tydig ser man let, at $(\underline{x}^{-1}\alpha)'(0) = (\underline{x}^{-1}\beta)'(0)$. Så får vi:

$$
\begin{aligned}
(F\alpha)'(0) &= (F\underline{x}\,\underline{x}^{-1}\alpha)'(0) \\
&= (F\underline{x})_{*0}\left((\underline{x}^{-1}\alpha)'(0)\right) \\
&= (F\underline{x})_{*\underline{0}}\left((\underline{x}^{-1}\beta)'(0)\right) \\
&= (F\beta)'(0)
\end{aligned}
$$

Dette viser, at der findes en entydig bestemt veldefineret afbildning $F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ med den foreskrevne egenskab.

Ved at repræsentere tangentvektorer til E^n som hastighedsvektorer på kurver, indser man let, at følgende diagram er kommutativt:

$$
\begin{tikzcd}
 & T_pM \subsetneq T_pE^l \arrow[d, "F_{*p}"] \\
T_{\underline{0}}E^n \arrow[ur, "\underline{x}_{*\underline{0}}"] \arrow[r, "(F\underline{x})_{*\underline{0}}"'] & T_{F(p)}N \subsetneq T_{F(p)}E^m
\end{tikzcd}
$$

Da $(F\underline{x})_{*\underline{0}}$ (defineret i 2.) er lineær, og $\underline{x}_{*\underline{0}}$ er en lineær isomorfi af $T_{\underline{0}}E^n$ på T_pM, følger det heraf, at F_{*p} er lineær.

Dermed er sætning 5.4. bevist.

Ved at repræsentere tangentvektorer som hastighedsvektorer på kurver viser man let følgende regler

Sætning 5.5. Lad $F: M^n \longrightarrow N^k$ og $G: N^k \longrightarrow L^m$ være differentiable afbildninger mellem differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum, og lad $p \in M$. Da gælder:

1. $(GF)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}$

Samtidig gælder:

2. $(1_M)_{*p} = 1_{T_pM}$

<u>Definition 5.6</u>. Den differentiable afbildning $F: M^n \longrightarrow N^k$ mellem differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum siges at være <u>regulær</u> i $p \in M$, hvis

$$F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

er 1-1-tydig.

Hvis F er regulær i ethvert punkt af M, siger vi, at F er regulær på M eller blot, at F er regulær.

Bemærk, at hvis $F: M^n \longrightarrow N^k$ er regulær, må vi nødvendigvis have $n \leq k$.

<u>Definition 5.7</u>. En differentiabel afbildning $F: M \longrightarrow N$ kaldes en <u>diffeomorfi</u>, hvis der findes en differentiabel afbildning $G: N \longrightarrow M$, således at $GF = 1_M$ og $FG = 1_N$.

<u>Sætning 5.8</u>. Hvis $F: M^n \longrightarrow N^k$ er en diffeomorfi, da er F regulær og $n = k$.

<u>Bevis</u>. Samme bevis som for sætning 2.14.

Vi har her igen lokalt en omvendt sætning

<u>Sætning 5.9</u>. (Invers funktions sætning)

Lad $F: M^n \longrightarrow N^n$ være en differentiabel afbildning mellem differentiable mangfoldigheder af samme dimension og antag, at F er regulær i $p \in M$. Der findes da en åben omegn U af $p \in M$ som ved F afbildes diffeomorft på en åben omegn V af $F(p) \in N$.

<u>Bevis</u>. Lad $\underline{x}$ og $\underline{y}$ være koordinatsystemer på henholdsvis M og N omkring $p \in M$ og $F(p) \in N$ og betragt afbildningen $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$. Når man bemærker, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er diffeomorfier mellem åbne mængder i E^n og åbne mængder på henholdsvis M og N (hvorfor?) følger sætning 5.9. nu let fra sætning 2.15. (gennemfør argumentet).

Opgaver

Opgave 1. Vis, at afbildningen F i afsnit 3 opgave 6 er en diffeomorfi.

Opgave 2. Lad $A: S^n \longrightarrow S^n$ være den antipodiske afbildning på n-sfæren $S^n \subsetneq E^{n+1}$, d.v.s.

$$\forall \underline{p} \in S^n: A(\underline{p}) = -\underline{p} .$$

Vis, at A er en diffeomorfi, og at der for ethvert $\underline{p} \in S^n$ gælder:

$$\forall \underline{v}_p \in T_p S^n: A_{*p}(\underline{v}_p) = (-\underline{v})_{-p}$$

Opgave 3. (I tilknytning til eksempel 4.5.)
Vis, at $T_{\underline{o}} \Sigma^o = T_{\underline{o}} E^2$ som underrum af $T_{\underline{o}} E^3$.

Vis dernæst, at

$$F_{*\underline{o}}: T_{\underline{o}} \Sigma^o \longrightarrow T_{\underline{o}} E^2$$

svarer til den identiske afbildning, når $T_{\underline{o}} \Sigma^o$ identificeres med $T_{\underline{o}} E^2$.

Opgave 4. Lad M være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed i et euklidisk rum.

Vis, at mængden af diffeomorfier i M er en gruppe under sammensætning. Vi betegner denne gruppe med $\mathrm{Diff}(M)$.

En undergruppe $\mathcal{G}$ af $\mathrm{Diff}(M)$ siges at operere transitivt på M, hvis der til ethvert par af punkter $p_1, p_2 \in M$ findes en diffeomorfi $F \in \mathcal{G}$, således at $F(p_1) = p_2$.

Vis, at $\mathrm{Diff}(T)$ opererer transitivt på T, hvis T betegner Torus defineret i afsnit 3 opgave 4.

Opgave 5. Lad F være en ortogonal transformation i E^n (afsnit 1, opgaver). Vis, at F definerer en diffeomorfi (også betegnet F)

$$F: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

$O(n)$ kan herved opfattes som en undergruppe i $\mathrm{Diff}(S^{n-1})$.
Vis, at $O(n)$ opererer transitivt på S^{n-1}.

Opgave 6. Lad M^n og N^k være differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum, sig $M^n \subsetneq E^l$ og $N^k \subsetneq E^m$.

Vis, at $M \times N$ er en $(n+k)$-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^{l+m}. $M \times N$ kaldes produktet af M og N.

Vis, at de naturlige projektioner $p_M : M \times N \longrightarrow M$ og $p_N : M \times N \longrightarrow N$ bliver differentiable afbildninger.

Lad nu $(p,q) \in M \times N$ være et vilkårligt punkt i $M \times N$.

Vis, at der findes en entydig bestemt isomorfi

$$\Theta : T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_pM \oplus T_qN ,$$

således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
 & T_{(p,q)}(M \times N) \arrow[dl, "(p_M)_*"'] \arrow[dr, "(p_N)_*"] \arrow[dd, "\Theta"] & \\
T_pM & & T_qN \\
 & T_pM \oplus T_qN \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

π_1 og π_2 er de naturlige projektioner fra den direkte sum.

6. Regulære punkter og værdier

Efter nogle indledende definitioner og lemmaer vil vi afslutte dette afsnit med et bevis for Algebraens Fundamental Sætning.

Vi skal betragte en differentiabel afbildning $F : M^n \longrightarrow N^n$ mellem 2 n-dimensionale differentiable mangfoldigheder M^n og N^n i euklidiske rum.

Definition 6.1. Et punkt $p \in M$ kaldes et regulært punkt for F, hvis F er regulær i p (d.v.s. F_{*p} 1-1-tydig), og ellers et kritisk punkt for F.

Hvis $q \in N$ og $F^{-1}(q)$ ikke indeholder kritiske punkter for F (specielt $F^{-1}(q) = \emptyset$) kaldes q en regulær værdi for F. Hvis $F^{-1}(q)$ indeholder mindst et kritisk punkt for F kaldes q en kritisk værdi for F.

Lemma 6.2. Hvis M er kompakt og $q \in N$ er en regulær værdi for F indeholder $F^{-1}(q)$ højst endelig mange punkter. Specielt kan $F^{-1}(q)=\emptyset$ forekomme.

Bevis. Hvis $p \in F^{-1}(q)$ er F regulær i p. Sætning 5.9. viser så, at F afbilder en hel omegn af p diffeomorft (specielt 1-1-tydigt) på en omegn af q. $F^{-1}(q)$ består derfor af isolerede punkter i M. Som delmængde af M har $F^{-1}(q)$ altså diskret topologi.

Da $F^{-1}(q)$ er lukket i M, og M er kompakt, er $F^{-1}(q)$ kompakt.

Idet en diskret, kompakt mængde nødvendigvis er endelig, følger det så, at $F^{-1}(q)$ er endelig.

Dermed er lemma 6.2. bevist.

Definition 6.3. Hvis M er kompakt og $q \in N$ er en regulær værdi for F, skal $\# F^{-1}(q)$ betegne antallet af elementer i $F^{-1}(q)$.

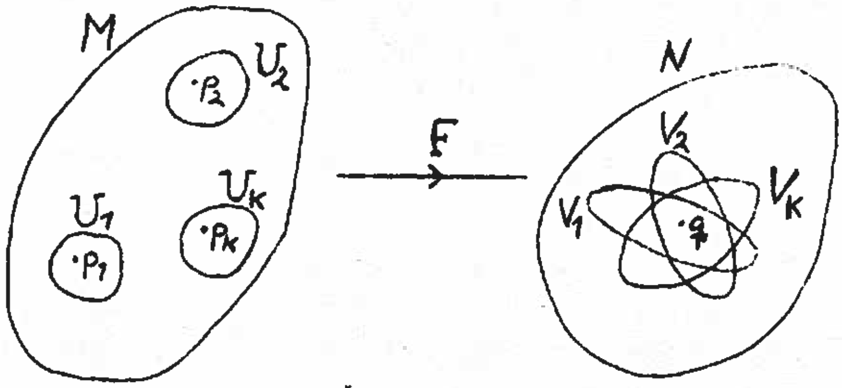
Lemma 6.4. Hvis M er kompakt er mængden af regulære værdier for F en åben delmængde O af N, og $\# F^{-1}(q)$ er en lokal konstant funktion, når q varierer gennem O, d.v.s. omkring enhver regulær værdi $q \in N$ for F findes en åben omegn $V \subseteq O$ således at

$$\# F^{-1}(q') = \# F^{-1}(q)$$

for ethvert $q' \in V$.

Bevis. Lad $q \in N$ være en regulær værdi for F, og lad $p_1, \cdots, p_k$ være de endelig mange elementer i $F^{-1}(q)$ (lemma 6.2.), idet vi nu først antager at $F^{-1}(q) \neq \emptyset$.

Ifølge sætning 5.9. kan vi om ethvert p_i vælge en omegn U_i, som ved F afbildes diffeomorft på en omegn V_i af $F(p_i) = q$. Vi kan vælge $U_1, \cdots, U_k$ parvis disjunkte.



$M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ er lukket i M og derfor kompakt, da M er kompakt. Da F er kontinuert er $F(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ derfor kompakt i N, og altså specielt lukket i N (N er Hausdorff).

Idet $F(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ ikke indeholder $q \in N$, er

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i \setminus F(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i)$$

derfor en åben omegn af $q \in N$.

Omegnen V har pr. konstruktion følgende egenskaber:

a) V indeholder kun regulære værdier for F.

b) For ethvert $q' \in V$ indeholder $F^{-1}(q')$ præcis et punkt fra hvert U_i. D.v.s. $\# F^{-1}(q') = k$ for ethvert $q' \in V$.

Hvis $F^{-1}(q) = \emptyset$ findes en åben omegn V af q, således at $F^{-1}(V) = \emptyset$, fordi $F(M)$ er lukket i N, da F er kontinuert og M er kompakt.

Disse overvejelser beviser lemma 6.4.

Vi kan nu bevise Algebraens Fundamental Sætning.

Sætning 6.5. Ethvert ikke-konstant komplex polynomium $P(z)$ har en rod.

Bevis. Vi skal betragte et polynomium

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \qquad n \geq 1,$$

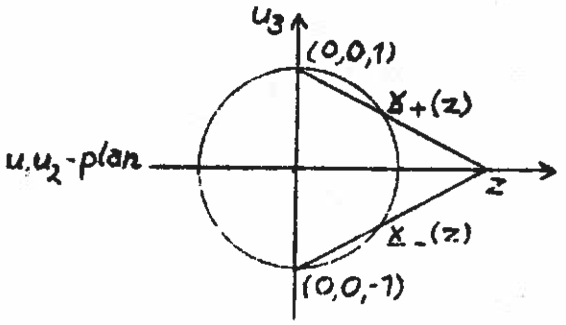
hvor a_i'erne er komplexe tal med $a_0 \neq 0$.

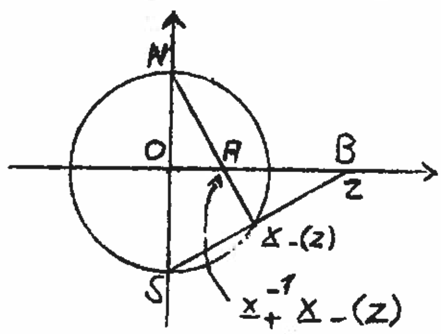
I det følgende vil vi identificere den komplexe plan med E^2. $z \in E^2$ betegner så den komplexe variable.

For at benytte de ovenstående bemærkninger om regulære værdier må vi til P knytte en afbildning mellem kompakte mangfoldigheder. Dette vil vi gøre ved at gå fra den komplexe plan op på enheds-sfæren i E^3

$$S^2 = \{(u_1,u_2,u_3) \in E^3 \mid (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 = 1\}$$

Hvis E^2 som sædvanlig identificeres med u_1u_2-planen i E^3, kan vi få 2 koordinatsystemer x_+ og x_- på S^2 ved at betragte de inverse afbildninger til stereografisk projektion fra henholdsvis $(0,0,1)$ og $(0,0,-1)$.





Vi får altså koordinatsystemerne

$$x_+ : E^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$$

$$x_- : E^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$$

på S^2. Det er let at se (f.eks. ved direkte at opskrive koordinatudtryk), at x_+ og x_- er regulære afbildninger ind i E^3, således at vi virkelig har 2 koordinatsystemer på S^2.

Vi definerer nu afbildningen

$$F: S^2 \longrightarrow S^2$$

ved fastsættelsen

$$F(p) = x_+ P x_+^{-1}(p) \quad \text{for} \quad p \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$$

$$F(0,0,1) = (0,0,1)$$

Hvis $p \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ kan vi bruge x_+ som koordinatsystem omkring både p og $F(p)$. Fremstillingen $P = x_+^{-1} F x_+$ viser så, at F er differentiabel på $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$.

F er imidlertid også differentiabel i $(0,0,1)$, som vi nu skal vise.

Omkring $(0,0,1)$ kan vi bruge koordinatsystemet x_-. Da $(0,0,1) \in S^2$ ved x_- svarer til $0 \in E^2$, skal vi blot vise, at $x_-^{-1} F x_-$ er differentiabel i $0 \in E^2$.

Ved simple geometriske overvejelser på ovenstående figur (brug f.eks. de ensvinklede trekanter $\triangle$ NOA og $\triangle$ BOS) finder vi:

$$x_+^{-1} x_-(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \text{for} \quad z \neq 0.$$

Tilsvarende gælder

$$x_-^{-1} x_+(z) = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \text{for} \quad z \neq 0$$

Vi bemærker nu, at

$$P(\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_n \bar{z}^n}{\bar{z}^n}$$

er defineret og forskellig fra 0 i en udprikket omegn af $0 \in E^2$ (d.v.s. en omegn af $0 \in E^2$ minus $0 \in E^2$)

I denne udprikkede omegn finder vi så:

$$\begin{aligned} x_-^{-1} F x_-(z) &= (x_-^{-1} x_+) \circ P \circ (x_+^{-1} x_-)(z) \\ &= \frac{1}{\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}} \\ &= \frac{z^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n} \qquad (*) \end{aligned}$$

Da $x_-^{-1} Fx(0) = 0$ ser vi, at denne formel også gælder i $0 \in E^2$. Vi har derfor udtrykket $(*)$ i en hel omegn af $0 \in E^2$. Dette viser, at $x_-^{-1} Fx_-$ er differentiabel i $0 \in E^2$, og derfor at F er differentiabel i $(0,0,1)$.

Da x_+ er regulær, kan $p \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ kun være et kritisk punkt for F, hvis $x_+^{-1}(p)$ er et kritisk punkt for P. Dette sidste er ensbetydende med, at $x_+^{-1}(p)$ er en rod i

$$P'(z) = n a_o z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$$

Idet der højst er $n - 1$ rødder i dette polynomium, kan F højst have n kritiske punkter ($(0,0,1)$ kan være kritisk punkt for F). Det væsentlige er, at F højst har endelig mange kritiske punkter og derfor også højst endelig mange kritiske værdier.

De regulære værdier for F består således af S^2 minus endelig mange punkter og er derfor en kurvesammenhængende mængde. Da $\# F^{-1}(q)$ er en lokal konstant funktion på mængden af regulære værdier for F og disse udgør en kurvesammenhængende mængde er $\# F^{-1}(q)$ konstant på denne mængde (standard argument fra topologien). Da F virkelig <u>har</u> regulære punkter er denne konstant forskellig fra 0. Derfor er alle regulære værdier for F i billedet af F. Da alle kritiske værdier for F trivielt er dette, slutter vi, at F afbilder S^2 <u>på</u> S^2.

Da $F^{-1}(0,0,1) = (0,0,1)$ ser vi, at F afbilder $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ på sig selv. Derfor vil $P = x_+^{-1} Fx_+$ afbilde E^2 <u>på</u> E^2. Specielt ligger $0 \in E^2$ i billedet af P, hvilket netop giver existensen af et $z_o \in E^2$ så $P(z_o) = 0$.

Dette var, hvad vi skulle vise.

Forelæsninger over

DIFFERENTIALGEOMETRI

og

DIFFERENTIALTOPOLOGI

Differentiable mangfoldigheder I + II

Vagn Lundsgaard Hansen

December 1968.

August 1970.

FORORD

Disse noter er beregnet til undervisning i fagområdet matematik 3 under det naturvidenskabelige fakultet ved Århus Universitet. Matematik 3 følges på matematik linien i andet studieår og på matematik-fysik linien i tredie studieår. Forudsætningerne er grundlæggende kurser i matematisk analyse og lineær algebra.

Der foreligger ialt 4 hefter:

Indledning til differentialgeometri og differentialtopologi.
Differentiable Mangfoldigheder I
Differentiable Mangfoldigheder II
Appendix 1,2 og 3

Vagn Lundsgaard Hansen

Differentiable Mangfoldigheder I

Indhold:

§ 1: Topologi og differentiabel struktur på en mangfoldighed 1

§ 2: Tangentrummene for en differentiabel mangfoldighed 9

§ 3: Differentiable afbildninger 19

§ 4: Tangentbundtet og Lie-algebraen af vektorfelter for en differentiabel mangfoldighed 36

§ 5: Tangentbundt konstruktionen som funktor 54

§ 6: Differentiable vektorbundter 63

§ 7: Operationer på vektorbundter 94

Differentiable Mangfoldigheder II

Indhold:

§ 8: Differential former 128
- i) Bundter af ydre former 128
- ii) Algebraen af differential former 131
- iii) Ydre differentiation af differential former 140
- iv) Transport af differential former ved differentiable afbildninger 148

§ 9: Riemann'sk metrik 155

§ 10: Vektoranalyse på en orienteret Riemann'sk mangfoldighed 176

§ 11: Anvendelser af deling af enheden 201
- i) Existens af Riemann'sk metrik 201
- ii) Orientering af mangfoldigheder 203
- iii) Imbedding af kompakt differentiabel mangfoldighed i euklidisk rum 206
- iv) Approximation af kontinuert afbildning med differentiabel afbildning 208

§ 12: Integration på mangfoldigheder 212
- i) Integration på E^n 212
- ii) Integration af differential former 217
- iii) Områder med regulær rand 225
- iv) Stokes' sætning 236

§ 13: Topologiske anvendelser af Stokes' sætning .. 248
- i) Brouwer's fixpunkt sætning 248
- ii) Vektorfelter på kugleflader 254

§ 14: De Rham cohomologi og afbildningsgrad 258

Indholdsfortegnelse til samtlige hefter ... Reg.1

Stikordsregister til samtlige hefter Reg.3

§ 1. Topologi og differentiabel struktur på en mangfoldighed

Definition 1.1. Et n-dimensionalt lokalt koordinatsystem på en mængde M består af en åben mængde $D \subsetneq E^n$ og en 1-1-tydig afbildning $\underline{x}: D \longrightarrow M$.

Den åbne mængde D kaldes koordinatmængden eller parametermængden for koordinatsystemet $\underline{x}: D \longrightarrow M$ på M. Vi vil ofte undlade explicit at nævne koordinatmængden D og slet og ret tale om koordinatsystemet $\underline{x}$ på M.

Bemærkning. Vi bruger vektornotationen $\underline{x}$, selv om M ikke være en delmængde af et euklidisk rum for at bevare notationen fra "Indledning til differentialgeometri og differentialtopologi".

Definition 1.2. Et n-dimensionalt del-atlas $\mathcal{P}$ på en mængde M er en samling af lokale koordinatsystemer på M, som opfylder:

1. M er overdækket af billederne af de lokale koordinatsystemer i $\mathcal{P}$.
2. Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow M$ og $\underline{y}: E \longrightarrow M$ er lokale koordinatsystemer på M, som tilhører $\mathcal{P}$, skal $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$ og $\underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$ være åbne mængder i E^n.
3. Hvis $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{P}$ som i 2 med $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$, skal afbildningerne

$$\underline{y}^{-1}\underline{x} : \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \quad \text{og}$$

$$\underline{x}^{-1}\underline{y} : \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$$

være differentiable i sædvanlig euklidisk forstand.

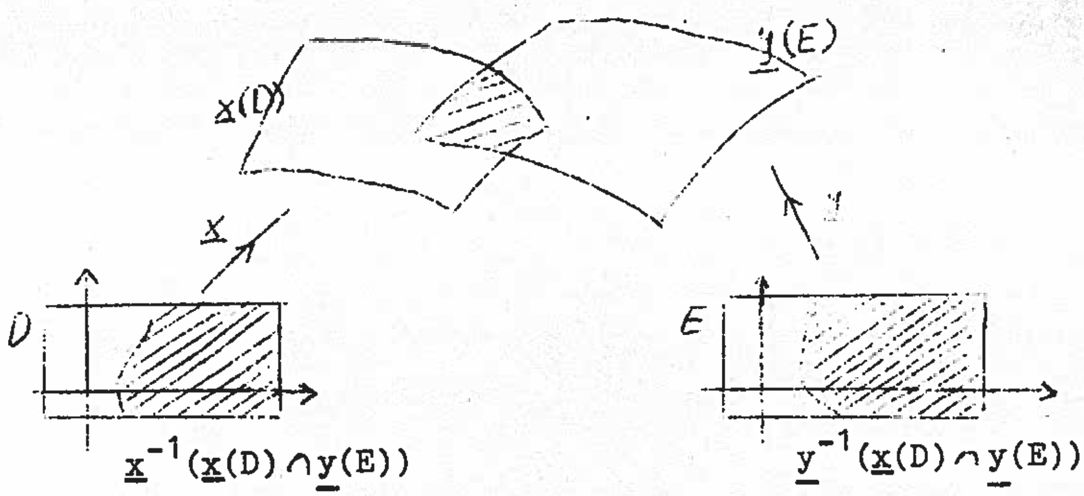


fig. 1.

Bemærkning. 2 i definition 1.2 er nødvendig for at formulere 3.

Bemærkning. Svarende til glosen del-atlas kalder man ofte et lokalt koordinatsystem på M for et kort på M.

Definition 1.3. En n-dimensional differentiabel mangfoldighed er en mængde M forsynet med et n-dimensionalt del-atlas $\mathcal{P}$ på M.

Vi vil først forsyne M med en topologi. Den følgende sætning giver en topologi på M, som passer sammen med kortene i del-atlasset $\mathcal{P}$ på M.

Sætning. 1.4. Hvis M er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed med del-atlas $\mathcal{P}$, kan M på entydig måde gives en topologi, således at $\underline{x} : D \to M$ er en homeomorfi af den åbne mængde $D \subseteq E^n$ på $\underline{x}(D) \subseteq M$ for ethvert $\underline{x} \in \mathcal{P}$.
og $\underline{x}(D)$ åben i M $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$.

Bevis. En topologi på en mængde er fuldstændig beskrevet ved systemet af åbne mængder. Vi kan få en ide om, hvordan vi skal definere de åbne mængder på M, ved først at bevise entydigheden af den søgte topologi.

Entydighed. Lad $\mathcal{T}$ være en topologi på M, som opfylder kravet i sætningen, og lad $O \subseteq M$ være en åben mængde i $\mathcal{T}$. Da $\underline{x}$ er en homeomorfi på sit billede $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$, vil $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap O)$ være åben i E^n $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$. Lad nu omvendt $O \subseteq M$ have den egenskab, at $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap O) \subseteq E^n$ er åben $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$. Da $\underline{x}(D)$ er åben i M, vil $\underline{x}(D) \cap O \subseteq M$ så være åben i topologien $\mathcal{T}$ $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$.
Derfor er også $\bigcup_{\underline{x} \in \mathcal{P}} \underline{x}(D) \cap O$ åben i $\mathcal{T}$. Da $\mathcal{P}$ overdækker M, følger heraf, at $O = \bigcup_{\underline{x} \in \mathcal{P}} \underline{x}(D) \cap O$ er åben i topologien $\mathcal{T}$ på M.

<u>Konklusion</u>. En delmængde $O \subseteq M$ er åben i $\mathcal{T}$, hvis og kun hvis $\underline{x}^{-1}(O) \subseteq E^n$ er åben i E^n $\forall \underline{x} \in \mathcal{P}$.

Da sidste del i konklusionen kun omtaler $\mathcal{P}$ og E^n, følger det, at $\mathcal{T}$ er entydig bestemt.

<u>Existens</u>. Entydighedsbeviset gav os en recept på, hvordan vi skal definere de åbne mængder.

Lad $\mathcal{T} = \{ O \subseteq M \mid \underline{x}^{-1}(O) \subseteq E^n$ åben $\forall \underline{x} \in \mathcal{P} \}$. For at vise, at $\mathcal{T}$ definerer en topologi på M, skal vi vise·

i) $\emptyset, M \in \mathcal{T}$

ii) $O_1, \ldots, O_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} O_i \in \mathcal{T}$

iii) $O_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in \Gamma \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} O_\alpha \in \mathcal{T}$

Hvis man benytter formlerne

$$\underline{x}^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} O_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{k} \underline{x}^{-1}(O_i) \text{ og } \underline{x}^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} O_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \underline{x}^{-1}(O_\alpha) \text{ er}$$

beviset for ii) og iii) trivielt.

$\mathcal{T}$ definerer derfor en topologi på M.

Vi skal nu blot vise, at topologien $\mathcal{T}$ opfylder kravet i sætningen. Lad derfor $\underline{x} : D \to M$ være et lokalt koordinatsystem på M. Da $\underline{x}^{-1}(O)$ åben i D for enhver åben mængde $O \subseteq M$ (pr. definition) er $\underline{x}$ kontinuert.
For at vise, at $\underline{x}^{-1} : \underline{x}(D) \to D$ er kontinuert, bruger vi for første gang i dette bevis det glatte overlap af lokale koorinatsystemer. Lad $V \subseteq D$ være en åben mængde i D. Vi skal vise, at $O = \underline{x}(V)$ er åben i M. Hvis $\underline{y} : E \to M$ er et vilkårligt koordinatsystem i $\mathcal{P}$, skal vi altså vise, at $\underline{y}^{-1}(O) = (\underline{y}^{-1}\underline{x})(V)$ er åben i E. Dette får vi imidlertid let, da $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ er en homeomorfi af en åben mængde i D på en åben mængde i E. ($\underline{x}^{-1}\underline{y}$ er invers til $\underline{y}^{-1}\underline{x}$). Dermed har vi vist, at $\underline{x}^{-1}$ er kontinuert, og dermed, at $\underline{x} \cdot D \to M$ er en homeomorfi af $D \subseteq E^n$ på $\underline{x}(D) \subseteq M$.

Topologien tilfredsstiller altså kravet i sætningen, og beviset for sætning 1.4 er ført.

<u>Bemærkning</u>. I det følgende vil vi altid opfatte en differentiabel mangfoldighed som topologisk rum med den entydigt bestemte topologi fra sætning 1.4.

Følgende exempel viser, at topologien på M i sætning 1.4 ikke nødvendigvis gør M til et Hausdorff rum.

Exempel 1.5. (Linie med 2 begyndelsespunkter). Lad M være mængden af reelle tal plus et extra punkt 0^*, altså $M=E^1\cup\{0^*\}$

Betragt afbildningerne:

$\underline{x} : E^1 \longrightarrow M$ og $\underline{y} : E^1 \longrightarrow M$

defineret ved, at

$$\underline{x}(t) = t \quad \forall t \in E^1; \quad \underline{y}(t) = t \text{ for } t \neq 0 \text{ og } \underline{y}(0)=0^*.$$

Det er klart, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er 1-1-tydige afbildninger, og de definerer derfor 2 lokale koordinatsystemer på M. $\underline{x}$ og $\underline{y}$ overdækker M. Man ser let, at $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(E^1)\cap\underline{y}(E^1)) = \underline{y}^{-1}(\underline{x}(E^1)\cap\underline{y}(E^1))$

$$=E^1-\{0\}.$$

Endvidere konstaterer vi, at $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ og $\underline{x}^{-1}\underline{y}$ er de identiske afbildninger på $E^1-\{0\}$. Disse observationer viser, at M er en 1-dimensional differentiabel mangfoldighed med $\mathcal{F}=\{\underline{x},\underline{y}\}$ som del-atlas.

Den topologi, som M får ved kravet om, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ skal være homeomorfier på deres billeder, tilfredsstiller ikke Hausdorff axiomet. Årsagen er, at vi aldrig kan finde disjunkte åbne omegne af 0 og 0^*.

Når vi kun beskæftiger os med mangfoldigheders lokale egenskaber, er Hausdorff axiomet irrelevant. For at kunne lægge en metrik på en mangfoldighed, må vi imidlertid nødvendigvis have Hausdorff axiomet opfyldt. Derfor kræver man ofte fra starten, at en mangfoldighed skal være et Hausdorff rum. Vi kan opnå en Hausdorff mangfoldighed ved yderligere at tilføje et krav til definitionen 1.3.

Definition 1.6. En n-dimensional Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed er en mængde M forsynet med et n-dimensionalt del-atlas $\mathcal{F}$, der foruden kravene i definitionen 1.2 tilfredsstiller:

4. For ethvert par af indbyrdes forskellige punkter $\underline{p},\underline{q} \in M$ findes, enten et koordinatsystem $\underline{x}: D \to M$ i $\mathcal{F}$, så $\underline{p},\underline{q} \in \underline{x}(D)$, eller 2 koordinatsystemer $\underline{x}: D \longrightarrow M$ og $\underline{y}: E \longrightarrow M$ i $\mathcal{F}$, således at $\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E) = \emptyset$, $\underline{p} \in \underline{x}(D)$ og $\underline{q} \in \underline{y}(E)$.

Opgave 1. Vis, at når 4 er opfyldt, bliver M med topologien fra sætning 1.4 virkelig et Hausdorff rum.

Der er et konstruktivt element i definitionerne 1.3 og 1.6. Vi konstruerer et topologisk rum ved at lime åbne mængder i E^n sammen på passende vis.

I litteraturen definerer man ofte en n-dimensional mangfoldighed til at være et topologisk rum, hvor ethvert punkt har en omegn homeomorf med en åben mængde i E^n. Topologien på rummet er således givet fra starten, og man kan derfor tillægge homeomorfi betydning. Vi har konstrueret topologien på rummet ved kravet om, at de lokale koordinatsystemer skulle give anledning til homeomorfier.

Definition 1.7. 2 n-dimensionale del-atlas $\mathcal{P}$ og $\tilde{\mathcal{P}}$ på M kaldes fordragelige, hvis det for ethvert par af lokale koordinatsystemer $\underline{x} \in \mathcal{P}$ og $\underline{\tilde{x}} \in \tilde{\mathcal{P}}$ gælder, at $\underline{\tilde{x}}^{-1}\underline{x}$ og $\underline{x}^{-1}\underline{\tilde{x}}$ er defineret på åbne mængder i E^n og er differentiable i sædvanlig euklidisk forstand.

Hvis vi sammenligner med definition 1.2, ser vi, at følgende definition er ækvivalent med definition 1.7.

Definition 1.7'. To n-dimensionale del-atlas $\mathcal{P}$ og $\tilde{\mathcal{P}}$ på M kaldes fordragelige, hvis $\mathcal{P} \cup \tilde{\mathcal{P}}$ igen er et del-atlas på M.

Lemma 1.8. Fordragelighed mellem n-dimensionale del-atlas på M er en ækvivalensrelation.

Opgave 2. Bevis lemma 1.8.

Lemma 1.9. 2 fordragelige del-atlas på M giver samme topologi på M.

Opgave 3. Bevis lemma 1.9.

Definition 1.10. En ækvivalensklasse af n-dimensionale del-atlas på M siges at definere en differentiabel struktur på M.

Sætning 1.11. Enhver ækvivalensklasse af del-atlas på M indeholder et entydig bestemt maximalt element (ordning ved inklusion).

Bevis. Lad $\mathcal{P}$ være et vilkårligt del-atlas i en given ækvivalensklasse. Betragt nu følgende samling af lokale koordinatsystemer på M:

$\mathcal{P}^*$ = mængden af lokale koordinatsystemer på M som overlapper differentiabelt med ethvert element i $\mathcal{P}$ (d.v.s. som i definition 1.2 2 og 3).

Da $\mathcal{P}$ overdækker M, er det let at indse, at $\mathcal{P}^*$ bliver et del-atlas på M. Man skal blot konstatere, at 2 tilføjede koordinatsystemer overlapper differentiabelt. Det er klart, at $\mathcal{P}^*$ er det maximale element i ækvivalensklassen frembragt af $\mathcal{P}$.

Opgave 4. Udfyld beviset for sætning 1.11. Vis specielt, at det maximale element er entydig bestemt.

Definition 1.12. Det maximale element i en ækvivalensklasse af fordragelige n-dimensionale del-atlas på M kaldes det n-dimensionale atlas for den differentiable struktur på M bestemt af ækvivalensklassen.

Al lemma 1.9 følger:

Sætning 1.13. Enhver differentiabel struktur på M udpeger entydigt en topologi på M, således at $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ giver en homeomorfi af D på $\underline{x}(D)$ for ethvert lokalt koordinatsystem i det maximale atlas for den differentiable struktur på M.

Bemærkning. Vi understreger, at det maximale atlas for en differentiabel struktur på M er fuldstændig bestemt af et enkelt del-atlas i ækvivalensklassen for den differentiable struktur på M. Sætning 1.13 viser, at topologien på M ligeledes er bestemt af et enkelt del-atlas for den differentiable struktur på M.

Den foregående bemærkning retfærdiggør, at vi ikke vil skelne mellem differentiable mangfoldigheder, der har samme grundmængde og ækvivalente del-atlas. Derfor burde definition 1.3 egentlig have været formuleret således:

Definition 1.3. (ny formulering). En n-dimensional differentiabel mangfoldighed er en mængde M forsynet med en differentiabel struktur.

Exempler og opgaver.

Exempel 1.14. E^n kan gives en differentiabel struktur v.hj.a. del-atlasset bestående af ét kort $\underline{x}: E^n \to E^n$, hvor $\underline{x}$ er den identiske afbildning. Denne struktur kaldes standard strukturen på E^n, og hvis ikke andet er fremhævet, tænkes E^n altid forsynet med denne differentiable struktur.

Opgave 5. Sæt $M=E^1$. Lad $\underline{x}: E^1 \longrightarrow M$ være den identiske afbildning, og lad $\underline{y}: E^1 \longrightarrow M$ være defineret ved at $\underline{y}^{-1}(t) = t^3 \quad \forall t \in E^1$. Vis, at de 2 del-atlas $\mathcal{P} = \{\underline{x}\}$ og $\tilde{\mathcal{P}} = \{\underline{y}\}$ på M giver den sædvanlige topologi på M. Vis dernæst, at $\mathcal{P}$ og $\tilde{\mathcal{P}}$ ikke er fordragelige. M med del-atlas $\mathcal{P}$ og M med del-atlas $\tilde{\mathcal{P}}$ er altså ens som topologiske rum, men har forskellige differentiable strukturer.

Exempel 1.15. Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed med del-atlas $\mathcal{P}$, og lad $0 \subseteq M$ være en åben delmængde. Hvis $\underline{x}: D \longrightarrow M$ er et kort i $\mathcal{P}$ bliver

$D' = \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap 0) \subseteq E^n$ en åben mængde. Det er let at se, at

$\mathcal{P}' = \{\underline{x}' \mid \underline{x}' = \underline{x}|D'\}$ definerer et del-atlas på 0, og derfor en differentiabel struktur på 0. Denne differentiable struktur på 0 kaldes den <u>inducerede struktur</u> fra M

Opgave 6. (I tilknytning til exempel 1.15).

Vis, at 2 fordragelige del-atlas på M giver anledning til 2 fordragelige del-atlas på 0. Vis, at det maximale atlas på M giver det maximale atlas på 0. Dette viser, at den inducerede differentiable struktur på 0 er velbestemt.

Exempel 1.16. Lad L(n,m) være mængden af reelle m×n-matricer. Betragt afbildningen

$$\underline{x}: E^{m \cdot n} \longrightarrow L(m,n)$$

defineret ved, at

$$\underline{x}(a_{11},\dots,a_{1n},a_{21},\dots,a_{2n},\dots,a_{m1},\dots,a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underline{x}$ er 1-1-tydig og på. Derfor definerer $\underline{x}$ et del-atlas på M. Dette del-atlas giver L(m,n) struktur som en m·n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Opgave 7. Lad V og W være henholdsvis et n-dimensionalt og et m-dimensionalt vektorrum. Lad $L(V,W)$ være mængden af lineære afbildninger fra V til W. Vis, at $L(V,W)$ har en entydig bestemt (naturlig) differentiabel struktur. Man tænker sig altid $L(V,W)$ som $m\cdot n$-dimensional differentiabel mangfoldighed med denne struktur.

Opgave 8. Lad $Gl(n)$ være mængden af invertible $n\times n$-matricer. Vis, at $Gl(n)$ er en n^2-dimensional differentiabel mangfoldighed på naturlig måde. (Betragt determinant afbildningen $\det : L(n,n) \longrightarrow E^1$ og brug exemplerne 1.15 og 1.16). Hvis V er et n-dimensionalt vektorrum betegner $GL(V)$ mængden af automorfier i V. Vis, at $GL(V)$ har en (naturlig) entydig bestemt differentiabel struktur.

Opgave 9. Lad $L(n,m;k)$ betegne mængden af $m\times n$-matricer af rang k. Vis, at $L(n,m;k)$ er en $k\cdot(m+n-k)$-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Exempel 1.17. Lad M^n og N^m være differentiable mangfoldigheder af dimension henholdsvis n og m.

Hvis $\mathcal{P}_M = \{x_M\}$ og $\mathcal{P}_N = \{x_N\}$ er del-atlas for de differentiable strukturer på henholdsvis M og N, betragter vi mængden $\mathcal{P}_{M\times N} = \{x_M \times x_N \,|\, x_M \in \mathcal{P}_M,\ x_N \in \mathcal{P}_N\}$, hvor

$$x_M \times x_N : D_M \times D_N \longrightarrow M \times N$$

er defineret ved fastsættelsen

$$\forall (\underline{u},\underline{v}) \in D_M \times D_N : x_M \times x_N(\underline{u},\underline{v}) = (x_M(\underline{u}),\ x_N(\underline{v}))$$

Det er klart, at $x_M \times x_N$ bliver et $(n+m)$-dimensionalt lokalt koordinatsystem på $M\times N$. Man efterviser endvidere let, at $\mathcal{P}_{M\times N}$ bliver et del-atlas på $M\times N$.

Hvis $\mathcal{P}_M$ og $\mathcal{P}'_M$ er fordragelige del-atlas på M og $\mathcal{P}_N$ og $\mathcal{P}'_N$ er fordragelige del-atlas på N, indser man let, at $\mathcal{P}_{M\times N}$ og $\mathcal{P}'_{M\times N}$ bliver fordragelige del-atlas på $M\times N$. Del-atlassene $\mathcal{P}_{M\times N}$ fastlægger derfor en differentiabel struktur på $M\times N$. Denne struktur kaldes produktstrukturen.

$M\times N$ opfattes altid som differentiabel mangfoldighed med produktstrukturen som differentiabel struktur.

Opgave 10. Vis, at topologien på $M\times N$ svarende til produktstrukturen netop er produkttopologien.

§ 2. Tangentrummene for en differentiabel mangfoldighed.

Lad i det følgende M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Inden vi kan definere tangentrummet i et punkt af M, må vi først definere visse differentiable afbildninger.

Definition 2.1. Lad $O \subseteq M$ være en åben delmængde af M. En reel afbildning $f: O \to E^1$ siges at være differentiabel, hvis det for ethvert kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ i atlasset for den differentiable struktur på M med $\underline{x}(D) \cap O \neq \emptyset$ gælder, at afbildningen

$$f\underline{x} : \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap O) \to E^1$$

er differentiabel i sædvanlig euklidisk forstand.

Definition 2.2. Lad $O \subseteq E^m$ være en åben delmængde af E^m. En kontinuert afbildning $F: O \to M$ siges at være differentiabel, hvis det for ethvert kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ i atlasset for den differentiable struktur på M med $\underline{x}(D) \cap F(O) \neq \emptyset$ gælder, at afbildningen

$$\underline{x}^{-1}F \cdot F^{-1}(\underline{x}(D)) \to E^n$$

er differentiabel i sædvanlig euklidisk forstand.

Bemærkning. Når F i definition 2.2 forudsættes kontinuert bliver $F^{-1}(\underline{x}(D))$ automatisk åben i E^m.

Bemærkning. I definitionerne 2.1 og 2.2 behøver vi blot at tage tilstrækkelig mange kort til at overdække M.

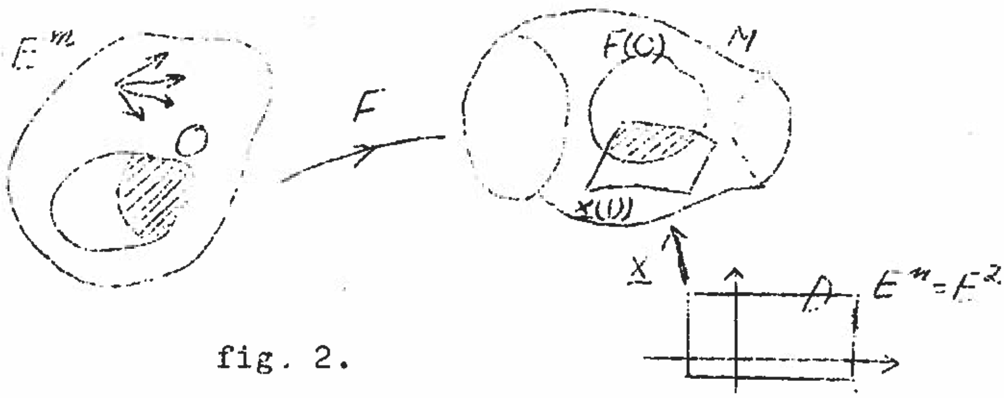


fig. 2.

Definition 2.2 giver specielt definitionen af en differentiabel kurve på M.

Lemma 2.3. Hvis $\alpha: J \subseteq E^1 \to M$ er en differentiabel kurve på M, som helt fortløber i billedet af et enkelt kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ på M, findes n entydigt bestemte reelle differentiable afbildninger $a_1, \ldots, a_n$ defineret på J, således at $(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in D$ $\forall t \in J$, og således at $\alpha(t) = \underline{x}(a_1(t), \ldots, a_n(t))$ $\forall t \in J$.

Bevis. Funktionerne $a_1,\ldots,a_n$ må nødvendigvis defineres ved fastsættelsen:

$$(a_1(t),\ldots,a_n(t)) = \underline{x}^{-1}\alpha(t) \qquad \forall t \in J.$$

At a_i'erne derved bliver differentiable afbildninger følger af, at α er en differentiabel kurve.

Vi vil nu først given en definition af en tangentvektor i et punkt af M, som næsten direkte kopierer definitionen af en tangentvektor til en flade i E^3. I sidstnævnte situation definerede vi en tangentvektor på fladen til at være en tangentvektor i E^3, der kunne opnås som hastighedsvektor på en kurve i fladen. Når talen er om en vilkårlig mangfoldighed, kan tangentvektorer ikke mere opfattes som sædvanlige vektorer i et omgivende euklidisk rum, men vi har stadig muligheden for direkte at lade kurver definere begrebet tangentvektor. Dette vil vi nu præcisere.

Notation. Lad J_ε og J_δ etc. betegne de åbne intervaller $]-\varepsilon,\varepsilon[$ og $]-\delta,\delta[$ etc.

Definition 2.4. Lad $p \in M$. To kurver $\alpha: J_\varepsilon \to M$ og $\beta: J_\delta \to M$ med $\alpha(0) = \beta(0) = p$ kaldes tangentielle i p, hvis det for ethvert kort $\underline{x}\colon D \subseteq E^n \to M$ på M med $p \in \underline{x}(D)$ gælder, at

$$\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)\,(0) = \frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\beta)\,(0).$$

Bemærkning. Hvis vi blot har ligningen i definition 2.4 opfyldt for et enkelt kort $\underline{x}$ omkring p, har vi den for et vilkårligt kort $\underline{y}$ omkring p, thi

$$\frac{d}{dt}(\underline{y}^{-1}\alpha)(0) = d(\underline{y}^{-1}\underline{x})\left(\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0)\right) = d(\underline{y}^{-1}\underline{x})\left(\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\beta)(0)\right) = \frac{d}{dt}(\underline{y}^{-1}\beta)(0)$$

hvor differentialet af $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ skal tages i punktet $\underline{x}^{-1}(p) \in D$.

Definition 2.4 udsiger blot, at 2 kurver er tangentielle, hvis de overført til et koordinatområde har samme tangent.

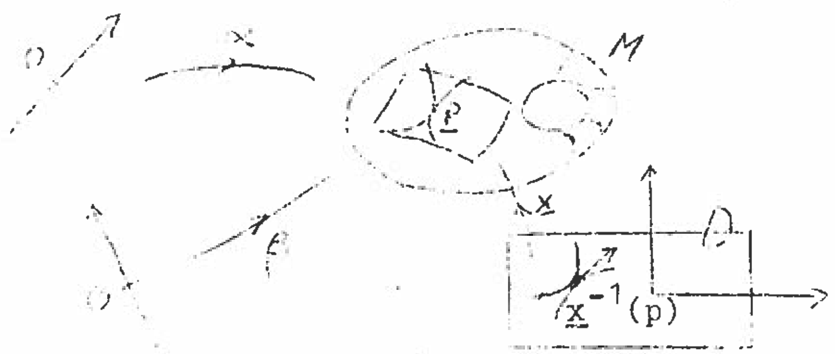


fig. 3

Lemma 2.5. Med ovenstående notation gælder, at relationen "tangentiel" mellem kurver gennem $\underline{p}$ er en ækvivalensrelation.

Beviset er trivielt.

Definition 2.6. En tangentvektor til M i $\underline{p} \in M$ er en ækvivalensklasse af tangentielle kurver i $\underline{p}$.

En tangentvektor i $\underline{p} \in M$ betegnes med $\underline{v}_p$, $\underline{w}_p$, X_p og Y_p etc.

Mængden af tangentvektorer i $\underline{p}$ udgør tangentrummet for M i $\underline{p}$, og betegnes med T_pM.

Vi vil nu vise, at T_pM kan gives struktur som et n-dimensionalt reelt vektorrum.

Dette vil vi gøre ved at udnytte vektorrumstrukturen i tangentrummene for E^n.

Lemma 2.7. For ethvert kort $\underline{x}$ på M omkring $p \in M$ findes en bijektion $T(\underline{x},p): T_pM \longrightarrow T_{\underline{x}^{-1}(p)}E^n$, således at følgende diagram er kommutativt for ethvert par af kort $\underline{x}$ og $\underline{y}$ omkring $\underline{p}$:

$$\begin{tikzcd} & T_pM \arrow[dl, "T(\underline{x},p)"'] \arrow[dr, "T(\underline{y},p)"] & \\ T_{\underline{x}^{-1}(p)}E^n \arrow[rr, "(\underline{y}^{-1}\underline{x})_*"'] & & T_{\underline{y}^{-1}(p)}E^n \end{tikzcd}$$

($(\underline{y}^{-1}\underline{x})_*$ er differentialet af afbildningen $\underline{y}^{-1}\underline{x}$)

Bevis. Lad $cls(\alpha)$ betegne ækvivalensklassen for kurven $\alpha: J_\varepsilon \longrightarrow M$ med $\alpha(0)=p$.

Hvis $\underline{v}_p \in T_pM$ er repræsenteret af α, definerer vi $T(\underline{x},p)$ ved fastsættelsen

$$T(\underline{x},p)(\underline{v}_p)=\left[\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0)\right]_{\underline{x}^{-1}(p)}$$

Definition 2.4 viser, at definitionen af $T(\underline{x},p)$ ikke afhænger af valget af repræsentantkurve for $\underline{v}_p$.

Lad nu $\underline{v}_p=cls(\alpha)$ og $\underline{w}_p=cls(\beta)$ med $\alpha: J_\varepsilon \longrightarrow M$ og $\beta: J_\delta \longrightarrow M$, og antag, at $T(\underline{x},p)(\underline{v}_p) = T(\underline{x},p)(\underline{w}_p)$. Dette betyder, at $\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0) = \frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\beta)(0)$, og derfor i følge bemærkningen efter definiton 2.4, at $\underline{v}_p=\underline{w}_p$. Derfor er $T(\underline{x},p)$ 1-1-tydig.

Hvis $(a_1,\dots,a_n)_{\underline{x}^{-1}(p)} \in T_{\underline{x}^{-1}(p)} E^n$, definerer vi kurven

$\alpha(t) = \underline{x}(\underline{x}^{-1}(\underline{p}) + t\cdot(a_1,\dots,a_n))$ med $t \in J_\varepsilon$ for ε passende.

Sæt $\underline{v}_p = \mathrm{cls}(\alpha)$. Så får vi straks, at $T(\underline{x},p)(\underline{v}_p) = (a_1,\dots,a_n)_{\underline{x}^{-1}(p)}$. Derfor er $T(\underline{x},p)$ på.

Dermed har vi vist, at $T(\underline{x},p)$ er en bijektion.

For at vise sidste del i lemma 2.7 betragter vi $\underline{v}_p = \mathrm{cls}(\alpha) \in T_pM$. Så får vi:

$$(\underline{y}^{-1}\underline{x})_* T(\underline{x},p)(\underline{v}_p) = (\underline{y}^{-1}\underline{x})_* \left(\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0)\right) = \frac{d}{dt}(\underline{y}^{-1}\alpha)(0) = T(\underline{y},p)(\underline{v}_p)$$

Dette viser, at det angivne diagram er kommutativt. Dermed er lemma 2.7 bevist.

<u>Sætning 2.8</u>. Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed, og lad T_pM være tangentrummet for M i $p \in M$. Så kan T_pM på entydig måde gives struktur som et n-dimensionalt reelt vektorrum, således at $T(\underline{x},p): T_pM \to T_{\underline{x}^{-1}(p)}E^n$ er en isomorfi for ethvert kort $\underline{x}$ omkring $\underline{p}$.

<u>Bevis</u>. Sætningen er en triviel følge af lemma 2.7.

Lad $\underline{x}$ være et kort omkring p. Hvis $\underline{v}_p, \underline{w}_p \in T_pM$ og $a,b \in E^1$, må vi nødvendigvis definere $a\underline{v}_p + b\underline{w}_p \in T_pM$, som det entydigt bestemte element, der tilfredsstiller ligningen:

$$T(\underline{x},p)(a\underline{v}_p + b\underline{w}_p) = aT(\underline{x},p)(\underline{v}_p) + bT(\underline{x},p)(\underline{w}_p)$$

Vi har brugt, at $T(\underline{x},p)$ er en bijektion.

Pr. definition har vi tvunget $T(\underline{x},p)$ til at være en isomorfi for et bestemt kort $\underline{x}$ omkring $\underline{p}$. Lad nu $\underline{y}$ være et vilkårligt kort omkring $\underline{p}$. Da $(\underline{y}^{-1}\underline{x})_*$ er en lineær afbildning, får vi så:

$$(\underline{y}^{-1}\underline{x})_* T(\underline{x},p)(a\underline{v}_p + b\underline{w}_p) = a(\underline{y}^{-1}\underline{x})_* T(\underline{x},p)(\underline{v}_p) + b(\underline{y}^{-1}\underline{x})_* T(\underline{x},p)(\underline{w}_p).$$

Kommutativiteten af diagrammet i lemma 2.7 giver nu:

$$T(\underline{y},p)(a\underline{v}_p + b\underline{w}_p) = aT(\underline{y},p)(\underline{v}_p) + bT(\underline{y},p)(\underline{w}_p).$$

Dette viser, at $T(\underline{y},p)$ er en isomorfi. Dermed følger også, at strukturen på T_pM er uafhængig af valget af kort i definitionen af strukturen. Sætning 2.8 er bevist.

<u>Opgave 1</u>. Lad $p \in M$ som ovenfor. Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ er et kort omkring p med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og $\underline{x}(u_1^0,\dots,u_n^0) = \underline{p}$, definerer vi kurverne $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Ved fastsættelsen:

$$\alpha_i(t) = \underline{x}(u_1^o,\dots,u_i^o+t,\dots,u_n^o) \quad \text{for} \quad t \in J_\varepsilon \ , \quad \text{hvor} \quad \varepsilon \quad \text{må}$$

vælges så $(u_1^o,\dots,u_i^o+t,\dots,u_n^o) \in D$. Disse kurver kaldes <u>parameterkurver</u>. Vis, at tangentvektorerne $\underline{x}_{u_1} = \mathrm{cls}(\alpha_1),\dots,\underline{x}_{u_n} = \mathrm{cls}(\alpha_n)$ er en basis i T_pM.

Opgave 2. Lad $\underline{x}$ være et kort omkring $\underline{p} \in M$, og lad $\alpha(t) = x(a_1(t),\dots,a_n(t))$ $t \in J_\varepsilon$ og $\beta(t) = \underline{x}(b_1(t),\dots,b_n(t))$ $t \in J_\sigma$ repræsentere henholdsvis tangentvektorerne $\underline{v}_p$ og $\underline{w}_p$ i p. Antag, at $\underline{x}(u_1^o,\dots,u_u^o) = \underline{p}$. Vis, at kurven

$$\gamma(t) = \underline{x}(a_1(at)+b_1(bt)-u_1^o,\dots,a_n(at)+b_n(bt)-u_n^o)$$

repræsenterer tangentvektoren $a\underline{v}_p + b\underline{w}_p$ i $\underline{p}$.

I mange situationer er det gavnligt at have en anden beskrivelse af en tangentvektor. Den beskrivelse, vi søger, knytter en tangentvektor sammen med begrebet retningsafledet.

Notation. Hvis M er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed, og $\underline{p} \in M$, skal $F(M,\underline{p})$ betegne mængden af differentiable reelle afbildninger, der har en åben omegn af $\underline{p}$ som definitionsmængde. Hvis $f:U \to E^1$ og $g:V \to E^1$ er afbildninger i $F(M,\underline{p})$ og $a,b \in E^1$, definerer vi afbildningerne

$$af+bg : U \cap V \to E^1 \quad \text{og}$$
$$f\cdot g : U \cap V \to E^1$$

ved fastsættelsen $(af+bg)(x) = af(x)+bg(x)$ og $(f.g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $\forall x \in U \cap V$.

Det er klart, at $af+bg$ og $f\cdot g$ igen er afbildninger i $F(M,\underline{p})$

Lad nu $\underline{v}_p \in T_pM$ være en tangentvektor til M i $\underline{p} \in M$.

Hvis $\underline{x}$ er et vilkårligt koordinatsystem omkring $\underline{p}$, kan vi definere en afbildning $F(M,p) \to E^1$ ved fastsættelsen:

$$f \in F(M,\underline{p}) \to t_{f(p)}^{-1}(f\underline{x})_{*x^{-1}(p)}(T(\underline{x},p)(\underline{v}_p)).$$

For et vilkårligt andet koordinatsystem $\underline{y}$ omkring p gælder at:

$$t_{f(p)}^{-1}(f\underline{y})_{*y^{-1}(p)}(T(\underline{y},p)(\underline{v}_p)) = t_{f(p)}^{-1}(f\underline{y})_{*y^{-1}(p)}(d(\underline{y}^{-1}\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}T(\underline{x},p)(\underline{v}_p))$$

$$= t_{f(p)}^{-1}(f\underline{x})_{*\underline{x}^{-1}(p)}(T(\underline{x},p)(\underline{v}_p)) \ .$$

Vi har her benyttet lemma 2.7 og kædereglen.

Denne sidste ligning viser, at afbildningen $F(M,\underline{p}) \longrightarrow E^1$ ikke afhænger af koordinatsystemet, som indgår i definitionen.

Vi vil også bruge betegnelsen $\underline{v}_p$, for $\underline{v}_p$ opfattet som afbildning på denne måde. $\underline{v}_p$'s værdi på $f \in F(M,\underline{p})$, vil vi betegne med $\underline{v}_p[\,f\,]$.

Hvis $\underline{v}_p$ er repræsenteret af kurven $\alpha : J_\varepsilon \longrightarrow M$, finder vi for $f \in F(M,\underline{p})$:

$$\underline{v}_p[f] = t^{-1}_{f(p)}(f\underline{x})_{*\underline{x}^{-1}(p)}\,(T(\underline{x},p)(\underline{v}_p)) = t^{-1}_{f(p)}(f\underline{x})_{*\underline{x}^{-1}(p)}\left(\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(f\alpha)(0).$$

Dette vigtige udtryk for $\underline{v}_p[f]$ viser, at der er tale om en generalisering af begrebet retningsafledet af f i $\underline{v}_p$'s retning.

Lemma 2.9. For enhver tangentvektor $\underline{v}_p \in T_pM$ har afbildningen $\underline{v}_p : F(M,\underline{p}) \longrightarrow E^1$ følgende egenskaber:

1. $\underline{v}_p[af+bg] = a\underline{v}_p[f] + b\underline{v}_p[g] \qquad \forall f,g \in F(M,\underline{p}),\ \forall\ a,b \in E^1$

2. $\underline{v}_p[f\cdot g] = \underline{v}_p[f]g(\underline{p}) + f(\underline{p})\underline{v}_p[g] \qquad \forall f,g \in F(M,\underline{p}).$

Bevis. Lad $\alpha : J_\varepsilon \longrightarrow M$ med $\alpha(0) = \underline{p}$ repræsentere $\underline{v}_p \in T_pM$. Så finder vi:

$$\underline{v}_p[af+bg] = \frac{d}{dt}((af+bg)\alpha)(0) = a\frac{d}{dt}(f\alpha)(0) + b\frac{d}{dt}(g\alpha)(0)$$

$$= a\underline{v}_p[f] + b\underline{v}_p[g].$$

Tilsvarende fås:

$$\underline{v}_p[f\cdot g] = \frac{d}{dt}((f\cdot g)\alpha)(0) = \frac{d}{dt}((f\alpha)\cdot(g\alpha))(0)$$

$$= \frac{d}{dt}(f\alpha)(0)\cdot(g\alpha)(0) + (f\alpha)(0)\cdot\frac{d}{dt}(g\alpha)(0)$$

$$= \underline{v}_p[f]\cdot g(\underline{p}) + f(\underline{p})\cdot\underline{v}_p[g].$$

Dermed er lemma 2.9 bevist.

Indtil nu vil alt, hvad vi har sagt, fungere blot vi kræver differentiabilitet af klasse C^1. I det følgende vil vi vise, at egenskaberne 1 og 2 i lemma 2.9 fuldstændigt karakteriserer en tangentvektor. Her bliver det imidlertid nødvendigt at forudsætte differentiabilitet af klasse C^∞. For ikke altid at skulle specificere differentiabilitetsgraden minder vi om vores <u>generelle antagelse</u>:

<u>Differentiabilitet er altid af klasse C^∞</u>.

<u>Bemærkning</u>. Når man har differentiabilitet af klasse C^∞ bruges ofte ordet glat (smooth). Man taler så om en glat mangfoldighed (smooth manifold), en glat funktion (smooth function) etc.

Vi starter med et lemma om reelle funktioner.

<u>Lemma 2.1o</u>. Lad $V \subseteq E^n$ være en åben, konveks mængde, og lad $\underline{c} \in V$. Hvis $f: V \to E^1$ er en glat, reel afbildning, findes der n glatte, reelle afbildninger $f_1, \dots, f_n$ defineret på V, således at:

$$f(u_1,\dots,u_n)-f(c_1,\dots,c_n)=\sum_{i=1}^{n}(u_i-c_i)f_i(u_1,\dots,u_n)$$

for $(u_1,\dots,u_n) \in V$.

$$f_i(c_1,\dots,c_n)=\frac{\partial f}{\partial u_i}(c_1,\dots,c_n) \quad \text{for } i=1,\dots,n.$$

<u>Bevis</u>. Betragt følgende integral:

$$f(u_1,\dots,u_n)-f(c_1,\dots,c_n)=\int_0^1 \frac{d}{dt}f(c_1+t(u_1-c_1),\dots,c_n+t(u_n-c_n))dt$$

Benyttes kæderegelen på integranten fremkommer følgende funktioner:

$$f_i(u_1,\dots,u_n)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1+t(u_1-c_1),\dots,c_n+t(u_n-c_n))dt.$$

Standard sætninger fra analysen viser, at f_i'erne er glatte afbildninger defineret på V.

Den første integralformel får følgende udseende, når f_i'erne indføres:

$$f(u_1,\dots,u_n)-f(c_1,\dots,c_n)=\sum_{i=1}^{n}(u_i-c_i)f_i(u_1,\dots,u_n).$$

Dette er den søgte formel. Ved at udregne $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ i v. hj. a denne formel, og se på værdien i $(c_1,\dots,c_n)$, fås umiddelbart:

$$f_i(c_1,\dots,c_n)=\frac{\partial f}{\partial u^i}(c_1,\dots,c_n).$$

Dermed er lemma 2.1o bevist.

<u>Definition 2.11</u>. Ved en derivation i $F(M,\underline{p})$ forstås en afbildning $X_p: F(M,\underline{p}) \to E^1$, som opfylder:

<u>1.</u> $X_p[af+bg]=aX_p[f]+bX_p[g] \quad \forall f,g \in F(M,\underline{p}) \quad \forall a,b \in E^1$

<u>2.</u> $X_p[f\cdot g]=X_p[f]\cdot g(\underline{p})+f(\underline{p})X_p[g] \quad \forall f,g \in F(M,\underline{p})$.

Bemærkning. I følge lemma 2.9 er $\underline{v}_p \in T_pM$ opfattet som afbildning $\underline{v}_p : F(M,\underline{p}) \longrightarrow E^1$ en derivation i $F(M,\underline{p})$.

Lemma 2.12. Hvis X_p og Y_p er derivationer i $F(M,\underline{p})$ og $a,b \in E^1$, vil aX_p+bY_p defineret ved punktvis addition af funktionsværdier være en derivation i $F(M,\underline{p})$. Mængden af derivationer er derfor et vektorrum. Hvis $\underline{v}_p, \underline{w}_p \in T_pM$ stemmer additionen $a\underline{v}_p+b\underline{w}_p$ i T_pM overens med additonen som derivation.

Bevis. At aX_p+bY_p defineret ved fastsættelsen:

$$(aX_p+bY_p)[f]=aX_p[f]+bY_p[f] \qquad \forall f \in F(M,\underline{p}),$$

er en derivation, fås ved direkte kontrol af 1 og 2 i definition 2.11.

Hvis $\underline{v}_p, \underline{w}_p \in T_pM$ er $a\underline{v}_p+b\underline{w}_p$ en veldefineret tangentvektor i T_pM, som giver anledning til følgende derivation:

$$(a\underline{v}_p+b\underline{w}_p)\ [f]= t^{-1}_{f(p)}(f\underline{x})_{*_{\underline{x}^{-1}(p)}}(T(\underline{x},p)(a\underline{v}_p+b\underline{w}_p)),$$

hvor $\underline{x}$ er et vilkårligt koordinatsystem omkring $\underline{p}$.

Benyttes lineariteten af $T(\underline{x},p)$ og $d(f\underline{x})$ får vi:

$$(a\underline{v}_p+b\underline{w}_p)[f]= a\underline{v}_p[f]+b\underline{w}_p[f].$$

Dette beviser sidste påstand i lemma 2.12.

Lemma 2.13. Lad X_p være en derivation i $F(M,\underline{p})$. Hvis $f:U \to E^1$ og $g:V \to E^1$ tilhører $F(M,\underline{p})$ og $f|U\cap V= g|U\cap V$ gælder, at $X_p[f]=X_p[g]$.

Bevis. Lad $h:M \to E^1$ have den konstante værdi 1. Så finder vi:

$$X_p(h)= X_p(h\cdot h)=X_p(h)\cdot h(p)+h(p)X_p(h)=2X_p(h).$$

Altså er $X_p(h)=0$. Da X_p er lineær, finder vi så, at $X_p=0$ på en vilkårlig konstant funktion.

Da $f-g$ er konstant på $U\cap V$, får vi: $0=X_p(f-g)=X_p(f)-X_p(g)$.

Dette er netop konklusionen i lemma 2.13.

Hvis $\underline{x}:D\subseteq E^n \to M$ er et lokalt koordinatsystem på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n)\in D$, kan vi betragte tangentvektorerne $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ i punkterne af $\underline{x}(D)$. Disse udgør en basis i tangentrummene (se opgave 1 i § 2). Som derivation virker $\underline{x}_{u_i}$ yderst simpel:

$$\underline{x}_{u_i}\ [f] = \frac{\partial}{\partial u_i}(f\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)} \qquad \forall f \in F(M,\underline{p}).$$

Opgave 3. Vis under benyttelse af lemma 2.12 direkte, at $\underline{x}_{u_1},\ldots \underline{x}_{u_n}$ er lineært uafhængige i ethvert punkt af $\underline{x}(D)$.

Lemma 2.14. Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ er et lokalt koordinatsystem på M som ovenfor, kan enhver derivation i $F(M,\underline{p})$ på en og kun en måde skrives som en linearkombination af tangentvektorerne $\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n}$ i $\underline{p}$ opfattet som derivationer i $F(M,\underline{p})$.

Bevis. Lad X_p være en derivation i $F(M,\underline{p})$.

Hvis $f \in F(M,\underline{p})$, kan vi, når $X_p[f]$ skal beregnes, uden indskrænkning antage, at f er defineret på en mængde $U \subseteq \underline{x}(D)$, så $\underline{x}^{-1}(U)$ er konveks (f.eks. en kugle).

Til denne konklusion benyttes lemma 2.13.

Hvis $f \in F(M,\underline{p})$ er givet med disse egenskaber, kan vi benytte lemma 2.1o på funktionen $f\underline{x}: \underline{x}^{-1}(U) \to E^1$ i punktet $\underline{x}^{-1}(\underline{p})=(c_1,\ldots,c_n)$. Dette giver:

$$f\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)-f(\underline{p})= \sum_{i=1}^{n} (u_i-c_i)f_i(u_1,\ldots,u_n)$$

hvor f_i er glatte funktioner på $\underline{x}^{-1}(U)$.

Da $\underline{x}$ er 1-1-tydig kan vi definere funktionerne $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ på U ved fastsættelsen:

$$\varphi_i(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n))=u_i-c_i \quad \text{for} \quad (u_1,\ldots,u_n)\in \underline{x}^{-1}(U).$$

Lad os ligeledes betragte funktionen φ på U med konstant værdi $f(p)$.

Så får vi:

$$f=\varphi + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\cdot(f_i\underline{x}^{-1}) \quad \text{på} \quad U.$$

Alle afbildningerne φ, φ_i og $f_i\underline{x}^{-1}$ tilhører $F(M,\underline{p})$ (hvorfor?). Derfor fås:

$$X_p[f]=X_p[\varphi]+\sum_{i=1}^{n}\left\{ X_p[\varphi_i]f_i(\underline{x}^{-1}(\underline{p}))+ \varphi_i(\underline{p})X_p[f_i\underline{x}^{-1}]\right\}$$

I beviset for lemma 2.13 så vi, at $X_p[\varphi]=0$. Endvidere finder vi, at $\varphi_i(\underline{p})= \varphi_i(\underline{x}(c_1,\ldots,c_n))=0$.

I følge lemma 2.1o er:

$$f_i\underline{x}^{-1}(\underline{p})=f_i(c_1,\ldots,c_n)= \frac{\partial}{\partial u_i}(f\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}=\underline{x}_{u_i}[f].$$

Dermed har vi:

$$X_p[f]=\sum_{i=1}^{n}X_p[\varphi_i]\underline{x}_{u_i}[f]= \left(\sum_{i=1}^{n}X_p[\varphi_i]\underline{x}_{u_i}\right)[f].$$

Da $X_p[\varphi_i]$ er et reelt tal, som ikke afhænger af $f\in F(M,\underline{p})$, ser vi:

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p[\varphi_i]\underline{x}_{u_i}.$$

Dette er den søgte linearkombination. Hvis X_p også kunne skrives på formen $X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i\underline{x}_{u_i}$, ville

$X_p[\varphi_j] = \sum_{i=1}^{n} a_i\underline{x}_{u_i}[\varphi_j] = a_j$. Derfor er linearkombinationen entydig.

Dermed er lemma 2.14 bevist.

En af konsekvenserne af lemma 2.14 er, at enhver derivation i $F(M,\underline{p})$ på entydig måde kan identificeres med en tangentvektor i T_pM opfattet som derivation.

Kombinerer vi lemma 2.12 og lemma 2.14, opnår vi derfor følgende vigtige karakterisering af T_pM.

Sætning 2.15. Lad M være en n-dimensional glat mangfoldighed, og lad $\underline{p}\in M$. Tangentrummet T_pM kan som vektorrum identificeres med vektorrummet af derivationer i $F(M,\underline{p})$. Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et lokalt koordinatsystem omkring $\underline{p}$, er tangentvektorerne (eller derivationerne) $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ en basis i T_pM.

Opgave 4. Find i et lokalt koordinatsystem $\underline{x}$ omkring $\underline{p}\in M$ en kurve, der repræsenterer den tangentvektor, som svarer til derivationen X_p i $F(M,\underline{p})$.

§ 3. Differentiable afbildninger.

Lad M^n og N^k være differentiable mangfoldigheder af dimension henholdsvis n og k. For at minde om dimensionen tilføjes den ofte til mangfoldigheden som angivet.

Definition 3.1. En kontinuert afbildning $F:M^n \longrightarrow N^k$ kaldes differentiabel, hvis det for ethvert par af kort $\underline{x}:D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M og $\underline{y}:E \subseteq E^k \longrightarrow N$ på N med $\underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E))) \neq \emptyset$ gælder, at afbildningen

$$\underline{y}^{-1}F\underline{x}:\underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E))) \longrightarrow E \subseteq E^k$$

er differentiabel i sædvanlig euklidisk forstand.

Bemærkning. Hvis F kun er defineret på en åben delmængde af M defineres differentiabilitet af F tilsvarende. Vi kan ligeledes definere differentiabilitet af F i et punkt af M.

Opgave 1. Vis, at en kontinuert afbildning $F:M^n \longrightarrow N^k$ er differentiabel, hvis og kun hvis det for enhver reel differentiabel afbildning $f:O \subseteq N \longrightarrow E^1$ med $F^{-1}(O) \neq \emptyset$ gælder, at $fF:F^{-1}(O) \longrightarrow E^1$ er en reel differentiabel afbildning.

Opgave 2. Lad Σ^n være sfæren med radius 1 og centrum $(o,\dots,o,1) \in E^{n+1}$. Generaliser stereografisk projektion og opnå en afbildning $P:\Sigma^n-(o,\dots,o,2) \longrightarrow E^n$. Vis, at P er differentiabel.

Sætning 3.2. Hvis $F:M^n \longrightarrow N^k$ og $G:N^k \longrightarrow L^m$ er differentiable afbildninger mellem differentiable mangfoldigheder, er $GF:M \longrightarrow L$ en differentiabel afbildning.

Den identiske afbildning $1_M:M^n \longrightarrow M^n$ er differentiabel.

Opgave 3. Bevis sætning 3.2.

Til en differentiabel afbildning $F:M^n \longrightarrow N^k$ ønsker vi nu at knytte en lineær afbildning $F_{*p}:T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ for ethvert $p \in M$. Samlingen af disse afbildninger vil vi kalde differentialet af F, tangentialafbildningen hørende til F eller den inducerede afbildning af F.

Følgende lemma sikrer os existensen af F_{*p}.

Lemma 3.3. Når $\underline{x},\tilde{\underline{x}}$ er kort på M^n omkring $p \in M^n$, og $\underline{y}$, $\tilde{\underline{y}}$ er kort på N^k omkring $q=F(p) \in N^k$, er følgende diagram kommutativt:

$$
\begin{tikzcd}
 & T_{\underline{x}^{-1}(p)}E^n \arrow[rr, "d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}"] \arrow[d, "d(\tilde{\underline{x}}^{-1}\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}"] & & T_{\underline{y}^{-1}(q)}E^k \arrow[d, "d(\tilde{\underline{y}}^{-1}\underline{y})_{\underline{y}^{-1}(q)}"] & \\
T_pM \arrow[ur, "T(\underline{x},\underline{p})"] \arrow[dr, "T(\tilde{\underline{x}},\underline{p})"'] & & & & T_{\underline{q}}N \arrow[ul, "T(\underline{y},\underline{q})"'] \arrow[dl, "T(\tilde{\underline{y}},\underline{q})"] \\
 & T_{\tilde{\underline{x}}^{-1}(p)}E^n \arrow[rr, "d(\tilde{\underline{y}}^{-1}F\tilde{\underline{x}})_{\tilde{\underline{x}}^{-1}(p)}"'] & & T_{\tilde{\underline{y}}^{-1}(\underline{q})}E^k &
\end{tikzcd}
$$

<u>Bemærkning</u>. At et diagram er kommutativt, er et kort udtryk for følgende: Hvis man ved at følge pilens retning kan gå fra et objekt til et andet af to forskellige veje, er de sammensætninger af funktioner, som vejene angiver, ens.

<u>Bevis for 3.3</u>. Diagrammet deler sig naturligt i 3 deldiagrammer. At de 2 "trekanter" kommuterer følger af lemma 2.7. . At "kvadratet" kommuterer, følger ved en simpel anvendelse af kædereglen. Disse observationer beviser lemma 3.3.

<u>Lemma 3.4</u>. Med ovenstående notation findes én og kun én lineær afbildning $F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$, således at følgende diagram er kommutativt for ethvert par af kort $\underline{x}$ omkring $p \in M$ og $\underline{y}$ omkring $F(\underline{p}) \in N$:

$$
\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "F_{*p}"] \arrow[d, "T(\underline{x},\underline{p})"'] & T_{F(p)}N \arrow[d, "T(\underline{y},F(\underline{p}))"] \\
T_{\underline{x}^{-1}(p)}E^n \arrow[r, "d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{x^{-1}(\underline{p})}"'] & T_{\underline{y}^{-1}(F(p))}E^k
\end{tikzcd}
$$

Bevis. Vektorrumsstrukturen på T_pM og $T_{F(p)}N$ definerede vi ved kravet om, at bijektionerne $T(\underline{x},\underline{p})$ og $T(\underline{y},F(\underline{p}))$ skulle være isomorfier.

Hvis vi vælger kort $\underline{x}$ og $\underline{y}$ omkring henholdsvis $\underline{p}$ og $F(\underline{p})$ er vi derfor tvunget til at definere F_{*p} som følgende sammensætning af lineære afbildninger:

$$F_{*p}=T(\underline{y},F(\underline{p}))^{-1} \circ d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(\underline{p})} \circ T(\underline{x},\underline{p}).$$

Det er en konsekvens af lemma 3.3, at den lineære afbildning F_{*p}, vi har defineret, ikke afhænger af valget af de kort, der indgår i definitionen (Hvorfor?). Dermed er lemma 3.4 bevist.

Lemma 3.4. definerer den lineære afbildning $F_{*p}:T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$.

Følgende sætning giver en geometrisk beskrivelse af F_{*p}.

Sætning 3.5. Lad $F:M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning, og lad $\underline{p}\in M$.

(i) Hvis $\underline{v}_p \in T_pM$ er repræsenteret af kurven $\alpha:J_\varepsilon \longrightarrow M$ er $F_{*p}(\underline{v}_p)$ repræsenteret af kurven $F\alpha: J_\varepsilon \longrightarrow N$

(ii) Hvis $\underline{v}_p \in T_pM$ virker $F_{*p}(\underline{v}_p)$ som derivation i $F(N,F(p))$ på følgende måde:

Når $f\in F(N,F(\underline{p}))$ er $F_{*p}(\underline{v}_p)\,[f] = \underline{v}_p\,[fF]$.

Bemærkning. Hvis $f:U \longrightarrow E^1$ tilhører $F(N,F(p))$, tilhører $fF:F^{-1}(U) \longrightarrow E^1$ $F(M,\underline{p})$.

Bevis for 3.5.

(i) Lad $\alpha:J_\varepsilon \longrightarrow M$ med $\alpha(0)=\underline{p}$ repræsentere $\underline{v}_p$.

Når vi følger lemma 3.4 får vi:

$$F_{*p}(\underline{v}_p) = T(\underline{y},F(\underline{p}))^{-1}\circ d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}\circ T(\underline{x},p)(\underline{v}_p)$$

$$=T(\underline{y},F(\underline{p}))^{-1} \circ d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)} \left(\frac{d}{dt}(\underline{x}^{-1}\alpha)(0)\right)$$

$$=T(\underline{y},F(\underline{p}))^{-1} \left(\frac{d}{dt}\underline{y}^{-1}(F\alpha)(0)\right)$$

Denne ligning viser netop, at kurven $F\alpha$ repræsenterer $F_{*p}(\underline{v}_p)$.

(ii) Lad igen $\alpha:J_\varepsilon \longrightarrow M$ repræsentere $\underline{v}_p \in T_pM$, og lad $f:U \longrightarrow E^1$ tilhøre $F(N,F(p))$.

Fra (i) ved vi, at $F\alpha$ repræsenterer $F_{*p}(\underline{v}_p)$.

Derfor får vi:

$$F_{*p}(\underline{v}_p)[f] = \frac{d}{dt}(f(F\alpha))(0) = \frac{d}{dt}((fF)\alpha)(0) = \underline{v}_p[fF].$$

Dermed er sætning 3.5 bevist.

Sætning 3.6. Hvis $F: M^n \longrightarrow N^k$ og $G: N^k \longrightarrow L^m$ er differentiable afbildninger, $1_M: M \longrightarrow M$ er den identiske afbildning og $p \in M$ gælder:

1. $(GF)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}$

2. $(1_M)_{*p} = 1_{T_pM}$

Bevis. Hvis man benytter sætning 3.5, er beviset trivielt.

Opgave 4. Bevis sætning 3.6.

Definition 3.7. En differentiabel afbildning $F: M^n \longrightarrow N^k$ kaldes en diffeomorfi, hvis der findes en differentiabel afbildning $G: N^k \longrightarrow M^n$, således at $GF = 1_M$ og $FG = 1_N$.

To mangfoldigheder M^n og N^k kaldes diffeomorfe, hvis der findes en diffeomorfi $F: M^n \longrightarrow N^k$.

Bemærkning. En diffeomorfi er i følge definition 3.7 en differentiabel afbildning, der har en differentiabel invers.

Sætning 3.8. Hvis M^n og N^k er diffeomorfe differentiable mangfoldigheder er $n=k$.

Bevis. Lad $F: M^n \longrightarrow N^k$ være en diffeomorfi med invers $G: N \longrightarrow M$, og betragt $p \in M$.

Da $GF = 1_M$ og $FG = 1_N$ giver sætning 3.6.:

$$G_{*F(p)} \circ F_{*p} = 1_{T_pM} \quad \text{og} \quad F_{*p} \circ G_{*F(p)} = 1_{T_{F(p)}N}.$$

Dette medfører, at $F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ er en isomorfi mellem et n-dimensionalt og et k-dimensionalt vektorrum. Derfor er $n=k$.

Bemærkning. Vi understreger, at konklusionen i sætning 3.8 er sand, hvis blot M og N er homeomorfe. Her er sætningen kendt som Brouwers sætning om invarians af område. Denne sætning er noget vanskeligere at bevise.

Opgave 5. Vis, at mangfoldighederne i opgave 5 i § 1 er diffeomorfe.

Definition 3.9. Hvis $F: M^n \longrightarrow N^k$ er differentiabel og $p \in M$, vil vi ved rangen af F i p forstå rangen af den lineære afbildning

$F_{*p}: T_pM \to T_{F(p)}N$. Rangen af F i $p \in M$ betegnes med rg_pF.

Bemærkning. Når $F: M^n \to N^k$ gælder altid, at

$rg_pF \leq \min(n,k)$.

Rangen af F i et punkt kan vi let bestemme v.hj.a. koordinatudtrykkene for F.

Sætning 3.10. Lad $F: M^n \to N^k$ være en differentiabel afbildning, og lad $p \in M$. Lad x være et kort på M omkring p, og y et kort på N omkring $F(p)$. Så gælder det, at $rg_pF = rg_{x^{-1}(p)}(y^{-1}Fx)$. Rangen af $y^{-1}Fx$ i $x^{-1}(p)$ kan bestemmes v.hj.a. Jacobiantmatricen for $y^{-1}Fx$ i $x^{-1}(p)$.

Bevis. Da $T(x,p)$ og $T(y,F(p))$, som indgår i definitionen af F_{*p} (lemma 3.4), er isomorfier, følger sætningen fra kendte regler om rangen af en sammensætning af lineære afbildninger.

Sætning 3.11. (I tilknytning til sætning 3.10)

rg_pF har som funktion af p følgende egenskab: Omkring ethvert punkt $p \in M$ findes en omegn U_p af p, således at $rg_uF \geq rg_pF$ for ethvert $u \in U_p$. Denne egenskab viser, at rg_pF er nedad halvkontinuert som funktion af p.

Mængden af punkter, hvor rangen af $F: M^n \to N^k$ netop er n, er en åben delmængde af M.

Opgave 6. Bevis sætning 3.11.

Opgave 7. Bestem funktionen rgF for følgende afbildninger $F: E^1 \to E^1$:

a) $F(x) = x^3$

b) $F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{4}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ved at lægge krav på den inducerede afbildning, kan vi udskille en klasse af differentiable afbildninger, som har særlig interesse i differential geometrien, nemlig immersioner (immersions). Disse afbildninger har særligt simple koordinatudtryk. De næste sætninger giver os disse udtryk.

Først citerer vi sætningen om inverse funktioner. Et bevis for denne sætning kan f.eks. findes i Rudin: "Principles of Mathematical Analysis" (thm. 9.17, p. 193.).

<u>Sætning 3.12</u>. Lad $O \subseteq E^n$ være en åben delmængde af E^n, og lad $F: O \to E^n$ være en differentiabel afbildning. Antag, at $rg_p F = n$ i et punkt $\underline{p} \in O$ (ækvivalent: dF_p er ikke-singulær). Så findes der åbne omegne U af $\underline{p}$ og V af $F(\underline{p})$, således at F afbilder U diffeomorft på V.

Kort, men rammende, kan sætning 3.12 formuleres således: Hvis dF_p har en invers, har F lokalt en invers.

Fra sætning 3.12 fås en række nyttige sætninger

<u>Sætning 3.13</u>. Lad $O \subseteq E^n$ være en åben delmængde af E^n så $\underline{o} \in O$, og lad $F: O \to E^k$ (med $n \leq k$) være en differentiabel afbildning, så $F(\underline{o}) = \underline{o}$ og $rg_{\underline{o}} F = n$. Så findes en diffeomorfi G mellem 2 åbne omegne af $\underline{o}$ i E^k, således at GF på en åben omegn U af $\underline{o} \in E^n$ har formen:

$$GF(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_n, o, \ldots, o) \qquad \forall\, (u_1, \ldots, u_n) \in U$$

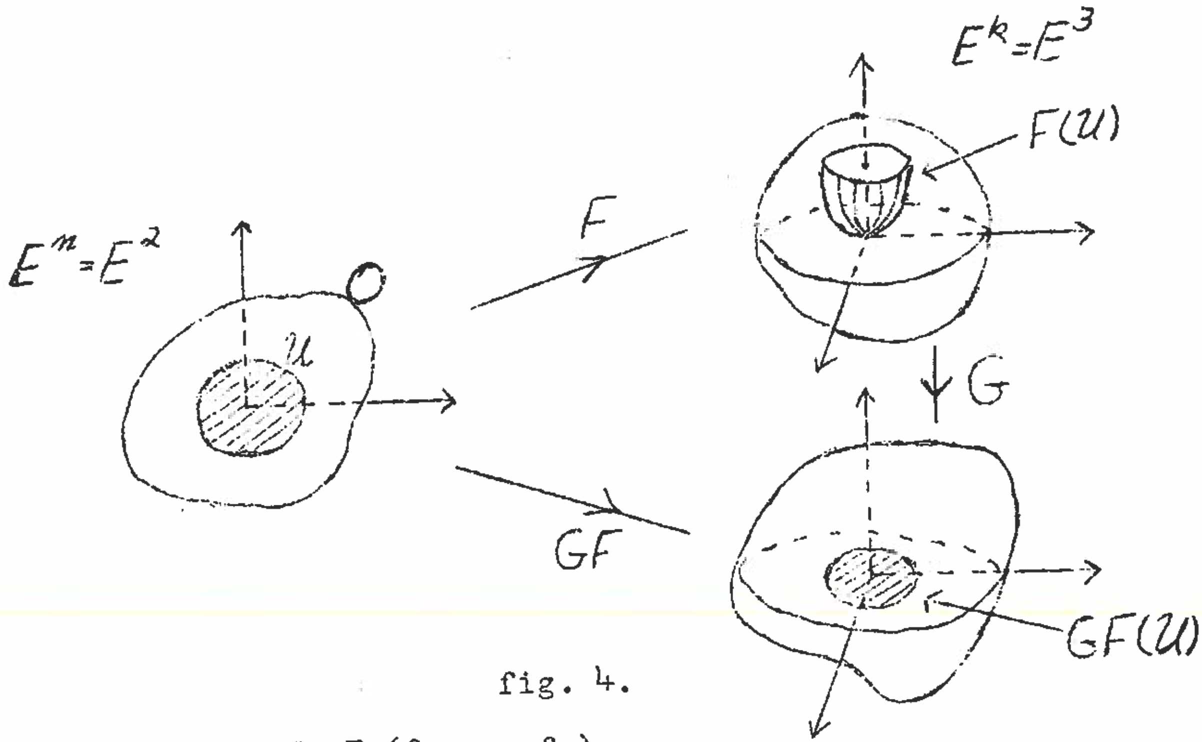


fig. 4.

<u>Bevis</u>. Lad $F = (f_1, \ldots, f_k)$.
F giver anledning til følgende Jacobiantmatrix:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_n} \end{Bmatrix}$$

Denne matrix har rang n i $\underline{o}$. Ved en permutation af rækkerne kan vi derfor opnå, at de første n rækker er lineært uafhængige. En permutation af koordinaterne i E^k er klart en diffeomorfi af E^k på sig selv. Ved at efterfølge F med en diffeomorfi i E^k(permutation af koordinater) kan vi således opnå en ny afbildning fra $\mathcal{O}$ ind i E^k, hvor de første n rækker i Jacobiantmatricen er lineært uafhængige. I sidste instans ønsker vi alligevel at rette på F med en diffeomorfi. Vi kan derfor uden indskrænkning fra starten antage, at $F=(f_1,\ldots,f_k)$ får rang n i $\underline{\mathcal{O}}$ ved, at $n\times n$ - matricen:

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

er ikke singulær i $\underline{O}$.

Lad $(x_1,\ldots,x_k)$ være koordinaterne i E^k. Sæt $\mathcal{O}' = \{(x_1,\ldots,x_k) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{O}\}$. $\mathcal{O}'$ er en åben delmængde af E^k. Betragt nu følgende afbildning $H:\mathcal{O}' \to E^k$ med koordinatfunktioner $h_1,\ldots,h_k$ defineret ved fastsættelsen:

$$h_i(x_1,\ldots,x_k) = f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad i=1,\ldots,n$$

$$h_i(x_1,\ldots,x_k) = x_i + f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad i=n+1,\ldots,k.$$

Da F er defineret på $\mathcal{O}$, kan vi virkelig definere H på $\mathcal{O}'$ ved denne ansats.

Jacobiantmatricen for H får følgende udseende:

$$\left\{\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline & & & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right\}$$

Den skraverede delmatrix indeholder elementerne $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ for $i=n+1,\ldots,k$, men er uinteressant.

Dette udtryk for Jacobiantmatricen af H viser, at rangen af H i $\underline{0}\in E^k$ er k.
Sætningen om inverse funktioner giver så, at H afbilder en omegn U' af $\underline{0}\in E^k$ diffeomorft på en omegn V' af $H(\underline{0})=\underline{0}\in E^k$.

Sæt nu $G=(H|U')^{-1}$ og $U=F^{-1}(V')\cap U'$.

For $(u_1,\ldots,u_n)\in U$ finder vi så:

$$F(u_1,\ldots,u_n)=(f_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,f_k(u_1,\ldots,u_n))$$
$$=H(u_1,\ldots,u_n,0,\ldots,0)$$

Altså:

$$GF(u_1,\ldots,u_n)=(u_1,\ldots,u_n,0,\ldots,0) \quad \text{på} \quad U.$$

Dermed er sætning 3.13 bevist.

<u>Sætning 3.14</u>. Lad $\mathcal{O}\subseteq E^n$ være en åben delmængde af E^n så $\underline{0}\in\mathcal{O}$, og lad $F:\mathcal{O}\to E^k$ (med $n\geq k$) være en differentiabel afbildning, så $F(\underline{0})=\underline{0}$ og $rg_{\underline{0}}F=k$. Så findes en diffeomorfi G mellem 2 åbne omegne af $\underline{0}$ i E^n, således at FG på en åben omegn U af $\underline{0}\in E^n$ har formen:

$$FG(u_1,\ldots,u_n)=(u_1,\ldots,u_k) \qquad \forall (u_1,\ldots,u_n)\in U.$$

<u>Bevis</u>. Ved evt. først at sammensætte F med en permutation af koordinaterne i E^n, som kun vil ændre på F med en diffeomorfi i E^n, indser vi, at vi uden indskrænkning fra starten kan antage, at $F=(f_1,\ldots,f_k)$ har rangen k i $\underline{0}\in E^n$ ved at matricen

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{matrix}\right\}$$

er ikke-singulær i $\underline{o}\in E^n$.

Betragt nu følgende afbildning $H:\mathcal{O} \longrightarrow E^n$ med koordinatfunktioner $h_1,\ldots,h_n$ defineret ved fastsættelsen:

$$h_i(x_1,\ldots,x_n)= f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{for} \quad i=1,\ldots,k$$

$$h_i(x_1,\ldots,x_n)= x_i \qquad \text{for} \quad i=k+1,\ldots,n.$$

Jacobiantmatricen for H får følgende udseende:

$$\left\{\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & & & \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right\}$$

Dette udtryk for Jacobiantmatricen af H viser, at rangen af H i $\underline{o}\in E^n$ er n.

Sætningen om inverse funktioner giver så, at H afbilder en åben omegn af $\underline{o}\in E^n$ diffeomorft på en åben omegn af $H(\underline{o})=\underline{o}\in E^n$.

Den inverse afbildning til H er den søgte diffeomorfi G.

G er defineret på en åben omegn U af $\underline{o}\in E^n$.

For $(u_1,\ldots,u_n)\in U$ fås nu:

$$G(u_1,\ldots,u_n)=(x_1,\ldots,x_n) \text{ med}$$

$$u_i=f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{for} \quad i=1,\ldots,k$$

$$u_i=x_i \qquad \text{for} \quad i=k+1,\ldots,n$$

Deraf følger:

$$FG(u_1,\dots,u_n)=(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$$
$$=(u_1,\dots,u_k) \qquad \text{på } U.$$

Dermed er sætning 3.14 bevist.

Opgave 8. Bevis følgende sætning:
Lad $\mathcal{O} \subseteq E^n$ være en åben delmængde af E^n så $\underline{o} \in \mathcal{O}$, og lad $F: \mathcal{O} \to E^k$ være en differentiabel afbildning, så $F(\underline{o})=\underline{o}$ og $rg_{\underline{p}}F=r \;\forall \underline{p} \in \mathcal{O}$. Så findes der diffeomorfier G og H af omegne af $\underline{o}$ i henholdsvis E^n og E^k, således at

$$HFG(u_1,\dots,u_n)=(u_1,\dots,u_r,0,\dots,0)$$

på en omegn U af $\underline{o} \in E^n$.

Vi kan nu definere immersioner.

Definition 3.15. En immersion er en differentiabel afbildning $F:M^n \to N^k$, der opfylder et af følgende ækvivalente krav:

i_1) $F_{*p}:T_pM \to T_{F(p)}N$ er 1-1-tydig $\forall \underline{p} \in M$.

i_2) $rg_{\underline{p}}F=n \quad \forall \underline{p} \in M$

i_3) For ethvert punkt $\underline{p} \in M$, findes der lokale koordinatsystemer $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ omkring $\underline{p}$, og $\underline{y}: E \subseteq E^k \to N$ omkring $F(\underline{p})$, således at F's koordinatydtryk $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ har formen:

$$\underline{y}^{-1}F\underline{x}(u_1,\dots,u_n) = (u_1,\dots,u_n,0,\dots,0)$$

hvor $(u_1,\dots,u_n)$ er koordinaterne i D.

Bevis for ækvivalensen af i_1, i_2 og i_3.

$i_1) \Leftrightarrow i_2)$ er trivielt

$i_2) \Rightarrow i_3)$ Betragt $\underline{p} \in M$ og lad først $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ og $\tilde{\underline{y}}: \tilde{E} \subseteq E^k \to N$ være vilkårlige koordinatsystemer omkring henholdsvis $\underline{p}$ og $F(\underline{p})$. Translationer i et euklidisk rum er klart diffeomorfier. Derfor kan vi frembringe nye kort i atlasset på en differentiabel mangfoldighed ved at flytte koordinatområdet for et kort rundt i det euklidiske rum v.hj.a. translationer. Disse bemærkninger viser, at vi uden indskrænkning kan antage, at

$$\underline{x}^{-1}(\underline{p}) = \underline{0} \in E^n \quad \text{og} \quad \tilde{\underline{y}}^{-1}(F(\underline{p})) = \underline{0} \in E^k.$$

Afbildningen $\tilde{\underline{y}}^{-1}F\underline{x}$ opfylder nu kravene i sætning 3.13, idet $rg_{\underline{o}}(\tilde{\underline{y}}^{-1}F\underline{x}) = \overline{rg}_{\underline{p}}F = n$ er givet. Der findes så en diffeomorfi $\underline{G}$ af en åben omegn af $\underline{o} \in E^k$ på en anden omegn E af $\underline{o} \in E^k$, således at $G\tilde{\underline{y}}^{-1}F\underline{x}$ har den søgte form. Betragt nu koordinatsystemet $\underline{y} : E \subseteq \tilde{E}^k \longrightarrow N$, hvor $\underline{y} = \tilde{\underline{y}}G^{-1}$. Pr. konstruktion opfylder $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ det ønskede.

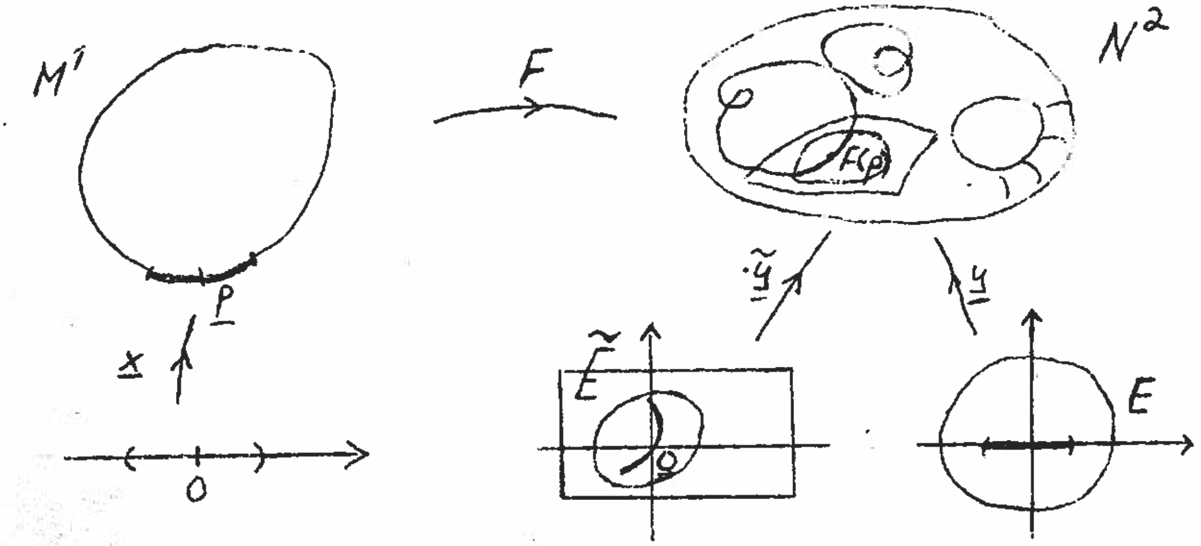


fig. 5.

$\underline{i_3) \Longrightarrow i_2)}$ Vi betragter koordinatsystemer $\underline{x}$ og $\underline{y}$, så $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ har formen:

$$(u_1,\dots,u_n) \longrightarrow (u_1,\dots,u_n,0,\dots,0).$$

Jacobiantmatricen for denne afbildning har formen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Heraf ses, at $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ har rangen n, og dermed, at F har rang n i et punkt $\underline{p} \in M$, så $\underline{x}$ er et koordinatsystem omkring $\underline{p}$, og $\underline{y}$ er et koordinatsystem omkring $F(\underline{p})$.

Dermed er ækvivalensen af i_1, i_2 og i_3 bevist.

Ved at benytte sætning 3.14 kan vi bevise ækvivalensen af kravene i følgende definition.

Definition 3.16. En submersion er en differentiabel afbildning $F: M^n \longrightarrow N^k$, der opfylder et af følgende ækvivalente krav:

S_1) $F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ er på $\forall \underline{p} \in M$

S_2) $rg_{\underline{p}}F = k \quad \forall \underline{p} \in M$

S_3) For ethvert punkt $\underline{p} \in M$, findes der lokale koordinatsystemer $\underline{x}:D \subseteq \underline{E}^n \longrightarrow M$ omkring $\underline{p}$, og $\underline{y} : \underline{E} \subseteq \underline{E}^k \longrightarrow N$ omkring $F(p)$, således at F's koordinatudtryk $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$ har formen:

$$\underline{y}^{-1}F\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_k)$$

hvor $(u_1,\ldots,u_n)$ er koordinaterne i D.

Opgave 9. Bevis ækvivalensen af S_1, S_2 og S_3 i definition 3.16.

Bemærkning. Betegnelsen immersion er almindelig i litteraturen. Submersion er en betegnelse indført af Bourbaki, og f.eks. brugt i Serge Lang's bog "Introduction to Differentiable Manifolds". Betegnelsen submersion er ikke almindeligt anvendt. Sommetider bruges udtrykket "F har maximal rang" (hvilket betyder, at F_{*p} 1-1-tydig når $n \leq k$, og F_{*p} på når $n \geq k$) som fælles betegnelse for det, vi har kaldt immersion og submersion.

Af i_3 i defintionen 3.15 fremgår det, at en immersion er lokalt 1-1-tydig. Det er let at konstruere exempler på immersioner, som ikke er globalt 1-1-tydige.

Exempel 3.17. $F: E^1 \longrightarrow E^2$ defineres ved fastsættelsen $F(t) = (t^3-t, \frac{2}{1+t^2}) \quad \forall t \in E^1$.

Man konstaterer, at $F'(t) \neq 0 \quad \forall t \in E^1$, og at $F(-1)=F(1)$ er et dobbeltpunkt for F. F er altså en immersion, som ikke er globalt 1-1-tydig

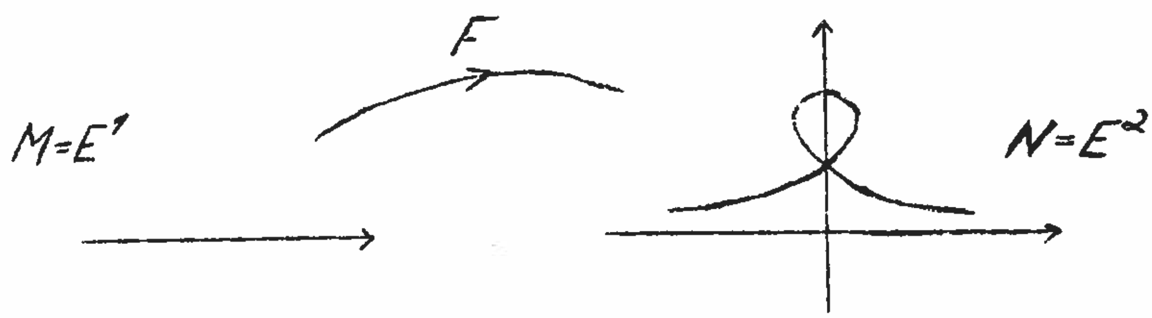


fig. 6.

Følgende klasse af 1-1-tydige immersioner har særlig interesse:

Definition 3.18. En 1-1-tydig immersion $F:M \to N$, som er en homeomorfi på sit billede (i den inducerede topologi), kaldes en imbedding.

Følgende exempel viser, at ikke alle 1-1-tydige immersioner er imbeddings.

Exempel 3.19. Lad $M =]-2,1[\subseteq E^1$ og $N = E^2$.

Definer $F:M \to N$ ved fastsættelsen:

$$F(t) = (t^3 - t, \frac{2}{1+t^2}) \quad \forall t \in]-2,1[.$$

Man konstaterer let, at F er en 1-1-tydig immersion. Da $F(t) \to F(-1)$ for $t \to 1$, når $F(M)$ gives den inducerede topologi fra N, er F^{-1} ikke kontinuert. F er altså ikke en imbedding.

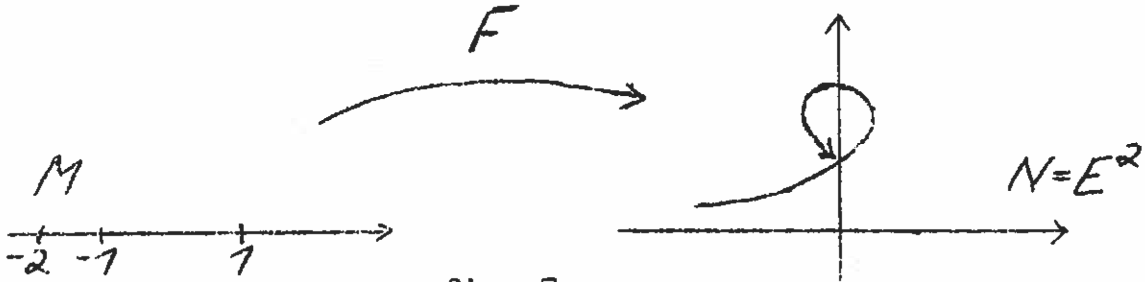


fig. 7.

Sætning. 3.20. Lad $F:M \to N$ være en 1-1-tydig immersion mellem Hausdorff'ske differentiable mangfoldigheder, og antag yderligere, at M er kompakt. Så er F en imbedding.

Bevis. Vi skal vise, at $F^{-1}:F(M) \to M$ er kontinuert, når $F(M)$ gives induceret topologi fra N.

For at vise dette, betragter vi en vilkårlig lukket delmængde C af M. Beviset er ført, hvis vi kan vise, at $(F^{-1})^{-1}(C) = F(C)$ er en lukket delmængde af $F(M)$.

Da M er et kompakt topologisk rum er C kompakt. Idet F er kontinuert følger så, at $F(C)$ er kompakt i N. Da N er et Hausdorff rum, er $F(C)$ derfor lukket i N. Så er $F(C)$ lukket i $F(M)$, hvilket skulle bevises.

Svarende til de forskellige typer af differentiable afbildninger har vi forskellige typer af del-mangfoldigheder.

Definition 3.21. Lad M^n og N^k være differentiable mangfoldigheder, og antag, at M er en delmængde af N. Lad F være inklusionsafbildningen af M i N. Hvis F er en immersion kaldes M en <u>immersed del-mangfoldighed</u> i N. Hvis F er en imbedding kaldes M en <u>del-mangfoldighed</u> i N.

<u>Exempel 3.22</u>. Hvis $n \leq k$ kan E^n opfattes som del-mangfoldighed af E^k ved indlægningen $F(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_n,0,.,0)$.

Følgende sætning viser, at enhver del-mangfoldighed lokalt kan beskrives som i exempel 3.22.

<u>Sætning 3.23</u>. Lad M^n være en (immersed) del-mangfoldighed af N^k, og lad $p \in M$. Opfat $E^n \subseteq E^k$ som i exempel 3.22. Der findes et lokalt koordinatsystem $\underline{x} : D \subseteq E^k \longrightarrow N$ på N omkring p, således at $\underline{x}(D \cap E^n) \subseteq M$ og $\underline{x}|D \cap E^n : D \cap E^n \longrightarrow M$ er et lokalt koordinatsystem på M omkring p.

<u>Bemærkning</u>. Et koordinatsystem på M, der fremkommer som i sætning 3.23, vil vi kalde et <u>arvet koordinatsystem</u>.

<u>Opgave 10</u>. Bevis sætning 3.23 (Benyt i_3 i definition 3.15). Vis, at konklusionen i sætning 3.23 giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at M er en immersed del-mangfoldighed af N.

<u>Sætning 3.24</u>. Mængden af n-dimensionale differentiable mangfoldigheder i E^k er netop mængden af n-dimensionale del-mangfoldigheder af E^k.

<u>Sætning 3.25</u>. Hvis $F:M^n \longrightarrow N^k$ er en (1-1-tydig immersion) imbedding er $F(M)$ en (immersed) del-mangfoldighed af N.

<u>Opgave 11</u>. Bevis sætning 3.24 og sætning 3.25.

Af sætning 3.25 følger bl.a., at en imbedding af en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed i E^3 giver en flade i E^3.

<u>Definition 3.26</u>. En n-dimensional del-mangfoldighed af E^{n+1} kaldes en hyperflade i E^{n+1}.

<u>Opgave 12</u>. Formuler og bevis en sætning om inverse funktioner i teorien for differentiale mangfoldigheder (Benyt sætning 3.12).

<u>Opgave 13</u>. Bevis følgende sætning:

Lad M^n være en del-mangfoldighed af N^k og lad $F:L \longrightarrow N$ være en differentiabel afbildning, således at $F(L) \subseteq M$. Da er F betragtet som afbildning $F:L \longrightarrow M$ differentiabel.

Opgave 14. Giv exempler på situationen i opgave 13 når $n = 1,2$.

Opgave 15. Lad $F: M^n \to N^k$ være en differentiabel afbildning, og lad $q \in N$. Antag, at $W = F^{-1}(q) \neq \emptyset$, og at F har rang k i alle punkter af W. Vis, at W kan gives en differentiabel struktur, således at W bliver en $(n-k)$-dimensional del-mangfoldighed af M.

I de følgende opgaver betragtes en række Lie-grupper.

Definition 3.27. En Lie-gruppe G er en gruppe, hvis underliggende mængde også er en differentiabel mangfoldighed, således at gruppeoperationerne er differentiable, d.v.s. så afbildningerne:

$$\mu: G \times G \to G$$
$$\tau: G \to G$$

defineret ved fastsættelserne $\mu(a,b) = a \cdot b$ og $\tau(a) = a^{-1}$ $\forall a,b \in G$ er differentiable afbildninger.

($G \times G$ gøres til differentiabel mangfoldighed ved som kort at benytte $\underline{x} \times \underline{y}$, hvor $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er kort på G).

Opgave 16. Hvis G er en Lie-gruppe kan man for ethvert $a \in G$ betragte afbildningerne $L_a: G \to G$ og $R_a: G \to G$ defineret ved, at $L_a(x) = ax$ og $R_a(x) = xa$ $\forall x \in G$. Vis, at L_a og R_a er differentiable afbildninger. Man kalder disse afbildninger for henholdsvis venstre og højre translationer.

Opgave 17. Vis, at $Gl(n)$ er en Lie-gruppe.

Opgave 18. Lad $O(n)$ være mængden af ortogonale $n \times n$-matricer. En $n \times n$-matrix $A \in L(n,n)$ tilhører pr. definition $O(n)$ hvis og kun hvis

$$A \cdot A^{tr} = I \quad ,$$

hvor A^{tr} er den transponerede matrix af matricen A, og I er identitetmatricen.

Hvis $A_1|, A_2|, \ldots, A_n|$ betegner de n søjlevektorer i $A \in L(n,n)$ har vi:

$$A \in O(n) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle A_i|, A_i| \rangle = 1 & \text{for } i=1,\ldots,n \\ \langle A_i|, A_j| \rangle = 0 & \text{for } 1 \leq i < j \leq n \end{cases} \quad ,$$

hvor $\langle \cdot,\cdot \rangle$ er det sædvanlige indre produkt af vektorer i E^n.

En matrix A i $O(n)$ er således beskrevet ved $n+\binom{n}{2}$ ligninger. De første n ligninger udtrykker, at søjlevektorerne i A har længde 1, og de sidste $\binom{n}{2}$ ligninger udtrykker, at 2 indbyrdes forskellige søjlevektorer er ortogonale.

Vi definerer nu afbildningen

$$F : L(n,n) = E^{n^2} \longrightarrow E^{n+\binom{n}{2}}$$

ved fastsættelsen:

$$F(A)=(\underbrace{\ldots,\langle A_i|,A_i|\rangle,\ldots}_{n \text{ pladser}},\underbrace{\ldots,\underset{1\leq i<j\leq n}{\langle A_i|,A_j|\rangle},\ldots}_{\binom{n}{2} \text{ pladser.}})$$

De sidste $\binom{n}{2}$ pladser ordnes leksikografisk.

Vis, at F har rang $n+\binom{n}{2}$ i alle punkter af $F^{-1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n},\underbrace{0,\ldots,0}_{\binom{n}{2}})$.

Vis dermed, at $O(n)$ er en $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ -dimensional del-mangfoldighed af $L(n,n)$.

Vis, at $O(n)$ er en del-mangfoldighed af $Gl(n)$.

Vis, at multiplikation af matricer og dannelse af inverst element i $GL(n)$ føres over til $O(n)$.

Vi får altså afbildninger:

$$\mu : O(n)\times O(n) \longrightarrow O(n)$$

$$\tau : O(n) \longrightarrow O(n) \qquad ,$$

hvor $\mu(A,B)= A\cdot B$ og $\tau(A)=A^{-1}$ $\forall A,B \in O(n)$.

Vis, at μ og τ er differentiable afbildninger, når $O(n)\times O(n)$ gives produktstruktur.

Dette vil vise, at $O(n)$ er en Lie-gruppe. Vi får faktisk, at $O(n)$ er en <u>del-Lie-gruppe</u> af $GL(n)$.

Grupperne $O(n)$ for $n=1,2,3,\ldots$ kaldes <u>de ortogonale grupper</u>. $O(n)$ kan identificeres med mængden af ortogonale transformationer i E^n.

Vis, at $O(n)$ er kompakt (Hint: $O(n)$ lukket og begrænset i E^{n^2}).

<u>Opgave 19</u>. Lad $E_{ij}(\lambda)$ med $i \neq j$ og $\lambda \in E^1$ være den matrix i $L(n,n)$, som kun adskiller sig fra identitetsmatricen ved, at elementet i i'te række og j'te søjle er λ. $E_{ij}(\lambda)$ kaldes en <u>elementær matrix</u>. Lad $D(\mu)$ være den matrix i $L(n,n)$, der kun

adskiller sig fra identitetsmatricen ved, at elementet på pladsen (n,n) er μ i stedet for 1.

Vis, at enhver matrix $A \in Gl(n)$ kan skrives på formen

$A=E_{i_1 j_1}(\lambda_1)\cdots E_{i_p j_p}(\lambda_p)\cdot D(\det A)$.

Vis, at $Gl(n)$ har 2 kurvesammenhængskomponenter svarende til positiv og negativ determinant (Hint: Betragt for en elementær matrix $E_{ij}(\lambda)$ den nye elementære matrix $E_{ij}(t\lambda)$ $0\leq t\leq 1$).

Vis dernæst, f.eks. ved at benytte Gram-Schmidt's ortogonaliseringsproces på søjlevektorerne i de forbindende matricer i $Gl(n)$, at $O(n)$ har 2 kurvesammenhængskomponenter svarende til determinant ± 1.

Lad $SO(n)$ være sammenhængskomponenten bestående af matricer i $O(n)$ med determinant 1. Vis, at $SO(n)$ er en undergruppe af $O(n)$ med index 2(Hint: Betragt determinantafbildningen

$$\det : O(n) \longrightarrow \{-1,1\} \quad).$$

Grupperne $SO(n)$ for $n=1,2,3,\ldots$ kaldes de <u>specielle ortogonale grupper</u>.

<u>Opgave 20</u>. Vis, at $SO(2)$ er diffeomorf med S^1, hvor S^1 er enhedscirklen i E^2.

<u>Status</u>. Vi har ovenfor betragtet en række Lie-grupper, hvis indbyrdes forhold er givet ved:

$$SO(n) \subset O(n) \subset Gl(n) \qquad \text{for } n=1,2,3,\ldots .$$

Disse Lie-grupper er nogle af de såkaldte <u>klassiske matrix Lie-grupper</u>.

§ 4. Tangentbundtet og Lie-algebraen af vektorfelter for en differentiabel mangfoldighed.

I § 2 betragtede vi de enkelte tangentrum for en differentiabel mangfoldighed som vektorrum uden indbyrdes forbindelse. I denne paragraf vil vi samle tangentrummene i et bundt af vektorrum. Dette bundt af vektorrum kan vi give struktur som en differentiabel mangfoldighed. Derved opstår tangentbundtet knyttet til mangfoldigheden. Tangentbundtet er et specielt exempel på den mere generelle begrebsdannelse et differentiabelt vektorbundt, som igen er et specialtilfælde af begrebet fiber bundt. I de følgende paragraffer skal vi se exempler på vektorbundter, der har betydning i differential geometrien. Disse bundter har alle stærk tilknytning til tangentbundtet for en mangfoldighed.

Historisk har bundtsynspunktet sin oprindelse i perioden 1935-40. De første generelle definitioner blev givet af H.Whitney. Det var imidlertid først omkring 1950, at begreberne var klart formulerede. Fiber bundter har vist sig af stor betydning for differential geometriens udvikling.

Exempel 4.1. Betragt enhedscirklen S^1 i E^2. Afsætter vi tangentvektorerne til S^1 traditionelt (fig. 8), bliver alle planens punkter uden for S^1 endepunktet for 2 forskellige tangentvektorer til S^1. Afsætter vi imidlertid tangenterne vinkelret på E^2 (fig. 9) fås en 1-1-tydig korrespondance mellem tangentvektorerne til S^1 og punkterne på cylinderen $S^1 \times E^1$. $S^1 \times E^1$ er en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed, og projektionen på første faktor $\pi_{S^1} : S^1 \times E^1 \longrightarrow S^1$ er en differentiabel afbildning.

Urbilledet $\pi_{S^1}^{-1}(\underline{p})$ af et punkt $\underline{p} \in S^1$ er netop identificeret med tangenten T_pS^1 til S^1 i $\underline{p}$. $S^1 \times E^1$ er altså et bundt af 1-dimensionale vektorrum, nemlig tangenterne til S^1. Vi skal senere se, at dette netop er tangentbundtet for S^1.

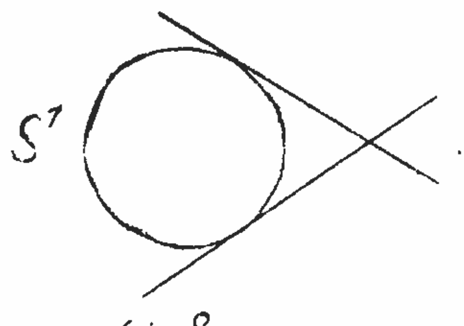


fig 8

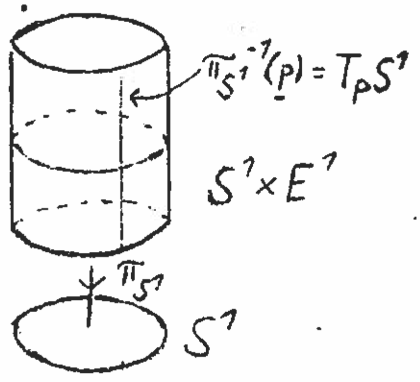


fig 9

Lad i det følgende M^n være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed.

Hvis $\underline{x}$: $D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et lokalt koordinatsystem på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$, har vi set, at tangentvektorerne $\underline{x}_{u_1}(u_1,\ldots,u_n),\ldots,\ \underline{x}_{u_n}(u_1,\ldots,u_n)$ er en basis i tangentrummet over punktet $\underline{x}(u_1,\ldots, u_n)$ for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Inden vi definerer tangentbundtet for M, vil vi undersøge, hvordan disse tangentvektorer transformerer ved skift af koordinater.

Lad derfor $\underline{x}$: $D \subseteq E^n \longrightarrow M$ og $\underline{y}$: $E \subseteq E^n \longrightarrow M$ være 2 koordinatsystemer på M med $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$, og lad $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ og $(v_1,\ldots,v_n) \in E$ være koordinaterne for henholdsvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Koordinatskiftene $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ og $\underline{x}^{-1}\underline{y}$ giver en korrespondance mellem koordinaterne $(u_1,\ldots,u_n)$ og $(v_1,\ldots,v_n)$. De er således beskrevet ved funktionssystemer:

$$v_i = f_i(u_1,\ldots,u_n) \qquad i=1,\ldots,n$$

og

$$u_i = g_i(v_1,\ldots,v_n) \qquad i=1,\ldots,n$$

Som regel vil vi tillade os at betegne funktionerne f_i og g_i med henholdsvis v_i og u_i. Med denne vedtægt beskrives $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ og $\underline{x}^{-1}\underline{y}$ derfor ved funktionssystemer:

$$v_i = v_i(u_1,\ldots,u_n) \qquad i=1,\ldots,n$$

og

$$u_i = u_i(v_1,\ldots,v_n) \qquad i=1,\ldots,n.$$

<u>Lemma 4.2</u>. Med ovenstående notation gælder, at

$$\underline{x}_{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i}\, \underline{y}_{v_j} \qquad \text{for} \quad i=1,\ldots,n$$

eller mere præcist udtrykt:

$$\underline{x}_{u_i}(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u_1,\ldots,u_n)\, \underline{y}_{v_j}(v_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots, v_n(u_1,\ldots,u_n))$$

$$\forall\, (u_1,\ldots,u_n) \in \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}\,(E)) \qquad \text{og} \qquad i=1,\ldots,n.$$

Bemærkning. Da den eneste fornuftige mening med den første ligning i lemma 4.2 netop er, hvad det præcise udtryk angiver, vil vi i det følgende ofte tillade os kun at angive det korte udtryk.

Bevis for lemma 4.2. Da $\underline{y}_{v_1},\dots,\underline{y}_{v_n}$ er en basis i tangentrummene over punkterne i $\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E)$, findes der funktioner $a_j: \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E)) \longrightarrow E^1$ for $j=1,\dots,n$, således at

$$\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j(u_1,\dots,u_n)\,\underline{y}_{v_j}(v_1(u_1,\dots,u_n),\dots,v_n(u_1,\dots,u_n))$$

i alle punkter $(u_1,\dots,u_n)\in\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E))$.

Vi ønsker at bestemme funktionerne $a_1,\dots,a_n$.

Lad dertil $\varphi_k: \underline{y}(E)\to E^1$ være den k'te koordinatfunktion for koordinatsystemet $\underline{y}$. φ_k er altså defineret ved fastsættelsen:

$$\varphi_k(\underline{y}(v_1,\dots,v_n)) = v_k \qquad \forall\,(v_1,\dots,v_n)\in E.$$

Da $\varphi_k\underline{x} = (\varphi_k\underline{y})(\underline{y}^{-1}\underline{x})$ er det klart, at $\underline{y}^{-1}\underline{x}=(\varphi_1\underline{x},\dots,\varphi_n\underline{x})$.
Heraf følger, at

$$v_k=v_k(u_1,\dots,u_n) = \varphi_k\underline{x}(u_1,\dots,u_n) \qquad \text{for } k=1,\dots,n.$$

Opfattes tangentvektorer som derivationer får vi nu:

$$\underline{x}_{u_i}[\varphi_k] = \sum_{j=1}^{n} a_j\underline{y}_{v_j}[\varphi_k] = \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial(\varphi_k\underline{y})}{\partial v_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{jk} = a_k.$$

Samtidig finder vi:

$$\underline{x}_{u_i}[\varphi_k] = \frac{\partial(\varphi_k\underline{x})}{\partial u_i} = \frac{\partial v_k}{\partial u_i}.$$

Dermed har vi vist, at $a_k = \dfrac{\partial v_k}{\partial u_i}$.
Heraf følger den søgte formel:

$$\underline{x}_{u_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}\,\underline{y}_{v_j}.$$

Transformationsreglen i lemma 4.2 er let at huske, når blot man erindrer kædereglen. Hvis $f: U\to E^1$ er en differentiabel afbildning med $U\subseteq\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E)$ viser følgende udregning hvorfor:

$$\underline{x}_{u_i}[f] = \frac{\partial(f\underline{x})}{\partial u_i} = \frac{\partial(f\underline{y}\,\underline{y}^{-1}\underline{x})}{\partial u_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\underline{y})}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \underline{y}_{v_j}[f]$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \underline{y}_{v_j}\Big)[f]$$

Da f var vilkårlig valgt aflæses heraf, at

$$\underline{x}_{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \underline{y}_{v_j} .$$

Dermed har vi bevist lemma 4.2 pány.

Opgave 1. Lad $\underline{p} \in M^n$. Betragt mængden af par $(\underline{x}, \underline{a})$, hvor $\underline{x}$ er et kort på M omkring $\underline{p}$, og $\underline{a} \in E^n$.

I mængden af disse par defineres relationen $\sim$ ved fastsættelsen:

$$(\underline{x}, \underline{a}) \sim (\underline{y}, \underline{b}) \iff \underline{b} = d(\underline{y}^{-1}\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)}(\underline{a}).$$

Hvis $(u_1,\dots,u_n)$ og $(v_1,\dots,v_n)$ er koordinaterne for henholdsvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$, får vi den ækvivalente betingelse:

$$(\underline{x}, \underline{a}) \sim (\underline{y}, \underline{b}) \iff b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial u_j}(\underline{x}^{-1}(\underline{p}))\, a_j .$$

Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation.

Indfør additionen $(\underline{x}, \underline{a}) + (\underline{x}, \underline{c}) = (\underline{x}, \underline{a} + \underline{c})$.

Vis, at denne addition inducerer en addition i mængden af ækvivalensklasser ved $\sim$.

Vis, at der derved opstår et vektorrum isomorf med $T_{\underline{p}}M$.

Opgave 1 viser, at transformationsreglen i lemma 4.2 karakteriserer mængden af tangentvektorer i ethvert punkt af M. Et system af talsæt knyttet til et punkt i et n-dimensionalt rum, et for ethvert koordinatsystem omkring punktet, der transformerer som i opgave 1 (lemma 4.2) kaldes klassisk en <u>contravariant tensor af orden 1</u>. Opgave 1 viser, at disse tensorer præcis er mængden af tangentvektorer i det omtalte punkt af rummet. I litteraturen møder man derfor ofte tangentvektorerne til en mangfoldighed omtalt som de <u>contravariante vektorer</u>.

<u>Tangentbundtet</u> $\tau(M)$ for M^n er en tripel $(T(M), \pi_M, M)$, hvor M^n er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed kaldet <u>basis rummet</u> for $\tau(M)$, $T(M)$ er en 2n-dimensional differentiabel mangfoldighed kaldet <u>bundt rummet</u> (eller <u>total rummet</u>) for $\tau(M)$, og

π_M: $T(M) \to M$ er en differentiabel afbildning kaldet <u>projektionen</u> for $\tau(M)$.

Som antydet afhænger $T(M)$ og π_M direkte af M. Vi vil nu konstruere disse ingredienser af $\tau(M)$.

Som punktmængde skal $T(M)$ være den disjunkte forening af tangentrummene for M, altså:

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_pM \quad ,$$

hvor $\underline{v}_p$ og $\underline{w}_q$ kun regnes for ens, hvis $\underline{p}=\underline{q}$ og $\underline{v}_p = \underline{w}_q$ i $T_p(M)$.

Afbildningen $\pi_M : T(M) \to M$ defineres ved fastsættelsen $\pi_M(\underline{v}_p) = \underline{p}$ for $\underline{v}_p \in T_pM$.

$T(M)$ er altså samlingen af alle tangentvektorer til M, og π_M er projektionen af en tangentvektor på sit fodpunkt.

Vi ønsker at forsyne $T(M)$ med en differentiabel struktur, således at π_M bliver en differentiabel afbildning.

Lad derfor $\mathcal{S}$ være et del-atlas for den differentiable struktur på M.

For ethvert kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ i $\mathcal{S}$ med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$, kan vi definere afbildningen

$$\tilde{\underline{x}}: D \times E^n \to T(M)$$

ved fastsættelsen:

$$\tilde{\underline{x}}(u_1,\ldots,u_n, t_1,\ldots,t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{x}_{u_i}(u_1,\ldots,u_n)$$

hvor $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ og $(t_1,\ldots,t_n) \in E^n$.

Da D er en åben delmængde af E^n er $D \times E^n$ en åben delmængde af E^{2n}, og da $\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n}$ er en basis i tangentrummene i punkter af $\underline{x}(D)$, er afbildningen $\tilde{\underline{x}}$ en bijektion af $D \times E^n$ på $\pi_M^{-1}(\underline{x}(D))$. Dette viser, at $\tilde{\underline{x}}$ er et lokalt koordinatsystem på $T(M)$.

Vi bemærker, at $\pi_M^{-1}(\underline{x}(D))$ netop er mængden af tangentvektorer til M i punkter af $\underline{x}(D)$.

Lad $\tilde{\mathcal{S}}$ være samlingen af lokale koordinatsystemer $\tilde{\underline{x}}$ dannet fra $\underline{x} \in \mathcal{S}$ på ovenstående måde. Vi ønsker at vise, at $\tilde{\mathcal{S}}$ er et 2n-dimensionalt del-atlas på $T(M)$.

Dertil skal vi vise, at <u>1</u>, <u>2</u> og <u>3</u> i definitionen 1.2 er opfyldt.

Det er trivielt, at billederne af $\tilde{\underline{x}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ overdækker M, idet $\tilde{\underline{x}}(D \times E^n) = \pi_M^{-1}(\underline{x}(D))$ og billederne af $\underline{x} \in \mathcal{S}$ overdækker M. Dette viser <u>1</u>.

Hvis $\underline{\tilde{x}}: D\times E^n \to T(M)$ og $\underline{\tilde{y}}: E\times E^n \longrightarrow T(M)$ er lokale koordinatsystemer i $\tilde{\mathcal{F}}$ konstaterer vi, at

$$\underline{\tilde{x}}^{-1}(\underline{\tilde{x}}(D\times E^n)\cap\underline{\tilde{y}}(E\times E^n)) = \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E))\times E^n$$

og

$$\underline{\tilde{y}}^{-1}(\underline{\tilde{x}}(D\times E^n)\cap\underline{\tilde{y}}(E\times E^n)) = \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D)\cap\underline{y}(E))\times E^n \ .$$

Da højresiderne er åbne delmængder af E^{2n}, har vi vist, at $\underline{2}$ er opfyldt.

Hvis de ovenfor beskrevne mængder er ikke tomme, skal vi nu vise, at afbildningerne $\underline{\tilde{y}}^{-1}\underline{\tilde{x}}$ og $\underline{\tilde{x}}^{-1}\underline{\tilde{y}}$ er differentiable i sædvanlig euklidisk forstand på disse mængder.

Lad dertil $(u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n)$ være koordinaterne i $D\times E^n$ og $(v_1,\dots,\ v_n,\ s_1,\dots,s_n)$ koordinaterne i $E\times E^n$.

Idet vi benytter lemma 4.2 følger:

$$\underline{\tilde{y}}^{-1}\underline{\tilde{x}}(u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n)$$

$$= \underline{\tilde{y}}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)\Big)$$

$$= \underline{\tilde{y}}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)\underline{y}_{v_j}(v_1(u_1,\dots,u_n),\dots,$$
$$v_n(u_1,\dots,u_n))\Big)\Big)$$

$$= \underline{\tilde{y}}^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)\cdot t_i\Big)\underline{y}_{v_j}(v_1(u_1,\dots,u_n),\dots,$$
$$v_n(u_1,\dots,u_n))\Big)$$

$$= \Big(v_1(u_1,\dots,u_n),\dots,v_n(u_1,\dots,u_n),\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_1}{\partial u_i}t_i,\dots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_n}{\partial u_i}t_i\Big)$$

I sidste linie skal $\dfrac{\partial v_j}{\partial u_i}$ stadig tages i punktet

$$(u_1,\dots,u_n)\in D.$$

For $\underline{\tilde{x}}^{-1}\underline{\tilde{y}}$ fås et tilsvarende udtryk. Da også de partielle afledede er differentiable funktioner, fremgår det af af disse udtryk, at $\underline{\tilde{y}}^{-1}\underline{\tilde{x}}$ og $\underline{\tilde{x}}^{-1}\underline{\tilde{y}}$ er differentiable afbildninger. Dermed er $\underline{3}$ bevist.

Vi observerer, at

$$\tilde{\underline{y}}^{-1}\tilde{\underline{x}} = (\underline{y}^{-1}\underline{x},\ d(\underline{y}^{-1}\underline{x}))$$

og

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}\tilde{\underline{y}} = (\underline{x}^{-1}\underline{y},\ d(\underline{x}^{-1}\underline{y})).$$

Den første samling af koordinatfunktioner $(\underline{y}^{-1}\underline{x}$ og $\underline{x}^{-1}\underline{y})$ tager sig af koordinatskiftet på M. Den sidste samling $(d(\underline{y}^{-1}\underline{x})$ og $d(\underline{x}^{-1}\underline{y}))$ transformerer vektorkomponenterne.

Vi har således bevist, at ethvert del-atlas på M giver anledning til et del-atlas på $T(M)$. Beviset for denne påstand indeholder også beviset for, at 2 fordragelige del-atlas på M giver anledning til 2 fordragelige del-atlas på $T(M)$.

Dermed har vi bevist, at den differentiable struktur på M giver anledning til en veldefineret differentiabel struktur på $T(M)$. $T(M)$ tænkes altid forsynet med denne struktur.

Vi skal nu blot vise, at med denne struktur på $T(M)$ bliver π_M en differentiabel afbildning. Hvis $\underline{x}: D \to M$ er et kort på M, og $\tilde{\underline{x}}: D \times E^n \to T(M)$ er det tilsvarende kort på $T(M)$, er det tilstrækkeligt at vise, at $\underline{x}^{-1}\pi_M\tilde{\underline{x}}$ er differentiabel for at slutte, at π_M er differentiabel (Hvorfor?). Det er imidlertid let at indse, at $\underline{x}^{-1}\pi_M\tilde{\underline{x}}: D \times E^n \to D$ er projektionen på første faktor, med andre ord, at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
D \times E^n \arrow[r, "\tilde{\underline{x}}"] \arrow[d, "\text{proj.}"'] & T(M) \arrow[d, "\pi_M"] \\
D \arrow[r, "\underline{x}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Heraf følger trivielt, at $\underline{x}^{-1}\pi_M\tilde{\underline{x}}$ er differentiabel.

Dette afslutter konstruktionen af tangentbundtet hørende til den differentiable mangfoldighed M.

For ethvert bundt er det af interesse at betragte bundtets tværsnit. I et tangentbundt kaldes tværsnittene <u>vektorfelter</u>.

<u>Definition 4.3</u>. Et <u>(differentiabelt) vektorfelt</u> på en differentiabel mangfoldighed M^n, er en (differentiabel) afbildning $X: M \to T(M)$, således at $\pi_M X = 1_M$.

Bemærkning. Betingelsen $\pi_M X = 1_M$ sikrer, at X til ethvert punkt $p \in M$ netop knytter en tangentvektor i T_pM. Denne tangentvektor betegnes med X_p eller $X(p)$. X giver således et snit i mængden af tangentvektorer til M.

Bemærkning. Vi kunne tilsvarende have defineret vektorfelter på en åben delmængde af M.

Lemma 4.4. Lad X være et vektorfelt på en differentiabel mangfoldighed M^n, og lad $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ være et kort på M. Så findes n entydigt bestemte reelle funktioner $a_1,\dots,a_n$ defineret på D, således at

$$X(\underline{x}(u_1,\dots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\dots,u_n)\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\dots,u_n) \in D$.

Bemærkning. Man kalder disse fremstillinger af et vektorfelt for dets koordinatfremstillinger.

Beviset for lemma 4.4 er trivielt, når det erindres, at $\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)$ er en basis i tangentrummet over $\underline{x}(u_1,\dots,u_n)$.

Hvis $f: U \subseteq M \to E^1$ er en differentiabel funktion, og X er et vektorfelt på M, kan vi definere funktionen $X[f]: U \to E^1$ ved fastsættelsen

$$X[f](\underline{p}) = X_p[f] \qquad \forall \underline{p} \in U.$$

Sætning 4.5. Et vektorfelt X på en differentiabel mangfoldighed M^n er differentiabelt, hvis og kun hvis et af følgende ækvivalente krav er opfyldt:

V_1) Afbildningen $X: M \to T(M)$ er differentiabel.

V_2) I enhver koordinatfremstilling af X som i lemma 4.4, er funktionerne $a_1,\dots,a_n$ differentiable.

V_3) For enhver differentiabel funktion $f: U \subseteq M \to E^1$ er funktionen $X[f]: U \to E^1$ differentiabel.

Bevis. V_1) er definitionen på et differentiabelt vektorfelt.

$V_1) \Leftrightarrow V_2$) Lad $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ være et kort på M, og lad $\underline{\tilde{x}}$: være det tilsvarende kort på $T(M)$.

Hvis $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{x}_{u_i}$ er koordinatfremstillingen af X hørende til kortet $\underline{x}$ på M, får vi:

$$\underline{\tilde{x}}^{-1} X \underline{x}(u_1,\dots,u_n) = (u_1,\dots,u_n, a_1(u_1,\dots,u_n),\dots,a_n(u_1,\dots,u_n)).$$

Af dette udtryk aflæses ækvivalensen af $V_1)$ og $V_2)$ øjeblikkeligt.

$V_2) \Rightarrow V_3)$. Lad $f: U \subseteq M \to E^1$ være en differentiabel funktion, og lad $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ være et kort på M med $\underline{x}(D) \cap U \neq \emptyset$. I punkter af gennemsnittet får vi:

$$X[f]\underline{x}(u_1,\dots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\dots,u_n)\, \underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)[f]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\dots,u_n) \frac{\partial (f\ \underline{x})}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)$$

Da a_i'erne og f er differentiable funktioner, følger heraf, at $X[f]$ er differentiabel på $\underline{x}(D) \cap U$. Da $\underline{x}$ var et vilkårligt koordinatsystem, følger det, at $X[f]$ er differentiabel på U.

$V_3) \Rightarrow V_2)$. Betragt igen $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{x}_{u_i}$ svarende til kortet $\underline{x}$ på M. Den k'te koordinatfunktion φ_k for $\underline{x}$ er differentiabel på $\underline{x}(D)$. Derfor er $X[\varphi_k]$ differentiabel på $\underline{x}(D)$. Nu har vi imidlertid:

$$X[\varphi_k](u_1,\dots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\dots,u_n)\, \underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)[\varphi_k]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\dots,u_n)\, \delta_{i,k}$$

$$= a_k(u_1,\dots,u_n)$$

Altså er funktionerne $a_1,\dots,a_n$ differentiable på D.

Dermed har vi bevist sætning 4.5.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ er et kort på M, giver $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ anledning til afbildninger $\underline{x}(D) \to T(M)$, som vi af let forståelige grunde også vil betegne med $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$. Disse afbildninger er definerede ved fastsættelsen:

$$\underline{x}_{u_i}(\underline{x}(u_1,\dots,u_n)) = \underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)$$

for alle $(u_1,\dots,u_n) \in D$.

Da $\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)$ er en tangentvektor i punktet $\underline{x}(u_1,\dots,u_n)$, ser vi, at $\underline{x}_{u_i}$ for $i=1,\dots,n$ er vektorfelter på $\underline{x}(D)$.

Hvis vi som koordinatsystem på $T(M)$ bruger $\tilde{\underline{x}}$, får vi umiddelbart:

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}{}_{*}\underline{x}_{u_i}\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_n, o,\ldots,1,\ldots,o)$$

for alle $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ (1 står på den i'te koordinatplads i E^n).

Dette viser, at $\underline{x}_{u_i} : \underline{x}(D) \longrightarrow T(M)$ er en differentiabel afbildning.

Vi kan derfor nu give den præcise betydning af $\underline{x}_{u_i}$:

$\underline{x}_{u_i}$ er et differentiabelt vektorfelt på $\underline{x}(D)$ for $i=1,\ldots,n$.

Bemærkning. I litteraturen betegner man ofte vektorfelterne $\underline{x}_{u_i}$ med symboler som $\frac{\partial}{\partial u_i}$ eller D_{u_i}. Begge disse symboler antyder partiel differentiation. Vores symbol kopierer standard betegnelser fra fladeteoriem, og samtidig minder det os om, at $(u_1,\ldots,u_n)$ er koordinaterne i koordinatsystemet $\underline{x}$.

Inden vi undersøger samlingen af vektorfelter på en differentiabel mangfoldighed nærmere, vil vi sætte det her definerede vektorfelts begreb i forbindelse med den klassiske definition af vektorfelter på en flade i rummet. Følgende sætning tilfredsstiller fultud dette behov.

Sætning 4.6. Lad M^n være en immersed del-mangfoldighed af E^k med inklusionsafbildning $I: M \longrightarrow E^k$, og lad X være et vektorfelt på M.

Hvis tangentrummene til E^k på sædvanlig måde identificeres med E^k, findes k entydigt bestemte reelle funktioner $x_1,\ldots,x_k$ på M, således at

$$I_{*p}(X_p) = (x_1(p),\ldots,x_k(p))_p \quad \forall \underline{p} \in M$$

Yderligere gælder, at X er et differentiabelt vektorfelt på M, hvis og kun hvis $x_1,\ldots,x_k$ er differentiable funktioner på M.

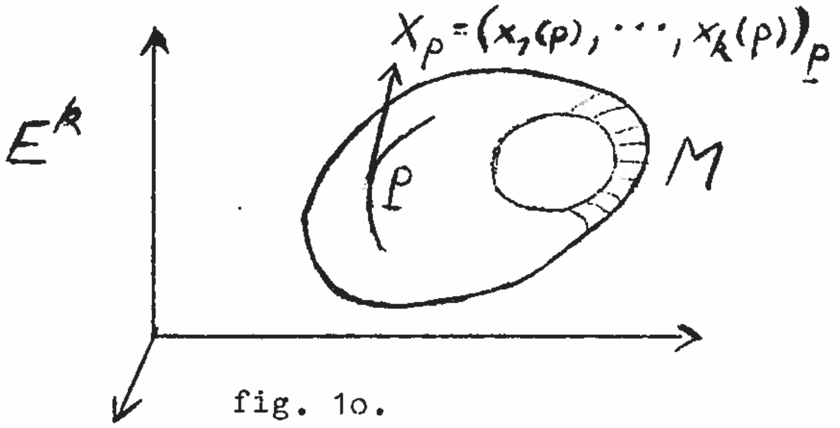


fig. 1o.

Bevis. Existens og entydigheds udsagnet i sætningen er trivielt. Vi skal nu bevise differentiabilitets udsagnet.

Lad dertil $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$. Lad endvidere $(v_1,\ldots,v_k) \in E^k$ være de sædvanlige koordinater på E^k.

På $\underline{x}(D)$ kan vi angive X ved sin koordinatfremstilling:

$X(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(u_1,\ldots,u_n)\,\underline{x}_{u_i}\,(u_1,\ldots,u_n)$ for alle $(u_1,\ldots,u_n) \in D$

Når

$$\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{\substack{i=1,\ldots,k\\ j=1,\ldots,n}}$$

betegner Jacobiantmatricen for $I\underline{x}: D \to E^k$, får vi:

$$\begin{Bmatrix} x_1\underline{x} \\ \vdots \\ x_k\underline{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_k}{\partial u_n} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad \text{på } D$$

Hvis X er et differentiabelt vektorfelt, ved vi fra sætning 4.5, at $a_1,\ldots,a_n$ er differentiable funktioner på D. Så følger fra matrixligningen, at $x_1\underline{x},\ldots,x_k\underline{x}$ er differentiable funktioner på D. Da $\underline{x}$ var valgt vilkårligt, har vi dermed indset, at X differentiabel på M medfører $x_1,\ldots,x_k$ differentiable på M.

Antag nu omvendt, at $x_1,\ldots,x_k$ er differentiable på M. I et kort $\underline{x}$ på M fås igen ovenstående matrixligning. Da I har rang n, har Jacobiantmatricen rang n. Hvis $\underline{p} \in \underline{x}(D)$, kan vi derfor finde hele tal $i_1,\ldots,i_n$ med $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq k$, således at de tilsvarende rækker i Jacobiantmatricen er lineært uafhængige i $\underline{x}^{-1}(\underline{p}) \in D$. Disse n rækker danner således en ikke-singulær $n \times n$-matrix i $\underline{x}^{-1}(\underline{p})$. Af kontinuitetsgrunde findes derfor en omegn $U \subseteq \underline{x}(D)$ af $\underline{p}$, således at denne matrix er ikke-singulær i alle punkter af $\underline{x}^{-1}(U)$. Her har matricen altså en invers.

Vi har dermed indset, at

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_{i_1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_{i_1}}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_{i_n}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_{i_n}}{\partial u_n} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x_{i_1}\underline{x} \\ \\ x_{i_n}\underline{x} \end{Bmatrix}$$

på $\underline{x}^{-1}(U)$.

Af reglerne for dannelse af invers matrix fremgår umiddelbart, at elementerne i ovenstående inverse matrix er differentiable funktioner. Da $x_1,\dots,x_k$ er givet differentiable følger så, at $a_1,\dots,a_n$ er differentiable på $\underline{x}^{-1}(U)$. Da $\underline{p} \in \underline{x}(D)$ var vilkårligt valgt, slutter vi så, at $a_1,\dots,a_n$ er differentiable på D. Idet $\underline{x}$ var vilkårligt valgt, følger så fra sætning 4.5, at X er et differentiabelt vektorfelt på M.

Dermed er sætning 4.6 bevist.

Notation. Lad $\mathfrak{X}(M)$ betegne mængden af differentiable vektorfelter på M.

Hvis $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ og $a,b \in E^1$, kan vi definere $aX+bY: M \to T(M)$ ved fastsættelsen:

$$(aX+bY)(\underline{p}) = aX_p+bY_p,$$

hvor vi udnytter vektorrumstrukturen i T_pM, idet vi erindrer, at $X_p, Y_p \in T_pM$.

Det er let at indse, at $aX+bY$ bliver et differentiabelt vektorfelt (Man kan f.eks. betragte koordinatfremstillinger af X og Y).

Da vektorfeltet, som til $\underline{p} \in M$ knytter nulvektoren i T_pM, klart tilhører $\mathfrak{X}(M)$, har vi med ovennævnte definition defineret addition og multiplikation med reel skalar i $\mathfrak{X}(M)$. Det er let at indse, at $\mathfrak{X}(M)$ herved bliver et reelt vektorrum.

Notation. Lad $F^o(M) = \bigcup_{\underline{p}\in M} F(M,\underline{p})$. $F^o(M)$ er altså mængden af reelle, differentiable afbildninger defineret på åbne delmængder af M.

Hvis $f,g \in F^o(M)$ og $a,b\in E^1$, kan vi som på side 13 definere $af + bg$ og $f\cdot g$ på gennemsnittet af definitionsmængderne for f og g. $af+bg$ og $f\cdot g$ bliver igen funktioner i $F^o(M)$.

I sætning 2.15 så vi, at en tangentvektor til M i $\underline{p}\in M$ var fuldstændig karakteriseret ved sin virkning som derivation i $F(M, \underline{p})$. Denne karakterisering af tangentvektorer giver følgende karakterisering af $\mathfrak{X}(M)$.

Sætning 4.7. Et vektorfelt $X\in\mathfrak{X}(M)$ giver anledning til en afbildning $X: F^o(M) \to F^o(M)$, således at f og $X[f]$ har samme definitionsmængde, og således at følgende krav er opfyldt:

$\underline{1}$ $X[af + bg] = aX[f]+bX[g] \quad \forall f,g\in F^o(M), \ \forall a,b\in E^1$

$\underline{2}$ $X[f\cdot g] = X[f]\cdot g + f\cdot X[g] \quad \forall f,g\in F^o(M)$.

Omvendt kan enhver afbildning $F^o(M)\to F^o(M)$, som bevarer definitionsmængder og tilfredsstiller kravene $\underline{1}$ og $\underline{2}$, på entydig måde realiseres som afbildningen hørende til et differentiabelt vektorfelt.

Bemærkning. Egenskaberne $\underline{1}$ og $\underline{2}$, og det mindre betydningsfulde krav om bevarelse af definitionsmængde, karakteriserer altså mængden af differentiable vektorfelter. Afbildninger med disse egenskaber kaldes derivationer i $F^o(M)$.

Bevis for sætning 4.7. Hvis $X\in\mathfrak{X}(M)$, og $f: U \subseteq M \to E^1$ tilhører $F^o(M)$, har vi defineret $X[f]: U \to E^1$ ved fastsættelsen:

$$X[f](\underline{p}) = X_{\underline{p}}[f] \quad \forall \underline{p} \in U$$

f og $X[f]$ har således begge definitionsmængden U.

Hvis vi stadig har, at $X\in\mathfrak{X}(M)$, følger egenskaberne $\underline{1}$ og $\underline{2}$ fra de tilsvarende egenskaber ved tangentvektorer opfattet som derivationer. F.eks. følger $\underline{2}$ ved denne udregning:

$$X[f\cdot g](\underline{p}) = X_{\underline{p}}[f\cdot g] = X_{\underline{p}}[f]\cdot g(\underline{p}) + f(\underline{p})\cdot X_{\underline{p}}[g]$$

$$= (X[f]\cdot g+f\cdot X[g])(\underline{p}).$$

Denne udregning gælder for ethvert $\underline{p}$ i gennemsnittet af definitionsmængderne for f og g. Så følger $\underline{2}$ trivielt.

Lad nu omvendt $X: \overset{\circ}{F}(M) \to \overset{\circ}{F}(M)$ være en derivation i $\overset{\circ}{F}(M)$. For ethvert $\underline{p} \in M$ giver X anledning til en derivation X_p i $F(M,\underline{p})$, defineret ved fastsættelsen:

$$X_p[f] = X[f](\underline{p}) \qquad \forall f \in F(M,\underline{p}).$$

Det er klart, at X_p, defineret således, er en derivation i $F(M,\underline{p})$ (Hvorfor?).

Der findes derfor en entydig bestemt tangentvektor i T_pM, der realiserer X_p som derivation. Da dette gælder $\forall \underline{p} \in M$, definerer X et entydigt bestemt vektorfelt på M. Betingelsen $X[f] \in \overset{\circ}{F}(M)$ $\forall f \in \overset{\circ}{F}(M)$ viser, at dette vektorfelt er differentiabelt (V_3 i sætning 4.5). Det er klart, at dette vektorfelt som derivation i $\overset{\circ}{F}(M)$ netop realiserer X.

Dermed er sætning 4.7 bevist.

Opgave 2. Lad X og Y være derivationer i $\overset{\circ}{F}(M)$ og lad $a, b \in E^1$.

Definer afbildningen $aX+bY: \overset{\circ}{F}(M) \to \overset{\circ}{F}(M)$ ved fastsættelsen:

$$(aX + bY)[f] = aX[f] + bY[f] \qquad \forall f \in \overset{\circ}{F}(M)$$

Vis, at $aX+bY$ er en derivation i $\overset{\circ}{F}(M)$.

Vis dernæst, at mængden af derivationer med ovenstående addition bliver et vektorrum isomorf med $\mathfrak{X}(M)$.

V.hj.a. sætning 4.7 kan vi nu definere et produkt i vektorrummet $\mathfrak{X}(M)$.

Lad $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Først kunne man forsøge at definere et produkt af X og Y som den afbildning $\overset{\circ}{F}(M) \to \overset{\circ}{F}(M)$, der antager værdien $X[Y[f]]$ på $f \in \overset{\circ}{F}(M)$.

Denne afbildning bevarer definitionsmængder, og er klart lineær (tilfredsstiller $\underline{1}$ i sætning 4.7.).

Følgende udregning viser, at den ikke tilfredsstiller $\underline{2}$:

$$\begin{aligned} &X[Y[f \cdot g]] \\ &= X[Y[f] \cdot g + f \cdot Y[g]] \\ &= X[Y[f]] \cdot g + f \cdot X[Y[g]] + Y[f] \cdot X[g] + X[f] \cdot Y[g] \end{aligned}$$

Vi ser, at det er de 2 sidste led, der forhindrer, at 2 er opfyldt. Disse led er imidlertid symmetriske i X og Y. I den tilsvarende afbildning, hvor værdien af $f \in F^{\circ}(M)$ er $Y[X[f]]$, fremkommer disse led derfor også.

Med disse observationer i erindring verificerer man nu let, at afbildningen

$$[X, Y] : F^{\circ}(M) \longrightarrow F^{\circ}(M),$$

defineret ved fastsættelsen

$$[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]] \quad \forall f \in F^{\circ}(M),$$

bevarer definitionsmængde, og tilfredsstiller kravene 1 og 2 i sætning 4.7.

$[X, Y]$ er altså en derivation i $F^{\circ}(M)$, og kan derfor realiseres som et vektorfelt i $\mathfrak{X}(M)$.

Dermed har vi defineret en kompositionsregel i $\mathfrak{X}(M)$. Man kalder $[X, Y]$ for Lie-produktet af vektorfelterne X og Y. Man kan også møde betegnelserne kommutatorproduktet, Lie-parantesen (lie-bracket) eller Poisson-parantesen (Poisson-bracket) af X og Y.

Lie-produktet har følgende egenskaber:
For alle X, Y, Z i $\mathfrak{X}(M)$ og alle $a, b \in E^1$ gælder:

bilinearitet $\quad [aX+bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

$$[X, aY+bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

anti-kommutativitet $\quad [X, Y] = -[Y, X]$

non-associativitet Afvigelsen fra associativitet måles ved Jacobi's identitet

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Opgave 3. Verificer ovenstående egenskaber ved Lie-produktet.

Bemærkning. Hvis vi benytter anti-kommutativiteten kan Jacobi's identitet skrives på formen:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y].$$

Hvis leddet $[[Z, X], Y] = 0$ ville Lie-produktet altså være associativt.

$\mathfrak{X}(M)$ er et reelt vektorrum. Da Lie-produktet er bilineært, bliver $\mathfrak{X}(M)$ med dette produkt en reel algebra (se opgave 4).

Definition 4.8. En anti-kommutativ reel algebra, hvis elementer tilfredsstiller Jacobi's identitet, kaldes en reel Lie-algebra.

Den foregående undersøgelse kan nu sammenfattes i udsagnet:

Mængden af differentiable vektorfelter på en differentiabel mangfoldighed er en reel Lie-algebra.

Opgaver.

Opgave 4. En algebra over et legeme k er en mængde A med 2 indre kompositionsregler (betegnet + og $\odot$) og en multiplikation med skalar fra k (betegnet $\cdot$), således at:

i) A er et vektorrum m.h.t. + og $\cdot$

ii) $\odot$ er distributiv m.h.t. +, d.v.s.

$$a\odot(b + c) = a\odot b + a\odot c \quad \text{og}$$

$$(a + b)\odot c = a\odot c + b\odot c$$

for alle $a, b, c \in A$

iii) $a\odot(\lambda\cdot b) = (\lambda\cdot a)\odot b = \lambda\cdot(a\odot b)$
for alle $a, b \in A$ og alle $\lambda \in k$.

A kaldes henholdsvis kommutativ eller associativ eftersom $\odot$ kommutativ eller associativ. A kaldes anti-kommutiv, hvis $a\odot b = -b\odot a \quad \forall\, a, b \in A$.

En anti-kommutativ algebra over k, hvis elementer tilfredsstiller Jacobi's identitet, kaldes en Lie-algebra over k.

Lad nu A være en associativ algebra over legemet k.
Lad $L(A)$ have samme grundmængde som A, og overtag + og $\cdot$ fra A. Definer en multiplikation i $L(A)$ ved fastsættelsen:

$$[a, b] = a\odot b - b\odot a \qquad \forall\, a, b \in A.$$

Vis, at $L(A)$ med kompositionsreglerne +, $\cdot$ og $[\ ,\ ]$ er en Lie-algebra over k.

Vi observerer, at produktet i $L(A)$ er trivielt (identisk 0), præcis når A er en kommutativ algebra over k.

Dette begrunder, at produktet $[\ ,\ ]$ kaldes <u>kommutatorproduktet</u>.

<u>Opgave 5.</u> Lad $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M^n$ være et kort på en differentiabel mangfoldighed M^n.

Vis, at $[\underline{x}_{u_i}, \underline{x}_{u_j}] =$ 0-feltet på $\underline{x}(D)$ for $i,j=1,\ldots,n$.

<u>Opgave 6.</u> Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed.

Hvis X er et differentiabelt vektorfelt på en åben delmængde $U \subseteq M$, og $f: U \to E^1$ er en differentiabel afbildning, definerer vi vektorfeltet fX på U ved fastsættelsen:

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad \forall\, \underline{p} \in U.$$

Vis, at fX er et differentiabelt vektorfelt på U.

Hvis alle indgående vektorfelter og reelle funktioner er definerede og differentiable på den åbne mængde $U \subseteq M$, skal man vise, at

$$(f+g)X = fX+gX,$$

$$f(X+Y) = fX+fY$$

$$f(gX) = (f\cdot g)X$$

på U.

Vis dernæst, at

$$[fX, gY] = (f\cdot g)[X, Y] + (f\cdot X[g])Y - (g\cdot Y[f])X \quad \text{på } U.$$

<u>Opgave 7.</u> Lad G være en Lie-gruppe, og lad L_a og R_a være henholdsvis venstre og højre translationerne på G (Definition 3.27 og opgave 16 i § 3).

Et differentiabelt vektorfelt X på G kaldes <u>venstre invariant</u>, hvis $(L_a)_{*b}(X_b) = X_{ab}$ $\forall\, a, b \in G$.

Vis, at mængden af venstre invariante vektorfelter på G er et underrum af $\mathfrak{X}(G)$.

Vis, at $[X, Y]$ er et venstre invariant vektorfelt på G, hvis X og Y er venstre invariante vektorfelter på G.

Mængden af venstre invariante vektorfelter på G er derfor en del-Lie-algebra af $\mathfrak{X}(G)$ (Giv en definition af dette begreb).

Et vektorfelt $X \in \mathfrak{X}(G)$ kaldes <u>højre invariant</u>, hvis $(R_a)_{*b}(X_b) = X_{ba}$ $\forall\, a, b \in G$.

Vis, at mængden af højre invariante vektorfelter har de samme egenskaber, som mængden af venstre invariante vektorfelter på G.

Lie-algebraen af venstre invariante vektorfelter på G kaldes Lie-algebraen for Lie-gruppen G. Man bruger betegnelsen $\mathfrak{g}$ for denne Lie-algebra.

Lad $e \in G$ være det neutrale element i G, og lad $X_e \in T_eG$. Vis, at vektorfeltet X, defineret ved fastsættelsen

$$X_a = (L_a)_{*e}(X_e) \in T_aG \qquad \forall a \in G,$$

er et differentiabelt vektorfelt på G. Vis yderligere, at feltet er venstre invariant.

Vis dernæst, at $\mathfrak{g}$ som vektorrum er isomorf med T_eG.

Opgave 8. Lad S^k være enhedssfæren i E^{k+1}.

Altså

$$S^k = \left\{ (u_1, \ldots, u_{k+1}) \in E^{k+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k+1} u_i^2 = 1 \right\} .$$

Vis, at $k+1$ reelle, differentiable funktioner $x_1, \ldots, x_{k+1}$ på S^k er koordinatfunktionerne i E^{k+1} for et differentiabelt vektorfelt X på S^k hvis og kun hvis

$$\sum_{i=1}^{k+1} u_i \cdot x_i(u_1, \ldots, u_{k+1}) = 0 \quad \forall (u_1, \ldots, u_{k+1}) \in S^k$$

Vis, at der findes et differentiabelt vektorfelt på S^{2n-1}, som er forskellig fra 0 i alle punkter af S^{2n-1} for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Hint: Man kan f.eks. benytte, at E^{2n} som mængde er lig $C^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \text{ komplex}\}$, og at

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}(x \cdot y) \qquad \forall\, x, y \in E^{2n} = C^n,$$

hvor $\langle x, y \rangle$ og $x \cdot y$ er de sædvanlige indre produkter i henholdsvis E^{2n} og C^n (som n-dimensionalt komplekst vektorrum).

Bemærkning. Den tilsvarende sætning er falsk for lige-dimensionale sfærer.

Opgave 9. Find 2 lineært uafhængige differentiable vektorfelter på Torus. (Lineært uafhængig betyder lineært uafhængig i ethvert tangentrum.)

Bemærkning. Torus er den eneste orienterbare, kompakte flade med denne egenskab.

§ 5. Tangentbundt konstruktionen som funktor.

I denne og følgende paragraffer vil vi frit benytte "kategori-sprog". Vi vil således f.eks. tale om kategorien af differentiable mangfoldigheder og funktorer fra denne kategori til kategorien af differentiable vektorbundter. I stedet for at give en introduktion til kategoriteori her, er de nødvendige definitioner samlet i Appendix 1.

Vi har i § 4 til enhver differentiabel mangfoldighed M^n knyttet dens tangentbundt $\mathcal{T}(M)$. I denne paragraf vil vi til en differentiabel afbildning $F: M^n \longrightarrow N^k$ knytte en ny differentiabel afbildning $F_*: T(M) \longrightarrow T(N)$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\pi_M"'] & T(N) \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \end{tikzcd}$$

og således at $F_* | T_pM = F_{*p} \ \forall \underline{p} \in M$.

Da F_{*p} er lineær, vil parret af differentiable afbildninger $\mathcal{T}(F) = (F, F_*)$ i § 6 fremtræde som en morfi i kategorien af differentiable vektorbundter. Ligeledes skal vi se, at $\mathcal{T}$ bliver en co-variant funktor fra kategorien af differentiable mangfoldigheder til kategorien af differentiable vektorbundter.

Lad nu $F: M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning.

Da $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_pM$ kan vi definere

$$F_*: T(M) \longrightarrow T(N)$$

ved fastsættelsen:

$$F_* | T_pM = F_{*p} \qquad \forall p \in M.$$

F_* er således samlingen af de lineære afbildninger F_{*p}, og da $F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ er det klart, at med denne definition af F_* kommuterer førstnævnte diagram.

Vi har tidligere nævnt (§ 3), at F_* kaldes <u>differentialet af F</u>, <u>tangentialafbildningen</u> hørende til F eller den <u>inducerede afbildning</u> af F.

Vi skal nu vise, at F_* er en differentiabel afbildning.

Lad dertil $\tilde{\underline{x}}: D\times E^n \longrightarrow T(M)$ og $\tilde{\underline{y}}: E\times E^k \longrightarrow T(N)$ være kort på henholdsvis $T(M)$ og $T(N)$ induceret på sædvanlig måde fra kort $\underline{x}$ og $\underline{y}$ på henholdsvis M og N.

Betragt følgende kommutative diagram:

$$
\begin{tikzcd}
D\times E^n \arrow[r, "\tilde{\underline{x}}"] \arrow[d, "\text{proj.}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(M) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\pi_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(N) \arrow[d, "\tilde{\pi}_N"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E\times E^k \arrow[l, "\tilde{\underline{y}}"'] \arrow[d, "\text{proj.}"] \\
D \arrow[r, "\underline{x}"'] & M \arrow[r, "F"'] & N & E \arrow[l, "\underline{y}"]
\end{tikzcd}
$$

Man konstaterer, at

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}(F_*^{-1}(\tilde{\underline{y}}(E\times E^k))) = \underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E)))\times E^n$$

Da højresiden er en åben delmængde af E^{2n}, fordi F er kontinuert, ser vi, at definitionsmængden for $\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}$ er en åben delmængde af E^{2n}. Vi vil nu vise, at $\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}$ er en differentiabel afbildning. Da $\tilde{\underline{x}}$ og $\tilde{\underline{y}}$ er vilkårlig valgt, vil dette bevise, at F_* er differentiabel.

For at vise, at $\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}$ er differentiabel, betragter vi koordinatfremstillingen af $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$. Antag altså, at

$$\underline{y}^{-1}F\underline{x} = (f_1,\dots,f_k) \quad \text{på} \quad \underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E))).$$

<u>Lemma 5.1</u>. Hvis $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og $(v_1,\dots,v_k) \in E$ er koordinaterne for henholdsvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ gælder med ovenstående notation, at

$$F_*(\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)\, \underline{y}_{v_j}(f_1(u_1,\dots,u_n),\dots, f_k(u_1,\dots,u_n))$$

for alle $(u_1,\dots,u_n) \in \underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E)))$.

<u>Opgave 1</u>. Bevis lemma 5.1.

Idet $(u_1,\dots,u_n, t_1,\dots,t_n) \in D\times E^n$ og

$(v_1,\dots,v_k,\ s_1,\dots,s_k) \in E\times E^k$ er koordinaterne for henholdsvis $\tilde{\underline{x}}$ og $\tilde{\underline{y}}$, får vi v. hj. a lemma 5.1:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}(u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n)\\
&= \tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)\Big)\\
&= \tilde{\underline{y}}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)\ \underline{y}_{v_j}(f_1,\dots,f_k)\Big)\Big)\\
&= \tilde{\underline{y}}^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)t_i\Big)\ \underline{y}_{v_j}(f_1,\dots,f_k)\Big)\\
&= \Big(f_1,\dots,f_k,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial u_j}t_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_j}t_j\Big)
\end{aligned}$$

$$\forall (u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n) \in \underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E)))\times E^n$$

(funktionerne f_i og de partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ skal alle steder i udregningen tages i punktet $(u_1,\dots,u_n)$).

Da også de partielle afledede er differentiable funktioner, fremgår af dette udtryk, at $\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}$ er en differentiabel afbildning. Dermed har vi bevist, at F_* er differentiabel.

De partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ er elementerne i Jacobiantmatricen for $\underline{y}^{-1}F\underline{x}$. Ovenstående koordinatfremstilling af $\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}$ kan derfor skrives på formen:

$$\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}} = (\underline{y}^{-1}F\underline{x},\ d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})),$$

hvor

$$\begin{aligned}
&\tilde{\underline{y}}^{-1}F_*\tilde{\underline{x}}(u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n)\\
&=(\underline{y}^{-1}F\underline{x}(u_1,\dots,u_n),\ d(\underline{y}^{-1}F\underline{x})_{(u_1,\dots,u_n)}(t_1,\dots,t_n)).
\end{aligned}$$

$$\forall (u_1,\dots,u_n,\ t_1,\dots,t_n) \in \underline{x}^{-1}(F^{-1}(\underline{y}(E)))\times E^n.$$

Hvis $F\colon M^n \longrightarrow N^k$ og $G\colon N^k \longrightarrow L^m$ er differentiable afbildninger, kan vi betragte differentialerne F_* og G_*, og parrene af afbildninger $\tau(F) = (F,\ F_*)$ og $\tau(G) = (G\ ,\ G_*)$. Disse afbildninger registreres i følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\pi_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(N) \arrow[r, "G_*"] \arrow[d, "\pi_N"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(L) \arrow[d, "\pi_L"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \arrow[r, "G"'] & L \end{tikzcd}$$

Heraf fremgår, at parret af afbildninger (GF, G_*F_*) gør følgende diagram kommutativt:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "G_*F_*"] \arrow[d, "\pi_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(L) \arrow[d, "\pi_L"] \\ M \arrow[r, "GF"'] & L \end{tikzcd}$$

I § 6 skal vi se, at dette par af afbildninger netop er den morfi i kategorien af differentiable vektorbundter, som repræsenterer sammensætningen af morfier $\tau(G)\circ\tau(F)$. På dette sted definerer vi simpelthen:

$$\tau(G)\circ\tau(F) = (GF, G_*F_*)$$

Hvis 1_M: $M \to M$ er den identiske afbildning, sætter vi

$$1_{\tau(M)} = (1_M, (1_M)_*) = (1_M, 1_{T(M)}).$$

Med denne notation får vi nu følgende sætning.

Sætning 5.2. Hvis $F: M^n \to N^k$ og $G: N^k \to L^m$ er differentiable afbildninger, gælder:

1. $(GF)_* = G_*F_*$ 　　　 1a. $\tau(GF) = \tau(G)\circ\tau(F)$

2. $(1_M)_* = 1_{T(M)}$ 　　　 2a. $\tau(1_M) = 1_{\tau(M)}$

Bevis. Sætning 3.6. giver direkte 1 og 2. 1a og 2a er i det væsentlige kun 1 og 2.

I litteraturen møder man ofte betegnelsen $T(F)$ for differentialet F_* af $F: M \to N$. Tilsvarende bruger man så betegnelsen $T_p(F)$ for den lineære afbildning F_{*p} $\forall p\in M$. Genopskrives 1 og 2 i sætning 5.2 med denne notation, fås:

1 $T(GF) = T(G)T(F)$ og 2 $T(1_M) = 1_{T(M)}$

Dette viser, at T er en covariant funktor fra kategorien af differentiable mangfoldigheder ind i sig selv.

Dette udsagn rummer ikke, at $F_*|T_pM = T(F)|T_pM$ er lineær $\forall p \in M$, og at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "T(F)"] \arrow[d, "\pi_M"'] & T(N) \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \end{tikzcd}$$

I §6 skal vi se, at alt dette rummes i udsagnet:

τ er en covariant funktor fra kategorien af differentiable mangfoldigheder til kategorien af differentiable vektorbundter.

Dette udsagn viser sig præcis at være indholdet af 1a og 2a i sætning 5.2.

I resten af denne paragraf vil vi undersøge muligheden for at overføre et vektorfelt fra en differentiabel mangfoldighed til en anden v.hj.a. en differentiabel afbildning.

Lad derfor $F: M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning, og antag, at X er et vektorfelt på M.

Betragt diagrammet:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, shift right, "\pi_M"'] & T(N) \arrow[d, shift right, "\pi_N"'] \\ M \arrow[r, "F"'] \arrow[u, shift right, "X"'] & N \arrow[u, shift right, dotted, "F_*(X)"'] \end{tikzcd}$$

hvor $\pi_M X = 1_M$, da X er et vektorfelt på M.

Hvis F er en diffeomorfi (Definition 3.7), kan vi betragte afbildningen:

$$F_*XF^{-1}: N \longrightarrow T(N)$$

Følgende udregning viser, at F_*XF^{-1} er et vektorfelt på N:

$$\begin{aligned} \pi_N(F_*XF^{-1}) &= (\pi_N F_*)(XF^{-1}) = (F\pi_M)(XF^{-1}) \\ &= F(\pi_M X)F^{-1} = F\, 1_M F^{-1} \\ &= 1_N \end{aligned}$$

Da F^{-1} og F_* er differentiable afbildninger, er det klart, at

$$F_*XF^{-1} \in \mathfrak{X}(N) \quad \text{hvis} \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

Idet F stadig er en diffeomorfi, får vi for alle $\underline{q} \in N$:

$$(F_*XF^{-1})(\underline{q}) = F_*(X(F^{-1}(\underline{q}))) = F_*(X_{F^{-1}(\underline{q})}).$$

Af denne grund betegner man vektorfeltet F_*XF^{-1} med $F_*(X)$. Altså:

$$F_*(X) = F_*XF^{-1}$$

for ethvert vektorfelt X på M.

Følgende lemma viser, hvordan $F_*(X)$ virker som derivation.

Lemma 5.3. Lad $F: M \longrightarrow N$ være en diffeomorfi, og lad $X \in \mathfrak{X}(M)$. Så gælder, at

$$F_*(X)\,[f] = X[fF]\,F^{-1}$$

for ethvert $f \in F^{\infty}(N)$.

Bevis. Antag, at $f: U \subseteq N \longrightarrow E^1$ tilhører $F^{\infty}(N)$.

For $\underline{q} \in U$ får vi:

$$\begin{aligned}(F_*(X)[f])(\underline{q}) &= F_*(X)_{\underline{q}}\,[f] \\ &= F_*(X_{F^{-1}(q)})\,[f] \\ &= X_{F^{-1}(q)}\,[fF] \\ &= (X[fF]F^{-1})(\underline{q}).\end{aligned}$$

Da denne udregning gælder for ethvert $\underline{q} \in U$, er lemma 5.3 bevist.

Hvordan med Lie-produktet? Følgende lemma giver et tilfredsstillende svar.

Lemma 5.4. Lad $F: M \longrightarrow N$ være en diffeomorfi. Så gælder, at

$$F_*([X, Y]) = [F_*(X), F_*(Y)]$$

for ethvert $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Bevis. Under gentagne anvendelser af lemma 5.3 får man for $f \in F^{\infty}(N)$:

$$F_*([X, Y])[f]$$
$$= [X, Y][fF]F^{-1}$$
$$= (X[Y[fF]] - Y[X[fF]])F^{-1}$$
$$= (X[(Y[fF]F^{-1})F])F^{-1} - (Y[(X[fF]F^{-1})F])F^{-1}$$
$$= X[(F_*(Y)[f])F]F^{-1} - Y[(F_*(X)[f])F]F^{-1}$$
$$= F_*(X)[F_*(Y)[f]] - F_*(Y)[F_*(X)[f]]$$
$$= [F_*(X), F_*(Y)][f].$$

Da denne udregning gælder for ethvert $f \in F^{\infty}(N)$, virker vektorfelterne $F_*([X, Y])$ og $[F_*(X), F_*(Y)]$ ens som derivationer, og er derfor ifølge sætning 4.7 ens. Dermed er lemma 5.4 bevist.

Hvis F er en diffeomorfi bevarer F_* altså Lie-produktet. Det er endvidere let at indse, at

$$F_*(aX + bY) = aF_*(X) + bF_*(Y)$$

for ethvert $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ og $a, b \in E^1$.

En <u>Lie-algebra homomorfi</u> fra én Lie-algebra ind i en anden er en lineær afbildning, som bevarer Lie-produktet(kommutatorproduktet). En <u>Lie-algebra isomorfi</u> er en bijektiv Lie-algebra homomorfi. Ovenstående diskussion munder nu ud i følgende:

<u>Hvis $F: M \longrightarrow N$ er en diffeomorfi, er F_* opfattet som afbildning $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ en Lie-algebra isomorfi</u>.

<u>Opgave 2</u>. Se denne konklusion efter i sømmene.

Når $F: M^n \longrightarrow N^k$ ikke er en diffeomorfi, er det ikke altid muligt at overføre et vektorfelt X fra M til N. Opgaverne 4, 5, 6 og 7 omhandler problemstillinger af denne art.

<u>Opgaver</u>.

<u>Opgave 3</u>. Lad G_1 og G_2 være Lie-grupper. En gruppe homomorfi $\sigma: G_1 \longrightarrow G_2$, som samtidig er en differentiabel afbildning, kaldes en <u>Lie-gruppe homomorfi</u>. Hvis der yderligere gælder, at σ er en diffeomorfi kaldes σ <u>en Lie-gruppe isomorfi</u>.

Vis, at isomorfe Lie-grupper har isomorfe Lie-algebraer (Opgave 7 § 4).

Definition 5.5. Lad $F: M^n \to N^k$ være en differentiabel afbildning. Et vektorfelt X på M og et vektorfelt Y på N kaldes F-beslægtede (F-related), hvis

$$Y_{F(p)} = F_*(X_p) \quad \forall p \in M.$$

Opgave 4. Notation som i definition 5.5.

Vis, at X og Y er F-beslægtede hvis og kun hvis det for enhver differentiabel funktion $f: U \subseteq N \to E^1$ gælder, at

$$Y[f]F = X[fF] \quad \text{på} \quad F^{-1}(U).$$

Opgave 5. Lad $F: M \to N$ være en differentiabel afbildning, og antag, at X_i og Y_i for $i = 1,2$ er F-beslægtede differentiable vektorfelter på M og N.

Vis, at $[X_1, X_2]$ og $[Y_1, Y_2]$ er F-beslægtede differentiable vektorfelter.

Opgave 6. Bevis følgende sætning:

Lad $F: M^n \to N^k$ være en differentiabel afbildning. Hvis F er på, findes der til ethvert vektorfelt X på M højst et vektorfelt Y på N, således at X og Y er F-beslægtede. Hvis F er en immersion, findes der til ethvert vektorfelt Y på N højst et vektorfelt X på M, således at X og Y er F-beslægtede. I det sidste tilfælde gælder, at et sådant X findes, hvis og kun hvis $Y_{F(p)} \in F_*(T_pM)$ $\forall p \in M$. Yderligere gælder, at X er et differentiabelt vektorfelt på M, hvis Y er et differentiabelt vektorfelt på N.

Opgave 7. Lad $M = E^1$ og $N = S^1$. Find en immersion F af M på N og et vektorfelt X på M, således at X og Y ikke er F-beslægtede for noget vektorfelt Y på N.

Opgave 8. Lad G_1 og G_2 være Lie-grupper og lad $\sigma: G_1 \to G_2$ være en Lie-gruppe homomorfi.

Vis, at der til ethvert venstre invariant vektorfelt X på G_1 findes et entydig bestemt venstre invariant vektorfelt Y på G_2, således at X og Y er σ-beslægtede.

Vis, at σ derved definerer en Lie-algebra homomorfi $d\sigma: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "d\sigma"] \arrow[d] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d] \\ T_e G_1 \arrow[r, "\sigma_{*e}"'] & T_e G_2 \end{tikzcd}$$,

hvor afbildningerne $\mathfrak{g}_i \longrightarrow T_e G_i$ for $i=1,2$ afbilder et venstre invariant vektorfelt på tangentvektoren i $e \in G_i$.

Vis, at $L(G)= \mathfrak{g}$ og $L(\sigma) = d\sigma$ definerer en covariant funktor L fra kategorien af Lie-grupper til kategorien af Lie-algebraer.

Undersøgelse af funktoren L er af vital betydning i teorien for Lie-grupper.

§ 6. Differentiable vektorbundter.

I denne paragraf vil vi beskrive kategorien af differentiable vektorbundter. Tangentbundtet for en differentiabel mangfoldighed er et specielt objekt i denne kategori. Egenskaberne ved et tangentbundt giver ideen til det almene begreb.

Definition 6.1. Et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt er en trippel (E,π,B), hvor E og B er differentiable mangfoldigheder, og $\pi: E \to B$ er en differentiabel afbildning, således at

1. $\pi^{-1}(b)$ har struktur som et m-dimensionalt reelt vektorrum for ethvert $b \in B$.

2. Ethvert punkt $b \in B$ har en åben omegn U i B med tilhørende diffeomorfi

$$h: U \times E^m \longrightarrow \pi^{-1}(U) ,$$

således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd} U \times E^m \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "proj."'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi|\pi^{-1}(U)"] \\ & U & \end{tikzcd} ,$$

og således at afbildningen $h_x: E^m \to \pi^{-1}(x)$ er en isomorfi for ethvert $x \in U$, når h_x er defineret ved fastsættelsen:

$$h_x(v) = h(x, v) \qquad \forall v \in E^m.$$

Notation. E kaldes total rummet, B kaldes basis rummet og π kaldes projektionen i vektorbundtet. Endvidere kaldes $\pi^{-1}(b)$ for fiberet over $b \in B$. Vektorbundtets dimension er altså den fælles dimension af alle fibrene.

Vi vil betegne vektorbundter med ξ, η, ζ etc. Hvis misforståelser er mulige, vil vi benytte betegnelserne $E(\xi)$, π_ξ og $B(\xi)$ for elementerne i triplen hørende til vektorbundtet ξ.

Bemærkninger. I 2 har $U \times E^m$ produktstrukturen af de differentiable strukturer på U (U åben delmængde af B) og E^m (standard strukturen). Da $\pi^{-1}(U)$ er en åben delmængde af E, har denne mængde en differentiabel struktur induceret fra E. Udsagnet "h er en diffeomorfi" er dermed tillagt mening.

Når E^m opfattes som reelt vektorrum på sædvanlig måde, har udsagnet "h_x er en isomorfi" mening p.gr.a. 1.

Exempel 6.2. Lad M være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed.

Det m-dimensionale trivielle vektorbundt over M er triplen

$$\varepsilon^m = (M \times E^m, \pi, M) \quad ,$$

hvor $\pi : M \times E^m \longrightarrow M$ er projektionen på første faktor, og $M \times E^m$ har produktstruktur.

Det er let at indse, at ε^m virkelig er et differentiabelt vektorbundt.

Exempel 6.3. Lad M^n være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed.

Tangentbundtet for M er triplen

$$\tau(M) = (T(M), \pi_M, M)$$

$\pi_M^{-1}(p) = T_pM$ er et n-dimensionalt vektorrum $\forall p \in M$.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M, betragter vi diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\underline{x}(D) \times E^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi_M^{-1}(\underline{x}(D)) \arrow[dl, "\pi_M | \pi_M^{-1}(\underline{x}(D))"] \\
& \underline{x}(D) &
\end{tikzcd}$$

hvor $h(\underline{x}(u_1, \ldots, u_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{x}_{u_i}(u_1, \ldots, u_n)$.

Da $h = \tilde{\underline{x}} \circ (\underline{x}^{-1} \times 1_{E^n})$ er det let at indse, at h er en diffeomorfi.

Dermed er det klart, at $\tau(M)$ er et n-dimensionalt differentiabelt vektorbundt.

Exempel 6.4. Lad M^n være en immersed del-mangfoldighed af E^{n+m}.

Lad $\langle \cdot , \cdot \rangle$ være det sædvanlige indre produkt i E^{n+m}. Da tangentrummet i et punkt af E^{n+m} på kanonisk måde er isomorf med E^{n+m}, får vi derfor et indre produkt $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ i alle tangentrum T_pE^{n+m}.

Lad $I : M^n \longrightarrow E^{n+m}$ være inklusionsafbildningen.

For $\underline{p} \in M$ sætter vi

$$N_pM = \{ \underline{v}_p \in T_pE^{n+m} \mid \langle I_*(\underline{w}_p), \underline{v}_p \rangle_p = 0 \quad \forall \underline{w}_p \in T_pM \}$$

N_pM er altså mængden af vektorer i T_pE^{n+m}, som er ortogonale på T_pM.

Da I er en immersion, bliver N_pM et m-dimensionalt underrum af vektorrummet T_pE^{n+m}.

Vi betrager nu triplen

$$\nu(M)=(N(M)\ ,\ \pi_{\nu(M)}, M),$$

hvor $N(M)=\bigcup_{p\in M} N_pM$ og $\pi_{\nu(M)}: N(M)\longrightarrow M$ er afbildningen $\underline{v}_p\in N_pM \rightsquigarrow p\in M$.

$N(M)$ kan gives struktur som en $n+m$-dimensional differentiabel mangfoldighed, således at $\nu(M)$ bliver et m-dimensionalt vektorbundt. Dette bundt kaldes <u>normalbundtet</u> for M^n i E^{n+m}.

<u>Den differentiable struktur på $N(M)$:</u>

Lad $\mathcal{P}$ være et del-atlas af arvede koordinatsystemer på M (sætning 3.23).

Et kort i $\mathcal{P}$ har altså formen

$$\underline{x}|D\cap E^n:\ D\cap E^n\longrightarrow M, \text{ hvor}$$

$$\underline{x}: D\subseteqq E^{n+m}\longrightarrow E^{n+m}$$

er et kort på E^{n+m}.

Idet $(u_1,\dots,u_{n+m})\in D$, betragter vi vektorfelterne $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n+m}}$ på $\underline{x}(D)$. Da disse vektorfelter giver en basis i ethvert tangentrum over $\underline{x}(D)$, kan vi ved Gram-Schmidt ortogonaliseringsproces konstruere et system af vektorfelter på $\underline{x}(D)$, som giver en ortonormal basis i ethvert tangentrum over $\underline{x}(D)$. Vi definerer blot felterne $\hat{\underline{x}}_{u_1},\dots,\hat{\underline{x}}_{u_{n+m}}$ rekursivt ved

$$\hat{\underline{x}}_{u_1}=\frac{\underline{x}_{u_1}}{\langle \underline{x}_{u_1},\underline{x}_{u_1}\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

$$\hat{\underline{x}}_{u_i}=\frac{\underline{x}_{u_i}-\sum_{j=1}^{i-1}\langle \underline{x}_{u_i},\hat{\underline{x}}_{u_j}\rangle\hat{\underline{x}}_{u_j}}{\langle \text{Tæller},\ \text{Tæller}\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

for $i=2,\dots,n+m$.

Da $\underline{x}|D\cap E^n$ er et arvet koordinatsystem på M, er felterne $\hat{\underline{x}}_{u_1},\dots,\hat{\underline{x}}_{u_n}$ en basis i tangentrummene for M over $\underline{x}(D\cap E^n)$.

Idet $\hat{\underline{x}}_{u_1},\dots\hat{\underline{x}}_{u_{n+m}}$ er ortonormale, er det let at indse, at

$$\hat{\underline{x}}:(D\cap E^n)\times E^m\longrightarrow \pi^{-1}_{\nu(M)}(\underline{x}(D\cap E^n))$$

bliver et koordinatsystem på $N(M)$, når $\hat{\underline{x}}$ defineres ved fastsættelsen:

$$\hat{\underline{x}}(u_1,\ldots,u_n,\ t_1,\ldots,t_m) = \sum_{i=1}^{m} t_i \hat{\underline{x}}_{u_{i+n}}(u_1,\ldots,u_n,\ 0,\ldots,0)$$

for $(u_1,\ldots,u_n) \in D \cap E^n$ og $(t_1,\ldots,t_m) \in E^m$.

Det er let at indse, at 2 koordinatsystemer $\hat{\underline{x}}$ og $\hat{\underline{y}}$ afledt fra 2 koordinatsystemer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i $\mathcal{P}$ overlapper differentiabelt. $\mathcal{P}$ giver derfor et del-atlas $\hat{\mathcal{P}}$ på $N(M)$. Det er klart, at fordragelige del-atlas på M giver fordragelige del-atlas på $N(M)$. Vi får derfor en veldefineret differentiabel struktur på $N(M)$.

Når $N(M)$ gives denne struktur bliver $\pi_{\nu(M)}$ en differentiabel afbildning (Hvorfor?).

Overvejelser analoge til dem i exempel 6.3 viser så, at $\nu(M)$ er et m-dimensionalt vektorbundt.

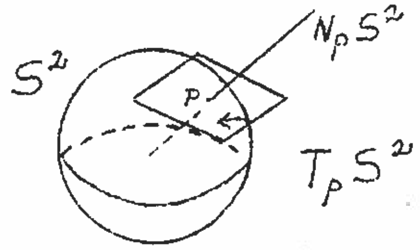


Fig. 11.

Før næste exempel indskyder vi nogle be ærkninger om kvotienttopologien på en mængde.

Lad $k: X \longrightarrow M$ være en afbildning fra et topologisk rum X ind i en mængde M.

Betragt følgende system af delmængder i M

$$\mathcal{T} = \{ O \subseteq M \mid k^{-1}(O) \text{ åben i } X \}.$$

Det er let at se, at $\mathcal{T}$ tilfredsstiller:

i) $\emptyset,\ M \in \mathcal{T}$

ii) $O_1,\ldots,O_n \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

iii) $O_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in \Gamma \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} O_\alpha \in \mathcal{T}$

(verificer dette).

$\mathcal{T}$ bestemmer derfor en topologi på M med $O \in \mathcal{T}$ som de åbne mængder.

Denne topologi kaldes <u>kvotienttopologien</u> på M bestemt af k.

$\mathcal{T}$ er den fineste topologi på M, så k er kontinuert.

Bemærk endvidere, at når M har kvotienttopologi bestemt ved k, er $f: M \to Y$, hvor Y er et topologisk rum, kontinuert, hvis og kun hvis $fk: X \to Y$ er kontinuert.

Exempel 6.5. I det følgende betegner S^n enhedssfæren i E^{n+1}.

Lad $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ være koordinaterne i E^{n+1}. Så har vi:

$$S^n = \left\{ (u_1, \ldots, u_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 = 1 \right\} .$$

Betragt afbildningen $F: E^{n+1} \to E^1$ defineret ved fastsættelsen:

$$F(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 \; -1$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$.

Da F har rang 1 i alle punkter af S^n, følger det, at $S^n = F^{-1}(0)$ er en del-mangfoldighed af E^{n+1} (Opgave 15 § 3, subsidiært sætning 3.14).

Lad $A: S^n \to S^n$ være den antipodiske afbildning, altså

$$A(\underline{p}) = -\underline{p} \quad \forall \underline{p} \in S^n$$

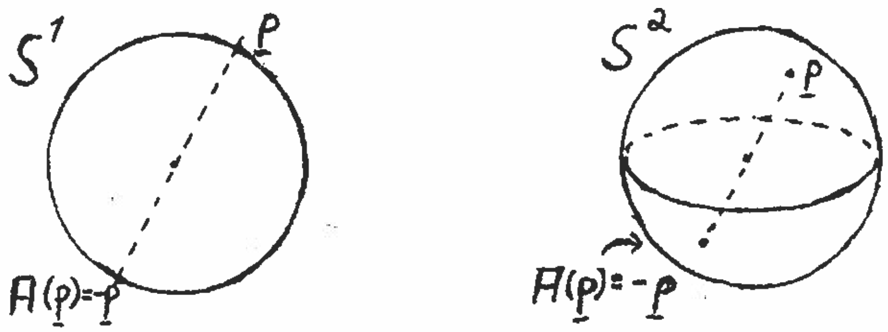


Fig. 12.

Det er let at indse, at A er en diffeomorfi med sig selv som invers.

Definition af RP^n og $\overline{RP^n}$. På S^n definerer vi en ækvivalensrelation $\sim$ ved fastsættelsen:

$$\underline{p} \sim \underline{q} \iff \underline{p} = \underline{q} \quad \text{eller} \quad \underline{p} = -\underline{q} .$$

Lad RP^n være mængden af ækvivalensklasser ved $\sim$, og lad

$$k_1 : S^n \longrightarrow RP^n$$

være projektionen af et element på sin ækvivalensklasse. Hvis $cls_1(\underline{p}) = \{\underline{p}, -\underline{p}\}$ betegner ækvivalensklassen for $\underline{p}$ ved $\sim$, får vi altså:

$$k_1(\underline{p}) = cls_1(\underline{p}) \qquad \forall \underline{p} \in S^n$$

RP^n med kvotienttopologien bestemt v.hj.a. k_1 kaldes <u>det n-dimensionale reelle projektive rum</u>.

Betragt nu $E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ og definer heri ækvivalensrelationen $\approx$ ved fastsættelsen:

$$\underline{u} \approx \underline{v} \iff \exists\, a \in E^1 : (u_1, \ldots, u_{n+1}) = a\,(v_1, \ldots, v_{n+1}).$$

Vi observerer, at en ækvivalensklasse ved $\approx$ er en linie i E^{n+1} gennem $\underline{0}$ pånær $\underline{0}$. Ækvivalensklassen for $\underline{u} \in E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ betegnes $cls_2(\underline{u})$.

Lad $\overline{RP}^n$ være mængden af ækvivalensklasser ved $\approx$, og lad

$$k_2 : E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \overline{RP}^n$$

være projektionen af et element på sin ækvivalensklasse.

Giv $\overline{RP}^n$ kvotienttopologien bestemt v.hj.a. k_2.

De topologiske rum RP^n og $\overline{RP}^n$ indgår i følgende diagram:

$$\begin{array}{ccc}
S^n & \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} & E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \\
\Big\downarrow k_1 & & \Big\downarrow k_2 \\
RP^n & \underset{\bar{i}}{\overset{\bar{r}}{\rightleftarrows}} & \overline{RP}^n
\end{array}$$

hvor $i(\underline{p}) = \underline{p} \qquad \forall \underline{p} \in S^n$

$$r(\underline{u}) = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|} \qquad \forall \underline{u} \in E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$$

$$\bar{i}\,(cls_1(\underline{p})) = cls_2(\underline{p}) \qquad \forall \underline{p} \in S^n$$

$$\bar{r}\,(cls_2(\underline{u})) = cls_1\left(\frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}\right) \quad \forall \underline{u} \in E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$$

$\|\cdot\|$ betegner den sædvanlige norm i E^{n+1}. Det er let at indse, at $\bar{i}$ og $\bar{r}$ **ikke afhænger af valget** af repræsentanter.

Det er klart, at r og i er kontinuerte afbildninger. Endvidere konstaterer man, at

1) $k_2 i = \bar{i} k_1$ og 2) $k_1 r = \bar{r} k_2$.

Fra disse relationer følger let, at $\bar{i}$ og $\bar{r}$ kontinuerte afbildninger (husk, at RP^n og $\overline{RP^n}$ har kvotienttopologi bestemt af henholdsvis k_1 og k_2).

Lad os f.eks. bevise, at $\bar{i}$ er kontinuert. Lad dertil $\mathcal{U}$ være en åben mængde i $\overline{RP^n}$. Vi skal vise, at $\bar{i}^{-1}(\mathcal{U})$ er åben i RP^n. Dette afgøres ved at undersøge, om $k_1^{-1}(\bar{i}^{-1}(\mathcal{U}))$ er åben i S^n. Fra 1) følger, at $k_1^{-1}(\bar{i}^{-1}(\mathcal{U})) = i^{-1}(k_2^{-1}(\mathcal{U}))$. Da $\overline{RP^n}$ har kvotienttopologi er $k_2^{-1}(\mathcal{U})$ åben i $E^{n+1}\setminus\{\underline{0}\}$. Da i er kontinuert følger så, at $i^{-1}(k_2^{-1}(\mathcal{U}))$ er åben i S^n. Derfor er $k_1^{-1}(\bar{i}^{-1}(\mathcal{U}))$ åben i S^n. Dermed har vi vist, at $\bar{i}$ er kontinuert.

Ved at benytte 2) fås tilsvarende, at $\bar{r}$ er kontinuert(Prøv).

Da $cls_2(\underline{u}) = cls_2(\frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|})$ $\forall \underline{u} \in E^{n+1}\setminus\{\underline{0}\}$ følger umiddelbart, at

$$\bar{r}\,\bar{i} = 1_{RP^n} \quad \text{og} \quad \bar{i}\,\bar{r} = 1_{\overline{RP^n}}.$$

Dette viser, at RP^n og $\overline{RP^n}$ er homeomorfe topologiske rum. $\overline{RP^n}$ er derfor blot en anden måde at definere det n-dimensionale reelle projektive rum på. Begge definitioner mødes i litteraturen. Fordelen ved den sidste definition ($\overline{RP^n}$) er, at den umiddelbart kan generaliseres til projektive rum over et vilkårligt legeme.

<u>Differentiabel struktur på RP^n</u>.

Kald et kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow S^n$ på S^n "lille", hvis $\|\underline{p} - \underline{q}\| < 1$ $\forall \underline{p}, \underline{q} \in \underline{x}(D)$. $\underline{x}(D)$ indeholder således intet par af antipodiske punkter. Hvis $\underline{x}$ er "lille", bliver afbildningen

$$k_1\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow RP^n$$

derfor 1-1-tydig.

Hvis $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow S^n$ og $\underline{y}: E \subseteq E^n \longrightarrow S^n$ er "små" kort på S^n, og

$$k_1\underline{x}(D) \cap k_1\underline{y}(E) \neq \emptyset,$$

gælder præcist (Hvorfor ?) et af følgende udsagn:

i) $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$ eller ii) $A\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$.

Hvis i) gælder, fås $(k_1\underline{y})^{-1}(k_1\underline{x}) = \underline{y}^{-1}\underline{x}$

Hvis ii) gælder, fås $(k_1\underline{y})^{-1}(k_1\underline{x}) = \underline{y}^{-1}(A\underline{x})$

$\underline{y}^{-1}\underline{x}$ er differentiabel, da $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er kort på S^n.
Da $A: S^n \longrightarrow S^n$ er en differentiabel afbildning, og $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er kort på S^n, er $\underline{y}^{-1}(A\underline{x})$ en differentiabel afbildning.

Et del-atlas af "små" kort på S^n giver derfor et del-atlas for en differentiabel struktur på RP^n. Da fordragelige del-atlas af "små" kort på S^n giver fordragelige del-atlas på RP^n, har vi dermed vist, at RP^n kan gives struktur som en differentiabel mangfoldighed. Med denne struktur på RP^n er det klart, at $k_1: S^n \longrightarrow RP^n$ bliver en differentiabel afbildning.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \rightarrow S^n$ er et "lille" kort på S^n, er $k_1^{-1}(k_1\underline{x}(D)) = \underline{x}(D) \cup A\underline{x}(D)$. Da A er en diffeomorfi, fremgår det, at $k_1^{-1}(k_1\underline{x}(D))$ er en åben delmængde af S^n. Af dette følger umiddelbart, at topologien på RP^n svarende til den differentiable struktur på RP^n (Sætning 1.13) netop er kvotienttopologien bestemt af k_1.

Opgave 2 giver en metode til at opnå den differentiable struktur på det reelle projektive rum, når man bruger $\overline{RP^n}$ som model.

<u>Det Kanoniske liniebundt over RP^n</u>. Et 1-dimensionalt vektorbundt kaldes ofte et liniebundt. Over RP^n findes et liniebundt, der på naturlig måde er knyttet til RP^n. Dette liniebundt kaldes det kanoniske liniebundt over RP^n, og betegnes ofte med ξ_n^1. (1 for dimensionen og n for RP^n).

Konstruktion af ξ_n^1:

Et punkt $\underline{p} \in RP^n$ bestemmer et 1-dimensionalt underrum L_p i E^{n+1} (linie gennem $\underline{0}$). Tænker man på modellen $\overline{RP^n}$ er et punkt "næsten" en sådan linie.

Sæt

$$E(\xi_n^1) = \bigcup_{\underline{p} \in RP^n} L_{\underline{p}} \quad \text{(disjunkt forening)}$$

og definer

$$\pi_{\xi_n^1} : E(\xi_n^1) \longrightarrow RP^n$$

ved fastsættelsen $L_{\underline{p}} \rightsquigarrow \underline{p}$.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow S^n$ er et "lille" kort på S^n med $(u_1, \ldots, u_n) \in D$, får vi en 1-1-tydig afbildning

$$\check{\underline{x}} : D \times E^1 \to \pi_{\xi_n^1}^{-1}(k_1\underline{x}(D))$$

defineret ved fastsættelsen

$$\check{\underline{x}}(u_1,\ldots,u_n, t) = t\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) \quad \text{i rummet} \quad L_{\underline{x}(n)}$$

for $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ og $t \in E^1$.

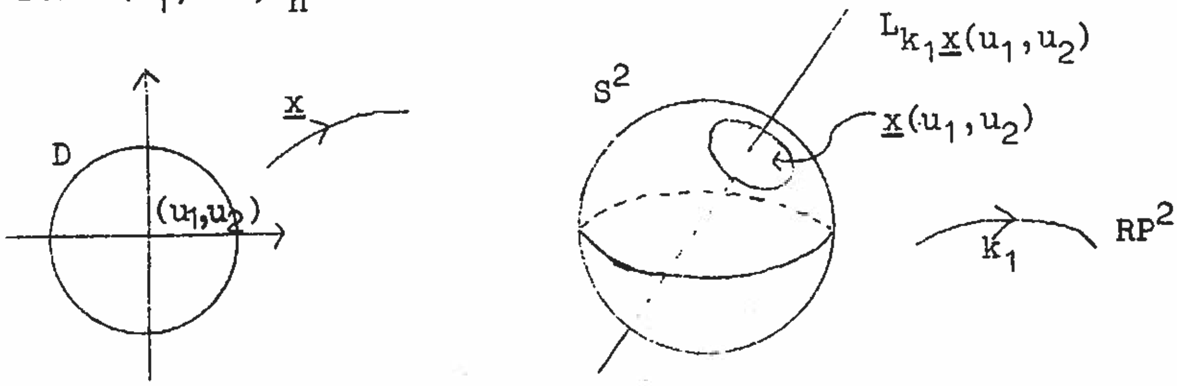


Fig. 13.

Hvis $\check{\underline{x}}$ og $\check{\underline{y}}$ er 2 sådanne koordinatsystemer på $E(\xi_n^1)$ får vi:

$$\check{\underline{y}}^{-1}\check{\underline{x}}(u_1,\ldots,u_n, t) = \check{\underline{y}}^{-1}(t\underline{x}(u_1,\ldots,u_n))$$

$$= (\underline{y}^{-1}\underline{x}(u_1,\ldots,u_n),t) \quad \text{i tilfælde (i)}$$

$$= (\underline{y}^{-1}A\,\underline{x}(u_1,\ldots,u_n), t) \quad \text{i tilfælde (ii)}.$$

Dette viser det glatte overlap af koordinatsystemerne $\check{\underline{x}},\check{\underline{y}}$ ... . Disse koordinatsystemer definerer derfor en differentiabel struktur på $E(\xi_n^1)$. Med denne struktur på $E(\xi_n^1)$ bliver $\pi_{\xi_n^1}$ en differentiabel afbildning.

Hvis $\underline{x} : D \subseteq E^n \to S^n$ stadig er et "lille" kort på S^n, definerer vi til slut

$$h : k_1\underline{x}(D) \times E^1 \longrightarrow \pi_{\xi_n^1}^{-1}(k_1\underline{x}(D))$$

ved fastsættelsen:

$$h(k_1\underline{x}(u_1,\ldots,u_n), t) = t\underline{x}(u_1,\ldots,u_n).$$

Det er klart, at h er en diffeomorfi, og at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
k_1\underline{x}(D)\times E^1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi_{\xi_n^1}^{-1}(k_1\underline{x}(D)) \arrow[dl, "\pi_{\xi_1^n} \mid \pi_{\xi_n^1}^{-1}(k_1\underline{x}(D))"] \\
& k_1\underline{x}(D) &
\end{tikzcd}$$

Dermed har vi vist, at

$$\xi_n^1 = (E(\xi_n^1), \pi_{\xi_n^1}, RP^n)$$

er et differentiabelt vektorbundt.

Dette afslutter eksempel 6.5.

Opgave 1. Betragt $S^n \subseteq E^{n+1}$.

Find ved projektion på koordinathyperplanerne i E^{n+1} et del-atlas på S^n med $2(n+1)$ kort.

Find ved stereografisk projektion (Opgave 2 § 3) et del-atlas på S^n med 2 kort.

Findes der et del-atlas på S^n med 1 kort?

Vis, at den antipodiske afbildning $A: S^n \longrightarrow S^n$ er en diffeomorfi.

Vis, at $A_*(\underline{v}_p) = (-\underline{v})_{-p}$ $\forall\, \underline{v}_p \in T_pS^n$, når en tangentvektor $\underline{w}_q \in T_qS^n$ identificeres med $I_*(\underline{w}_q) \in T_qE^{n+1}$ som i sætning 4.6.

Opgave 2. Betragt modellen $\overline{RP^n}$ af det n-dimensionale reelle projektive rum.

Lad $cls_2(s_1,\dots,s_{n+1})$ være et punkt i $\overline{RP^n}$. Da $(s_1,\dots,s_{n+1}) \neq \underline{0} \in E^{n+1}$, findes et i, så $s_i \neq 0$. Antag f.eks., at $s_{n+1} \neq 0$.

Så fås

$$cls_2(s_1,\dots,s_{n+1}) = cls_2(s_1\cdot s_{n+1}^{-1},\dots,s_n\cdot s_{n+1}^{-1}, 1).$$

Vis, at

$$\underline{x}: (u_1,\dots,u_n) \in E^n \curvearrowright cls_2(u_1,\dots,u_n, 1) \in \overline{RP^n}$$

definerer et kort på $\overline{RP^n}$ omkring $cls_2(s_1,\dots,s_{n+1})$.

Angiv dernæst et del-atlas for en differentiabel struktur på $\overline{RP^n}$ med kort af typen $\underline{x}$.

Vis, at RP^n med den differentiable struktur i exempel 6.5 og $\overline{RP^n}$ med ovenstående differentiable struktur er diffeomorfe differentiable mangfoldigheder.

Opgave 3. Lad C betegne de komplexe tals legeme. Sæt

$$C^{n+1} = \{(z_1,\ldots,z_{n+1}) \mid z_i \in C\}$$

og

$$S^{2n+1} = \{(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in C^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$$

S^{2n+1} er således enhedssfæren i $C^{n+1} = E^{2(n+1)}$.

Indfør ækvivalensrelationerne $\sim$ og $\approx$ på henholdsvis S^{2n+1} og $C^{n+1}-0$ ved fastsættelsen:

$(x_1,\ldots,x_{n+1}) \sim (y_1,\ldots,y_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in C$ således at

$$(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \lambda(y_1,\ldots,y_{n+1})$$

(der må nødvendigvis gælde, at $|\lambda| = 1$)

$(z_1,\ldots,z_{n+1}) \approx (w_1,\ldots,w_{n+1}) \Leftrightarrow \exists\, w \in C$ således at

$$(z_1,\ldots,z_{n+1}) = w(w_1,\ldots,w_{n+1}).$$

Lad CP^n og $\overline{CP^n}$ være mængden af ækvivalensklasser ved henholdsvis $\sim$ og $\approx$, og lad $k_1 : S^{2n+1} \to CP^n$ og $k_2 : C^{n+1}-0 \to \overline{CP^n}$ være projektionen af et element på sin ækvivalensklasse.

Giv CP^n og $\overline{CP^n}$ kvotienttopologi ved henholdsvis k_1 og k_2.

Vis, at CP^n og $\overline{CP^n}$ er homeomorfe.

Man kalder $CP^n(\overline{CP^n})$ det <u>n-dimensionale komplexe projektive rum</u>.

Vis, at $k_1^{-1}(\underline{p}) = S^1 \ \forall \underline{p} \in CP^n$.

Vis, at $\overline{CP^n}$ kan gives struktur som en 2n-dimensional differentiabel mangfoldighed (Benyt fremgangsmåden i opgave 2).

Angiv et 2-dimensionalt reelt differentiabelt vektorbundt over CP^n.

Definition 6.1 giver objekterne i kategorien af differentiable vektorbundter. Følgende definition giver morfierne.

Definition 6.6. Lad $\xi = (E(\xi), \pi_\xi, B(\xi))$ og $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, B(\eta))$ være differentiable vektorbundter.

En bundt afbildning $f: \xi \to \eta$ består af et par af differentiable afbildninger $f_E: E(\xi) \to E(\eta)$ og $f_B: B(\xi) \to B(\eta)$, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f_E"] \arrow[d, "\pi_\xi"'] & E(\eta) \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ B(\xi) \arrow[r, "f_B"'] & B(\eta) \end{tikzcd} ,$$

og således at

$$f_E | \pi_\xi^{-1}(b) : \pi_\xi^{-1}(b) \to \pi_\eta^{-1}(f_B(b))$$

er lineær for ethvert $b \in B(\xi)$.

Bemærkning. Betingelsen om kommutativitet af diagrammet i definition 6.6 sikrer netop, at f_E afbilder fibre ind i fibre, således at sidste del af definitionen har mening.

Notation. Man bruger skrivemåden $f=(f_B, f_E)$ for en bundt afbildning.

Exempel 6.7. Lad $F: M^n \to N^k$ være en differentiabel afbildning mellem differentiable mangfoldigheder.

Som vi har set i § 5 er

$$\tau(F) = (F, F_*) : \tau(M) \to \tau(N)$$

en bundt afbildning.

Hvis $f: \xi \to \eta$ og $g: \eta \to \zeta$ er bundt afbildninger, udgør parret af afbildninger $(g_B f_B, g_E f_E)$ en bundt afbildning fra ξ til ζ (hvorfor?). Denne bundt afbildning kaldes sammensætningen af bundt afbildningerne f og g, og betegnes med $g \circ f$. Altså:

$$g \circ f = (g_B f_B, g_E f_E) : \xi \longrightarrow \zeta$$

Hvis $\xi = (E, \pi, B)$ er et vektorbundt, udgør parret af afbildninger $(1_B, 1_E)$ en bundt afbildning $\xi \longrightarrow \xi$, som vi betegner med 1_ξ.

Det er nu klart, at tages differentiable vektorbundter som objekter og bundt afbildninger som morfier, får man en kategori, når ovenstående sammensætning af morfier benyttes. Denne kategori kaldes kategorien af differentiable vektorbundter.

Det er nu også klart, at τ er en covariant funktor fra kategorien af differentiable mangfoldigheder til kategorien af differentiable vektorbundter (se side 58).

En ækvivalens i kategorien af differentiable vektorbundter kaldes en bundt ækvivalens. En bundt afbildning $f:\xi\to\zeta$ er altså en bundt ækvivalens hvis og kun hvis, der findes en bundt afbildning $g:\zeta\to\xi$, således at $g\circ f=1_\xi$ og $f\circ g=1_\zeta$.

Det er let at indse, at en bundt afbildning $f:\xi\to\zeta$ er en bundt ækvivalens, præcis når f_B og f_E er diffeomorfier.

Vi skal i det følgende ofte betragte vektorbundter med samme basis rum. Man fastholder så ofte basis rummet ved at tale om bundter over det pågældende basis rum. For bundter over samme basis rum ønsker vi en stærkere form for ækvivalens.

Definition 6.8. Lad ξ og ζ være differentiable vektorbundter over $B(\xi)=B(\zeta)=B$.

En bundt ækvivalens $f:\xi\longrightarrow\zeta$ med $f_B=1_B$ kaldes en bundt isomorfi.

Vektorbundterne ξ og ζ kaldes isomorfe, hvis der findes en bundt isomorfi imellem dem.

Sætning 6.9. Lad ξ og ζ være differentiable vektorbundter over $B(\xi)=B(\zeta)=B$.

En differentiabel afbildning $f_E:E(\xi)\longrightarrow E(\zeta)$ giver en bundt isomorfi $(1_B,f_E):\xi\longrightarrow\zeta$ hvis og kun hvis:

i) Følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[rr, "f_E"] \arrow[dr, "\pi_\xi"'] & & E(\zeta) \arrow[dl, "\pi_\zeta"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

ii) $f_E|\pi_\xi^{-1}(b):\pi_\xi^{-1}(b)\longrightarrow\pi_\zeta^{-1}(b)$ er en isomorfi $\forall\, b\in B$.

Beviset for denne sætning er en anvendelse af følgende lemma.

Lemma 6.10. Lad M være en differentiabel mangfoldighed, og antag, at

$$\Phi : M \times E^m \longrightarrow E^m$$

og

$$\varphi : M \to Gl(E^m)$$

er forbundet ved kravet

$$\varphi(x)(v) = \Phi(x,v) \quad \forall x \in M, \quad \forall v \in E^m .$$

Så gælder, at Φ er differentiabel hvis og kun hvis φ er differentiabel.

Bemærkning. $Gl(E^m)$ er mængden af isomorfier af E^m på sig selv.

$Gl(E^m)$ er en m^2-dimensional differentiabel mangfoldighed (Opgave 6 § 1).

Tages sammensætning som multiplikation bliver $Gl(E^m)$ en Lie-gruppe (Opgave 17 § 3).

Udsagnet " φ differentiabel" er dermed tillagt mening.

Vi observerer, at der findes en afbildning φ svarende til en given afbildning Φ, præcis når $\Phi(x,\cdot):E^m \longrightarrow E^m$ er en isomorfi $\forall x \in M$.

Bevis for lemma 6.10. Lad $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$ være standard basis i E^m, og lad $\langle \cdot,\cdot \rangle$ betegne det sædvanlige indre produkt i E^m.

Definer afbildningerne

$$\varphi_{ij} : M \longrightarrow E^1 \quad \text{for} \quad i,j=1,\dots,m$$

ved fastsættelsen

$$\varphi_{ij}(x) = \langle \underline{e}_i, \varphi(x)(\underline{e}_j) \rangle = \langle \underline{e}_i, \Phi(x, \underline{e}_j) \rangle$$

for ethvert $x \in M$.

Det er klart, at $\{\varphi_{ij}(x)\}$ er matrixfremstillingen af $\varphi(x) \in Gl(E^m)$ m.h.t. basen $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$.

Da den differentiable struktur på $Gl(E^m)$ netop defineres ved at afbilde en isomorfi i $Gl(E^m)$ på et punkt i E^{m^2} fastlagt v.hj.a. dens $m\times m$-matrix m.h.t. en given basis, er det klart, at

(*) φ differentiabel hvis og kun hvis φ_{ij} differentiable $\forall i j = 1,\dots,m$.

Lad $v = \sum_{j=1}^{m} v_j \underline{e}_j \in E^m$ og lad $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ være komponentfunktionerne for Φ m.h.t. basen $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$.

Ligningen $\Phi(x, v) = \varphi(x)(v)$ for $x \in M$ og $v \in E^m$ bliver på matrixform til

$$\Phi_i(x,\ v) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x)v_j \qquad \text{for} \quad i=1,\ldots,m.$$

Heraf aflæses straks:

(**) Φ differentiabel hvis og kun hvis φ_{ij} differentiable $\forall i,j=1,\ldots,m$.

(*) og (**) giver tilsammen konklusionen i lemma 6.1o.

Bevis for sætning 6.9. Det er klart, at i) og ii) er opfyldt, hvis $(1_B,\ f_E)$ er en bundt isomorfi.

Antag derfor nu omvendt, at i) og ii) er opfyldt.

Da f_E afbilder ethvert fiber i ξ isomorft på det tilsvarende fiber i ζ, er det klart, at f_E er bijektiv, og at f_E^{-1} afbilder fibrene i ζ isomorft på de tilsvarende fibre i ξ. Hvis f_E^{-1} er differentiabel, er det derfor klart, at $(1_B,\ f_E^{-1})$ er en bundt invers til $(1_B,\ f_E)$. Heraf vil følge, at $(1_B,\ f_E)$ er en bundt isomorfi.

Vi skal altså nu kun vise, at f_E^{-1} er differentiabel.

Dertil betragter vi åbne delmængder $U \subseteq B$ med tilhørende diffeomorfier

$$h\colon U\times E^m \longrightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$$
$$k\colon U\times E^m \longrightarrow \pi_\zeta^{-1}(U)$$

som opfylder betingelse 2 i definition 6.1.

Vi registrerer situationen i følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
U\times E^m \arrow[rrrr, "k^{-1}\circ f_E|\circ h"] \arrow[dr, "h"] \arrow[ddrr, bend right, "\mathrm{proj.}"'] & & & & U\times E^m \arrow[dl, "k"'] \arrow[ddll, bend left, "\mathrm{proj.}"] \\
& \pi_\xi^{-1}(U) \arrow[rr, "f_E|"] \arrow[dr, "\pi_\xi|"'] & & \pi_\zeta^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi_\zeta|"] & \\
& & U & &
\end{tikzcd}$$

(streg efter en afbildning, f.eks. $f_E|$, betyder restriktion af en afbildning med større definitionsmængde).

Da både h, $f_E|$ og k er isomorfier på de enkelte fibre, findes der afbildninger

$$\Phi\ :\ U\times E^m \longrightarrow E^m$$

og

$$\varphi : U \longrightarrow Gl(E^m),$$

således at

$$\varphi(x)(v) = \Phi(x, v) \qquad \forall x \in U, \ \forall v \in E^m$$

og så

$$k^{-1} \circ f_E | \circ h = (\text{proj.}, \Phi).$$

Tilsvarende findes afbildninger

$$\Psi : U \times E^m \rightarrow E^m$$

og

$$\psi : U \rightarrow Gl(E^m),$$

således at

$$\psi(x)(w) = \Psi(x, w) \ \forall x \in U, \ \forall w \in E^m$$

og så

$$h^{-1} \circ f_E^{-1} | \circ k = (\text{proj}, \Psi).$$

Man indser let, at

$$\psi(x) = \varphi(x)^{-1} \quad \forall x \in U.$$

Hvis $\tau : Gl(E^m) \longrightarrow Gl(E^m)$ er den afbildning, som sender en isomorfi på sin invers, har vi derfor

$$\psi = \tau \varphi$$

Vi kan nu bevise, at $f_E^{-1} | \pi_\xi^{-1}(U)$ er differentiabel. Da h og k er diffeomorfier, følger dette således:

$$\begin{aligned} f_E | \pi_\xi^{-1}(U) \text{ diff.} &\Longrightarrow \Phi \text{ diff.} \\ &\Longrightarrow \varphi \text{ diff. (lemma 6.1o)} \\ &\Longrightarrow \psi \text{ diff. (} \tau \text{ er diff.)} \\ &\Longrightarrow \Psi \text{ diff. (lemma 6.1o)} \\ &\Longrightarrow f_E^{-1} | \pi_\xi^{-1}(U) \text{ diff.} \end{aligned}$$

Da vi kan overdække B med mængder af typen U, har vi dermed bevist, at f_E^{-1} er differentiabel. Som allerede nævnt afslutter dette beviset for sætning 6.9.

Hvis man benytter sætningen om inverse funktioner, kan man bevise sætning 6.9 direkte. Fordelen ved det her anførte bevis er, at det samme bevis fungerer, når man overalt erstatter differentiabilitets krav med kontinuitets krav. Sætning 6.9 gælder derfor også i "kategorien af kontinuerte vektorbundter".

Opgave 4. Bevis sætning 6.9 ved at benytte sætningen om inverse funktioner.

Vis endvidere, at en bundt afbildning $f: \xi \to \eta$ er en bundt ækvivalens, hvis og kun hvis f_B er en diffeomorfi, og $f_E | \pi_\xi^{-1}(b)$ er en isomorfi $\forall\, b \in B(\xi)$.

Lad nu ξ være et vilkårligt m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt. Hvis $U \subseteq B(\xi)$ er en åben delmængde er det klart, at triplen

$$\xi | U = (E(\xi) | \pi_\xi^{-1}(U), \pi_\xi | \pi_\xi^{-1}(U), U)$$

er et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt. Dette bundt kaldes restriktionen af ξ til U og betegnes som angivet med $\xi | U$.

Hvis U har egenskab 2 i definition 6.1, ser vi, at diffeomorfien $h: U \times E^m \to \pi_\xi^{-1}(U)$ giver en bundt isomorfi mellem $\xi | U$ og det m-dimensionale trivielle bundt over U (eksempel 6.2). Man udtrykker kort dette ved at sige, at $\xi | U$ er et trivielt bundt. Man bruger også udtryksmåden ξ er triviel over U. Diffeomorfien h, som giver isomorfien med det trivielle bundt omtales ofte som en trivialisering af $\xi | U$. Dette er i overensstemmelse med følgende definition:

Definition 6.11. Et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt ξ kaldes trivielt, hvis det er isomorft med det m-dimensionale trivielle bundt over $B(\xi)$.

Hvis ξ er et vilkårligt vektorbundt, er det i de færreste tilfælde trivielt. I definition 6.1 indgår imidlertid, som vi lige har set, at man kan overdække $B(\xi)$ med åbne mængder U, så $\xi | U$ er trivielt. Man udtrykker dette ved at sige, at et vektorbundt er lokalt triviel. Allerede i beviset for sætning 6.9 har vi set, at denne egenskab er vigtig. Et væsentlig trin i dette bevis var jo netop at transformere problemet til et problem vedrørende trivielle bundter. Denne fremgangsmåde er generel, når det drejer sig om lokale egenskaber ved lokalt trivielle bundter.

Ovenstående diskussion viser, at et vilkårligt vektorbundt er stykket sammen af trivielle bundter. Opgave 9 forfølger dette synspunkt.

En væsentlig del af vores interesse for vektorbundter er knyttet til begrebet tværsnit.

Definition 6.12. Lad ξ være et differentiabelt vektorbundt. Et (differentiabelt) tværsnit i ξ er en (differentiabel) afbildning $s: B(\xi) \to E(\xi)$, således at $\pi_\xi s = 1_{B(\xi)}$.

Tværsnit er en god betegnelse, idet betingelsen $\pi_\xi s = 1_{B(\xi)}$ sikrer, at s udpeger præcis en vektor i hvert fiber af ξ.

Som allerede nævnt kaldes tværsnit i et tangentbundt for vektorfelter. Et tværsnit i et normalbundt (exempel 6.4) kaldes et <u>normalfelt</u>.

Lokalt kan tværsnit beskrives ved et system af relle funktioner.

<u>Lemma 6.13.</u> Lad ξ være et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt, og lad h være en trivialisering af $\xi | U$.

Hvis $s: B(\xi) \longrightarrow E(\xi)$ er et tværsnit i ξ findes m entydigt bestemte reelle funktioner $a_1, \dots, a_m : U \longrightarrow E^1$, således at

$$s(x) = h(x, a_1(x), \dots, a_m(x)) \qquad \forall x \in U$$

d.v.s. så følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \times E^m \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, shift left] & & \pi_\xi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, shift left] \\
& \mathcal{U} \arrow[ul, shift left, "(1_{\mathcal{U}}, a_1, \dots, a_m)"] \arrow[ur, shift left, "s|\mathcal{U}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Bevis</u>. Da h er en diffeomorfi bestemmes funktionerne $a_1, \dots, a_m$ entydigt af afbildningen

$$h^{-1}(s|U) : U \longrightarrow U \times E^m$$

Da h afbilder fiberet over $x \in U$ i det trivielle bundt på fiberet over x i ξ, følger kommutativiteten af diagrammet umiddelbart.

Man kalder $a_1, \dots, a_m$ for <u>koordinatfunktionerne</u> for s m.h.t. trivialiseringen h af $\xi | U$.

<u>Lemma 6.14</u>. Et tværsnit $s: B(\xi) \longrightarrow E(\xi)$ i ξ er differentiabelt, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne $a_1, \dots, a_m$ for s m.h.t. en vilkårlig lokal trivialisering af ξ er differentiable.

<u>Bevis.</u> Lad h være en trivialisering af $\xi | U$.

Da h er en diffeomorfi, er det klart, at $s|U : U \longrightarrow E(\xi)$ er differentiabel, hvis og kun hvis $a_1, \dots, a_m$ er differentiable.

Heraf følger lemmaet umiddelbart.

<u>Sætning 6.15</u>. Et differentiabelt tværsnit $s: B(\xi) \longrightarrow E(\xi)$ i ξ er en imbedding.

<u>Bevis</u>. Betingelsen $\pi_\xi\, s = 1_{B(\xi)}$ sikrer, at s er 1-1-tydig.

Giver vi $s(B(\xi))$ den inducerede topologi fra $E(\xi)$ bliver

$$\pi_\xi \mid s(B(\xi)) : s(B(\xi)) \to B(\xi)$$

en kontinuert invers til s opfattet som afbildning ind i $s(B(\xi))$. Det er derfor klart, at s er en homeomorfi på sit billede.

Vi skal derfor nu blot vise, at s er en immersion, d.v.s. at s_* er 1-1. Da

$$\pi_\xi\, S = 1_B\,, \quad \text{er} \quad (\pi_\xi)_* s_* = 1_{TB},$$

så det er en trivialitet.

<u>Opgave 5</u>. Lad $\xi = (E,\pi,B)$ være et vilkårligt differentiabelt vektorbundt.

Vis, at $\pi : E \to B$ er en åben afbildning:

$(O \subseteq E$ åben $\Longrightarrow \pi(O) \subseteq B$ åben).

Er π en lukket afbildning?

Vis, at E er et Hausdorff rum hvis og kun hvis B er et Hausdorff rum.

Sætning 6.16. Lad $M^n \subset E^{n+m}$ være en immersed del-mangfoldighed, og lad $Z: M \longrightarrow N(M)$ være normalfelt på M.

Der findes n+m entydigt bestemte reelle funktioner $z_1, \ldots, z_{n+m}: M \longrightarrow E^1$, således at

$$Z(\underline{p}) = (z_1(\underline{p}), \ldots, z_{n+m}(\underline{p}))_{\underline{p}} \in T_p E^{n+m} \quad \forall \underline{p} \in M$$

Z er differentiabelt, hvis og kun hvis $z_1, \ldots, z_{n+m}$ er differentiable.

Opgave 6. Bevis sætning 6.16.

Hvis s og t er tværsnit i et vektorbundt ξ, og $a, b \in E^1$, kan vi definere afbildningen

$$as + bt: B(\xi) \longrightarrow E(\xi)$$

ved fastsættelsen

$$(as+bt)(x) = as(x)+bt(x) \in \pi_\xi^{-1}(x) \quad \forall x \in B(\xi).$$

Vi har udnyttet vektorrumsstrukturen i de enkelte fibre for ξ.

Det er klart, at $as+bt$ bliver et nyt tværsnit i ξ.

Hvis s og t er differentiable tværsnit bliver $as+bt$ differentiabelt. Man kan f.eks. bevise dette v.hj.a. lemma 6.14, idet det er klart, at koordinatfunktionerne for $as+bt$ er den tilsvarende linearkombination af koordinatfunktionerne for s og t (her udnyttes, at en trivialisering er lineær på fibrene).

Ovenstående beviser følgende sætning.

Sætning 6.17. Mængden af tværsnit i et differentiabelt vektorbundt er et reelt vektorrum under fibervis addition. Tilsvarende med mængden af differentiable tværsnit.

Definition 6.18. Et system af tværsnit $s_1, \ldots, s_k$ i et differentiabelt vektorbundt ξ kaldes lineært uafhængige, hvis $s_1(x), \ldots, s_k(x)$ er lineært uafhængige i vektorrummet $\pi_\xi^{-1}(x)$ $\forall x \in B(\xi)$.

Lineær uafhængighed af tværsnit er altså fibervis uafhængighed. Dette er ikke det samme som lineær uafhængighed i vektorrummet af tværsnit.

Opgave 7. Giv et exempel på 2 tværsnit i vektorbundtet $(E^1 \times E^1, \text{proj.}, E^1)$, som er lineært afhængige i ethvert fiber, men lineært uafhængige i vektorrummet af tværsnit.

Tværsnit giver os mulighed for at afgøre trivialitet af et vektorbundt i bundtet selv.

Sætning 6.19. Lad ξ være et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt. Så gælder, at ξ er et trivielt vektorbundt, hvis og kun hvis der findes m lineært uafhængige differentiable tværsnit $s_1, \ldots, s_m$ i ξ.

Bevis. Lad $\xi = (E, \pi, B)$.

Antag først, at ξ er trivielt. Så findes en diffeomorfi $h: B \times E^m \longrightarrow E$, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd} B \times E^m \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

og således at $h_x : E^m \longrightarrow \pi^{-1}(x)$, defineret ved fastsættelsen $h_x(v) = h(x, v)$ $\forall v \in E^m$, er en isomorfi $\forall x \in B$.

Lad $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ være standard basis i E^m, og definer $s_i : B \longrightarrow E$ for $i = 1, \ldots, m$ ved fastsættelsen

$$s_i(x) = h(x, \underline{e}_i) \quad \forall x \in B.$$

$s_1, \ldots, s_m$ er differentiable tværsnit i ξ, da h er en diffeomorfi. Da $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ er lineært uafhængige, og h_x er en isomorfi $\forall x \in B$, er det klart, at $s_1, \ldots, s_m$ er lineært uafhængige tværsnit.

Antag nu omvendt, at vi har givet m lineært uafhængige differentiable tværsnit $s_1, \ldots, s_m$ i ξ.

Definer så afbildningen

$$h : B \times E^m \longrightarrow E$$

ved fastsættelsen

$$h(x, y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i s_i(x)$$

for $x \in B$ og $(y_1, \ldots, y_m) \in E^m$.

Det er klart, at ovennævnte diagram kommuterer med denne definition af h. Det er også klart, at $h_x: E^m \to \pi_\xi^{-1}(x)$ er en isomorfi for ethvert $x \in B$. I følge sætning 6.9 behøver vi så blot at vise, at h er differentiabel, for at slutte, at $(1_B, h)$ giver en bundt isomorfi fra det trivielle bundt over B til ξ.

For at vise, at h er differentiabel, betragter vi en åben mængde $U \subseteq B$, således at $\xi | U$ er triviel. Lad k være en trivialisering af $\xi | U$. Vi får så følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
U \times E^m \arrow[r, "h|"] \arrow[dr, "proj."'] & \pi_\xi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi_\xi|"] & U \times E^m \arrow[l, "k"'] \arrow[dl, "proj."] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Vi får nu

$$k^{-1}h \mid (x, y_1, \dots, y_m) = (x, \sum_{i=1}^{m} y_i \, proj_2 \, k^{-1} s_i(x))$$

for $x \in U$ og $(y_1, \dots, y_m) \in E^m$, hvor $proj_2$ er projektionen på E^m.

Det fremgår heraf klart, at $k^{-1}h|$ er differentiabel som funktion af alle de variable. Da dette gælder for et vilkårligt U, så $\xi | U$ er triviel, og vi kan overdække B med sådanne U, har vi dermed bevist, at h er differentiabel.

Dette afslutter beviset for sætning 6.19.

Sætning 6.20. Lad $O \subseteq E^{n+1}$ være en åben mængde i E^{n+1}, og lad $F: O \to E^1$ være en differentiabel afbildning. Lad $a \in E^1$ og sæt $M = F^{-1}(a)$.

Antag, at $M \neq \emptyset$, og at $dF \neq 0$ i alle punkter af M, således at M er en hyperflade i E^{n+1}.

Så gælder, at normalbundtet $\nu(M)$ for M i E^{n+1} er trivielt.

Bevis. Da $\nu(M)$ er 1-dimensionalt, skal vi i følge sætning 6.19 blot finde et differentiabelt normalfelt til M, som er forskellig fra 0 i alle punkter af M.

Lad dertil $(u_1, \dots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ være koordinaterne i E^{n+1}. Betragt vektorfeltet

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right) \text{ på } O.$$

Da $dF \neq 0$ på M er grad $F \neq 0$ på M.

Lad nu $\underline{p} \in M$, og lad $\alpha : I_\varepsilon \to M$ være en kurve på M med $\alpha(0)=\underline{p}$.

Så får vi, at $F\alpha(t)=a \ \forall t \in I_\varepsilon$. Heraf følger, at

$$\langle \alpha'(0), \text{grad } F(\underline{p}) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial u_i}(\underline{p}) \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}(0) = \frac{d(F\alpha)}{dt}(0)=0$$

Dette viser, at grad F er et normalfelt til M.

Da $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ er differentiabel på M for ethvert $i=1,\dots,n+1$, viser sætning 6.16, at grad F er et differentiabelt normalfelt til M.

Dermed er sætning 6.2o bevist.

Exempel. Betragt $F: E^{n+1} \to E^1$ defineret ved fastsættelsen

$$F(u_1,\dots,u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i^2.$$

Betragt $S^n = F^{-1}(1)$. Da grad $F = 2\cdot(u_1,\dots,u_{n+1})$ ser vi, at $(u_1,\dots,u_{n+1}) = \frac{1}{2}$ grad F er et normalfelt forskellig fra 0 til S^n.

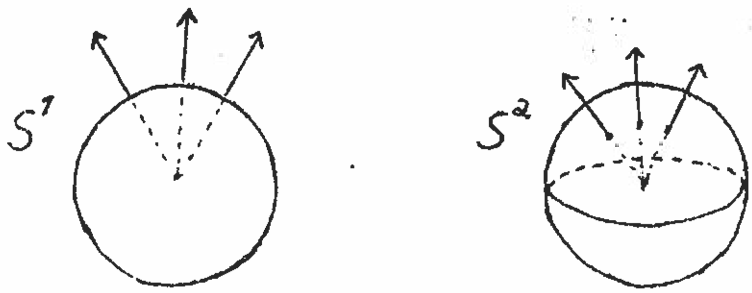


fig. 14

Vi skal nu betragte nogle exempler på mangfoldigheder, der har triviel tangentbundt.

Definition 6.21. En differentiabel mangfoldighed med trivielt tangentbundt kaldes parralleliserbar.

Exempel 6.22. Lad M^n være en mangfoldighed, som kan dækkes med ét kort (f.eks. en åben delmængde af E^n). Lad os sige, at

$$\underline{x}: D \subseteq E^n \to \underline{x}(D)=M$$

er et kort på M.

$$h = \tilde{\underline{x}} \circ (\underline{x}^{-1} \times 1_{E^n}) : \underline{x}(D) \times E^n \to T(M)$$

giver en trivialisering af $\mathcal{T}(M)$. M er altså parralleliserbar.

Dette exempel viser specielt, at E^n er paralleliserbar. Da E^n er en Lie-gruppe med sædvanlig vektoraddition som multiplikation, er dette også indeholdt i følgende sætning.

Sætning 6.23. Enhver Lie-gruppe G er en paralleliserbar differentiabel mangfoldighed.

Bevis. Lad $\mu: G\times G \to G$ være multiplikationen i G. Vi skriver som sædvanlig $\mu(x,y)= x\cdot y \quad \forall x, y \in G$.

Venstre translation i G med et element $a \in G$ er afbildningen $L_a: G \to G$ defineret ved fastsættelsen $L_a(x)=a\cdot x \ \forall x \in G$. Hvis $i_a: G \to G\times G$ er afbildningen defineret ved fastsættelsen $i_a(x) =(a, x) \ \forall x \in G$, ser vi, at $L_a=\mu i_a$. Det er let at indse, at i_a er en differentiabel afbildning $\forall a \in G$, og da μ er givet differentiabel, følger så, at L_a er en differentiabel afbildning $\forall a \in G$.

V.hj.a. venstre translationer kan vi udvide en vilkårlig tangentvektor i $e \in G$ (identiteten i G) til et vektorfelt på G. Lad nemlig $X_e \in T_eG$ være givet. For ethvert $a \in G$ definerer vi så tangentvektoren $X_a \in T_aG$ ved fastsættelsen

$$X_a=(L_a)_{*e}(X_e).$$

Samlingen af tangentvektorer X_a definerer vektorfeltet X på G.

Vi vil nu vise, at X er et differentiabelt vektorfelt på G. Lad dertil $f: U \subseteq G \to E^1$ være en differentiabel funktion på en åben delmængde af G.
I følge sætning 4.5 skal vi blot vise, at $X[f]: U \to E^1$ er en differentiabel funktion.

Hvis $X_e=\mathrm{cls}(\alpha)$, hvor $\alpha: I_\varepsilon \to G$ er en differentiabel afbildning med $\alpha(0) = e$, finder vi for ethvert $a \in U$:

$$\begin{aligned}
X[f](a) &= X_a[f] \\
&=(L_a)_{*e}(X_e)[f] \\
&=X_e[fL_a] \\
&= \frac{d}{dt}((fL_a)\alpha)(0) \\
&= \frac{d}{dt}(f(a\cdot\alpha))(0),
\end{aligned}$$

hvor $a\cdot\alpha : I_\varepsilon \to G$ er defineret ved fastsættelsen $(a\cdot\alpha)(t) = a\cdot\alpha(t)\ \forall t \in I_\varepsilon$.

Vi kan nu vise, at $X[f]$ er differentiabel således. Betragt den sammensatte afbildning $F: U\times I_\varepsilon \to G$ defineret ved fastsættelsen $F(a, t) = a\cdot\alpha(t)\ \forall a \in U$ og $\forall t \in I_\varepsilon$. F er netop sammensætningen

$$U\times I_\varepsilon \xrightarrow{i\times\alpha} G\times G \xrightarrow{\mu} G,$$

hvor $i:U \to G$ er inklusionsafbildningen. Det er derfor klart, at F er differentiabel. Da $F(a,0)=a\cdot\alpha(0)=a\cdot e=a\ \forall a \in U$, ser vi, at $F^{-1}(U)$ er en åben delmængde af $U\times I_\varepsilon$, som indeholder $U\times 0$. Hvis t er parameteren på I_ε, vil ethvert kort på $F^{-1}(U)$ indeholde denne koordinat som sidste koordinat. Vi får en veldefineret afbildning

$$\frac{d}{dt}(f\circ F|F^{-1}(U)) : F^{-1}(U) \to E^1$$

som er differentiabel, da f og F er differentiable.

Sammensætningen af denne afbildning og afbildningen $j:U \to F^{-1}(U)$ defineret ved $j(a)=(a,0)\ \forall a \in U$, er netop $X[f]:U \to E^1$. Da også j er differentiabel, har vi dermed bevist, at $X[f]$ er differentiabel.

Dette beviser, at X er et differentiabelt vektorfelt på G.

Hvis dimensionen af G er m, kan vi nu let finde m lineært uafhængige differentiable vektorfelter på G. Lad nemlig $X_e^1,\dots,X_e^m$ være en basis i T_eG og betragt de tilsvarende differentiable vektorfelter $X^1,\dots,X^m$ på G. Da $(L_a)_{*e}$ er en isomorfi $\forall a \in G$ (L_a er en diffeomorfi med $L_{a^{-1}}$ som invers), er vektorerne $X_a^1,\dots,X_a^m$ lineært uafhængige i $T_aG\ \forall a \in G$. Dette beviser, at $X^1,\dots,X^m$ er m lineært uafhængige differentiable vektorfelter på G.

Ifølge sætning 6.19 er $\tau(G)$ derfor et trivielt vektorbundt.

Dermed har vi bevist, at G er en paralleliserbar differentiabel mangfoldighed.

Bemærkning. De væsentlige ingredienser i ovenstående bevis er indeholdt i § 3 opgave 16 og § 4 opgave 7. Vektorfeltet X svarende til $X_e \in T_eG$ er venstre invariant (§4 opgave 7), og er klart entydigt bestemt ved dette krav. Afbildningen $X_e \mapsto X$ giver netop vektorrums isomorfien $T_eG \to \mathfrak{g}$, hvor $\mathfrak{g}$ er Lie-algebraen for G.

Opgave 8. Vis, at E^n er en Lie-gruppe med vektoraddition som multiplikation.

Hvad er venstre translationerne i E^n?

Giv en geometrisk beskrivelse af det venstre invariante vektorfelt hørende til $X_e \in T_e E^n$.

Vis, at S^1 er en Lie-gruppe med multiplikation induceret fra den komplexe plan ($S^1 = \{z \in C \mid |z| = 1\}$).

Hvad er venstre translationerne i S^1, og hvad er det venstre invariante vektorfelt hørende til $X_e \in T_e S^1$?

Lad G_1 og G_2 være 2 Lie-grupper. Vis, at $G_1 \times G_2$ er en Lie-gruppe med multiplikation $(x_1, x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2)$.

Beskriv venstre translationer og venstre invariante vektorfelter på $S^1 \times S^1$ (Torus) og $S^1 \times E^1$(Cylinder).

Vis, at $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ (n faktorer) er en Lie-gruppe. T^n kaldes den n-dimensionale torus.

Paralleliserbarhed af n-sfæren S^n hænger sammen med et rent algebraisk problem, nemlig spørgsmålet om E^{n+1} kan forsynes med en multiplikation, ved hvilken det bliver en reel divisionsalgebra.

Definition. A er en reel divisions algebra, hvis A er et endeligt dimensionalt vektorrum over de relle tal, og der findes en multiplikation $\mu : A \times A \longrightarrow A$, således at

1) μ er bilinear

2) Der findes ingen nul-divisorer ved multiplikationen, d.v.s.

$$\mu(a,b) = 0 \Longrightarrow (a = 0) \vee (b = 0).$$

Bemærkning. Der kræves hverken kommutativitet eller associativitet af multiplikationen.

Lemma. Hvis A er en reel divisions algebra, har ligningerne $\mu(a, x) = b$ og $\mu(x, a) = b$ en entydig bestemt løsning $x \in A$ for ethvert $a, b \in A$, $a \neq 0$.

Bevis. For $a \in A$ defineres afbildningerne

$$L_a : A \longrightarrow A \quad \text{og} \quad R_a : A \longrightarrow A$$

ved fastsættelserne $L_a(x) = \mu(a, x)$ og $R_a(x) = \mu(x, a)$ for ethvert $x \in A$.

L_a og R_a er lineære afbildninger p.gr.a. 1). P. gr. a. 2) er L_a og R_a 1-1-tydige $\forall a \in A$ med $a \neq 0$. Da A er endelig dimensional, følger så, at L_a og R_a er isomorfier $\forall a \in A$ med $a \neq 0$. Dette beviser lemmaet.

Sætning 6.24. Hvis E^{n+1} kan forsynes med en multiplikation, ved hvilken det bliver en reel divisions algebra, er S^n paralleliserbar.

Bevis. Lad $e_1, \ldots, e_{n+1}$ være en basis i E^{n+1}.

Da produktet $\mu : E^{n+1} \times E^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ er bilineært, er μ en differentiabel afbildning.

Betragt nu den lineære afbildning $L_{e_1} : E^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ defineret ved fastsættelsen $L_{e_1}(x) = \mu(e_1, x)$ $\forall x \in E^{n+1}$.

Da $e_1 \neq 0$ er L_{e_1} en isomorfi. Afbildningen $L_{e_1}^{-1} : E^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ er differentiabel, da den er lineær. Idet inklusionen af S^n i E^{n+1} er differentiabel, følger så, at afbildningen

$$F = L_{e_1}^{-1} | S^n : S^n \longrightarrow E^{n+1}$$

er differentiabel.

Vi konstaterer, at

$$\mu(e_1, F(x)) = x \quad \forall x \in S^n.$$

Definer nu afbildningerne

$$X_i : S^n \longrightarrow E^{n+1} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n$$

ved fastsættelsen

$$X_i(x) = \mu(e_{i+1}, F(x)) \qquad \forall x \in S^n$$

Da F og μ er differentiable afbildninger, følger det, at $X_1, \ldots, X_n$ er differentiable afbildninger.

Idet multiplikationen er bilineær og uden nul-divisorer, følger det, at vektorerne $\mu(e_1, F(x)), \ldots, \mu(e_{n+1}, F(x))$ er lineært uafhængige $\forall x \in S^n$, idet $e_1, \ldots, e_{n+1}$ er lineært uafhængige.

Dette viser, at vektorerne $x, X_1(x), \ldots, X_n(x)$ er lineært uafhængige $\forall x \in S^n$. Projektionen af vektorerne $X_i(x)$ på tangentplanen til S^n i $x \in S^n$ er derfor også lineært uafhængige. Hvis $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er det sædvanlige indre produkt i E^{n+1} giver disse projektioner netop afbildningerne

$$X_i : S^n \longrightarrow E^{n+1} \quad \text{for } i=1,\ldots,n$$

hvor

$$X_i(x) = \bar{X}_i(x) - \langle x, \bar{X}_i(x)\rangle\, x \quad \forall x \in S^n.$$

Da $\bar{X}_i$ er differentiabel er X_i differentiabel for $i=1,\ldots,n$. Som vi lige har set, er $X_1(x),\ldots,X_n(x)$ lineært uafhængige tangentvektorer til S^n i $x \in S^n$ $\forall x \in S^n$.

$X_1,\ldots,X_n$ giver altså n lineært uafhængige differentiable vektorfelter på S^n. Ifølge sætning 6.19 er S^n derfor paralleliserbar.

Dermed er sætning 6.24 bevist.

Historiske bemærkninger

I E^1, E^2, E^4 og E^8 er der en multiplikation, som gør disse euklidiske rum til reelle divisions algebraer. Disse algebraer er netop de reelle tal, de komplexe tal, kvaternionerne og Cayley tallene. De komplexe tal var kendt af bl.a. Cauchy og Gauss. Kvaternionerne og Cayley tallene blev opdaget af henholdsvis Hamilton og Cayley omkring 1845. I kvaternionerne er multiplikationen ikke kommutativ og i Cayley tallene kverken kommutativ eller associativ. Spørgsmålet om der existerede andre reelle divisions algebraer end disse fire kendte var længe åbent. I 1878 viste Frobenius, at de eneste associative reelle divisions algebraer var de reelle tal, de komplexe tal og kvaternionerne. I 1898 viste Hurwitz, at de eneste normerede reelle algebraer (multiplikationen tilfredsstiller $|\mu(a,b)| = |a|\cdot|b|$) var de fire kendte. Dernæst skete der ikke generelle fremskridt i spørgsmålet før 1940, da Heinz Hopf ved metoder fra den algebraiske topologi viste, at der højst kunne være reelle divisions algebraer i dimensionerne 2^k. Han viste netop dette ved at vise, at S^n kun kunne være paralleliserbar for $n=2^k-1$. Endelig i 1958 blev det så igen ved metoder fra den algebraiske topologi bevist, at kun S^0, S^1, S^3 og S^7 var paralleliserbare, og at der altså derfor ikke existerede andre reelle divisons algebraer end de fire kendte. Dette blev bevist uafhængigt af Milnor, Kervaire og Borel - Hirzebruch. Alle disse beviser bygger på undersøgelser af de ortogonale grupper foretaget af R.Bott. Spørgsmålet om existens af reelle divisions algebraer blev også løst af Adams i 1958. Han anvendte også metoder fra den algebraiske topologi.

Fra sætning 6.24 følger det at S^1, S^3 og S^7 er paralleliserbare. Da S^1 og S^3 er Lie-grupper med multiplikationen induceret henholdsvis fra de komplexe tal og kvaternionerne, følger paralleliserbarheden af disse allerede fra sætning 6.23.

Observer, at exempel 4.1 nu er tillagt mening.

Vi skal senere bevise, at S^2 ikke er paralleliserbar, og vi vil dermed have et exempel på et ikke trivielt vektorbundt. Da det er noget specielt, at et bundt er trivielt, og vi hovedsageligt har beskæftiget os med hvornår dette var tilfældet, giver vi allerede nu et exempel på et ikke trivielt differentiabelt vektorbundt.

Exempel 6.25. Betragt enhedsintervallet $[0,1]$ og dan produktet $[0,1]\times E^1$. Når endepunkterne i $[0,1]$ identificeres fremkommer S^1. I $[0,1]\times E^1$ identificerer vi linierne $0\times E^1$ og $1\times E^1$ ved en drejning, d.v.s. $-x \in E^1=0\times E^1$ identificeres med $x \in E^1=1\times E^1$. Herved fremkommer det ubegrænsede Möbius bånd. Projektionen $[0,1]\times E^1 \longrightarrow [0,1]$ respekterer identifikationerne, og giver derfor en projektion af Möbius båndet på S^1. Herved fremkommer et differentiabelt liniebundt (E,π,S^1) over S^1.

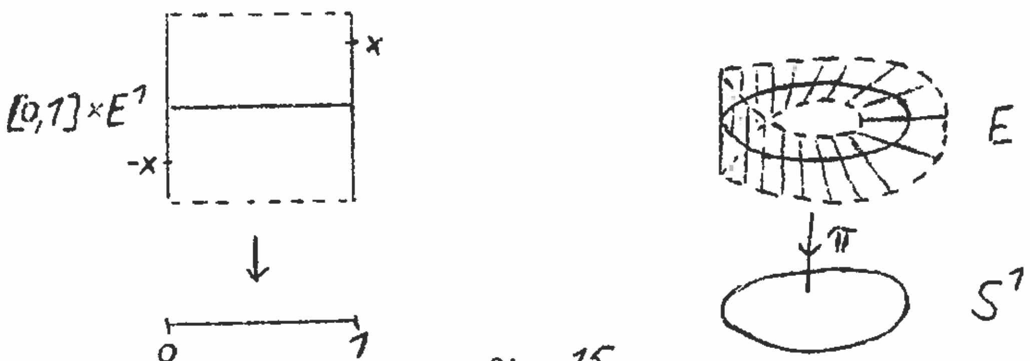


fig. 15

Bundtet (E,π,S^1) er ikke trivielt. Man kan indse dette således. Klip Möbius båndet (E) op langs nul-tværsnittet. Det er let at indse, at det resulterende topologiske rum er kurvesammenhængende. Hvis (E,π,S^1) var trivielt, ville E være diffeomorf med $S^1\times E^1$. Klipper vi imidlertid $S^1\times E^1$ op langs nul-tværsnittet fås 2 sammenhængskomponenter. Vi har dermed indset, at (E,π,S^1) er et ikke trivielt vektorbundt.

Bemærkning. Man kan bevise, at et vilkårligt liniebundt over S^1 er isomorf med enten det trivielle liniebundt over S^1 eller bundtet i exempel 6.25. Disse bundter kan realiseres som henholdsvis tangentbundtet for RP^1 og det kanoniske liniebundt over RP^1 (se opgave 10).

Opgaver.

Opgave 9. Lad ξ være et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt, og lad diffeomorfierne h, k og l være trivialiseringer af henholdsvis $\xi| U$, $\xi|V$ $\xi|W$.

Vis, at der findes en differentiabel afbildning

$$g_{UV}: U\cap V \longrightarrow Gl(E^m),$$

således at

$$k^{-1}h(x, v) = (x, g_{UV}(x)(v) \; \forall\, x \in U\cap V, \forall\, v \in E^m$$

(Benyt lemma 6.1o).

Vis, at

i) $g_{UU}(x) = 1_{E^m} \qquad \forall\, x \in U$

ii) $g_{VW}(x)g_{UV}(x)=g_{UW}(x) \quad \forall\, x \in U\cap V\cap W.$

Lad dernæst B være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed, og lad $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ være en åben overdækning af B med tilhørende differentiable afbildninger

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta \longrightarrow Gl(E^m) \qquad \forall\, \alpha,\beta\in\Gamma,$$

således at det for ethvert $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ gælder:

i) $g_{\alpha\alpha}(x) = 1_{E^m} \qquad \forall\, x \in U_\alpha$

ii) $g_{\beta\gamma}(x)g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \cdot \forall\, x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$

Sæt nu

$$M = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\times E^m \qquad \text{(disjunkt forening)}$$

og definer relationen $\sim$ i M ved fastsættelsen

($x_\alpha \in U_\alpha$, $x_\beta \in U_\beta$ etc; v, w, ... $\in E^m$):

$(x_\alpha, v) \sim (x_\beta, w) \Longleftrightarrow$

$$(x_\alpha = x_\beta \text{ i } U_\alpha \cap U_\beta) \wedge (w = g_{\alpha\beta}(x_\alpha)(v)).$$

Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation.

Lad E betegne mængden af ækvivalensklasser ved $\sim$, og lad $p: M \longrightarrow E$ være projektionen af et element på sin ækvivalensklasse.

Lad $i_\alpha: U_\alpha \times E^m \longrightarrow M$ være den naturlige inklusion og sæt $h_\alpha = p i_\alpha \; \forall \alpha \in \Gamma$.

Vis, at

$$h_\beta^{-1} h_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times E^m \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times E^m$$

er en differentiabel afbildning (find et udtryk for afbildningen).

Vis dernæst, at E kan gives en differentiabel struktur, således at

$$h_\alpha : U_\alpha \times E^m \longrightarrow E$$

er en diffeomorfi på sit billede $\forall \alpha \in \Gamma$.

Vis så, at der findes en veldefineret differentiabel afbildning $\pi: E \longrightarrow B$, således at

$$h_\alpha(U_\alpha \times E^m) = \pi^{-1}(U_\alpha) \quad \forall \alpha \in \Gamma ,$$

og således at følgende diagram kommuterer $\forall \alpha \in \Gamma$:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times E^m \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "\pi|\pi^{-1}(U_\alpha)"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Vis dermed, at $\xi = (E, \pi, B)$ er et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt med h_α som trivialisering af $\xi|U_\alpha \; \forall \alpha \in \Gamma$.

Opgave 10. Vis, at RP^1 er diffeomorf med S^1.

Vis, at bundtet i exempel 6.25 er ækvivalent med ξ_1^1.

Overvej bemærkningen efter exempel 6.25 (der kræves ikke bevis for den første påstand).

§ 7. Operationer på vektorbundter.

I appendix 2 har vi konstrueret en række funktorer i kategorien af vektorrum over et legeme k, f.eks. T_*^r, T_r^* og Λ_r^*. I kategorien af endeligt dimensionale reelle vektorrum er disse funktorer, som vi skal se, differentiable funktorer (definition 7.1). Ifølge et alment princip formuleret af J. Milnor (Der Ring der Vektorraumbündel eines topologischen Raumes, Bonn 1959) inducerer enhver differentiabel funktor en tilsvarende operation i kategorien af differentiable vektorbundter. Formålet med denne paragraf er at beskrive dette princip og anvende det til konstruktion af covariante og contravariante tensor bundter samt bundter af ydre former.

Notation. Betegnelsen vektorrum står i det følgende for et endeligt dimensionalt reelt vektorrum medmindre andet udtrykkeligt fremhæves.

Kategorien af endeligt dimensionale reelle vektorrum vil vi betegne med $\mathcal{V}$.

Bemærkning. Som bekendt kan ethvert n-dimensionalt reelt vektorrum V på naturlig måde gives struktur som en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Hvis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er en basis for V, og $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$ er standard koordinaterne på E^n, kan vi definere et kort $\underline{x}: E^n \longrightarrow V$ på V ved fastsættelsen

$$\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot e_i \qquad \forall (u_1,\ldots,u_n) \in E^n.$$

Man efterviser let, at 2 baser i V giver fordragelige kort på V, og vi har derfor defineret en differentiabel struktur på V.

Når et vektorrum i det følgende betragtes som differentiabel mangfoldighed, er det med denne differentiable struktur.

Lad nu α være en funktor i kategorien $\mathcal{V}$, og betragt 2 vektorrum V og W i $\mathcal{V}$.

i) Hvis α er covariant, får vi en afbildning

$$\mathcal{L}(V;W) \longrightarrow \mathcal{L}(\alpha(V);\alpha(W))$$

defineret ved fastsættelsen

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \curvearrowright \alpha(F) \in \mathcal{L}(\alpha(V);\alpha(W))$$

ii) Hvis α er contravariant, får vi en afbildning

$$\mathcal{L}(V;W) \longrightarrow \mathcal{L}(\alpha(W);\alpha(V))$$

defineret ved fastsættelsen

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \curvearrowright \alpha(F) \in \mathcal{L}(\alpha(W);\alpha(V)).$$

Definition 7.1. En funktor α i $\mathcal{V}$ kaldes for en differentiabel funktor, hvis ovenstående afbildninger under i) eller ii) er differentiable for ethvert valg af vektorrum V og W i $\mathcal{V}$.

Vi vil senere verificere, at funktorerne T^r_*, T^*_r og Λ^*_r i $\mathcal{V}$ alle er differentiable funktorer.

Det princip, vi nu skal verificere, siger kort følgende:

Hvis man anvender en differentiabel funktor α på alle fibrene i et differentiabelt vektorbundt ξ over B, opstår et nyt differentiabelt vektorbundt $\alpha(\xi)$ over B.

Lad altså $\xi = (E,\pi, B)$ være et differentiabelt vektorbundt, og lad α være en differentiabel funktor i $\mathcal{V}$.

Lad

$$E_x = \pi^{-1}(x)$$

være fiberet over $x \in B$, og betragt mængden

$$\alpha(E) = \bigcup_{x\in B} \alpha(E_x) \qquad \text{(disjunkt forening).}$$

Definer endvidere afbildningen

$$\bar{\pi}: \alpha(E) \longrightarrow B$$

ved fastsættelsen $v \in \alpha(E_x) \leadsto x \in B$.

Vi har hermed defineret en trippel

$$\alpha(\xi) = (\alpha(E),\ \bar{\pi}, B).$$

Idet ovenstående notation benyttes gælder følgende sætning:

Sætning 7.2. Der findes en differentiabel struktur på $\alpha(E)$, således at triplen $\alpha(\xi) = (\alpha(E), \bar{\pi}, B)$ er et differentiabelt vektorbundt, og således at $\alpha(\xi) \mid U$ er triviel, hvis $\xi \mid U$ er triviel for en åben delmængde U af B.

I beviset for denne sætning får vi brug for en simpel generalisation af lemma 6.10. Denne generalisation er et korollar til:

Lemma 7.3. Lad M være en differentiabel mangfoldighed, og lad V og W være endelig dimensionale reelle vektorrum.

Antag, at afbildningerne

$$\Phi: M \times V \longrightarrow W \quad \text{og} \quad \varphi: M \longrightarrow \mathcal{L}(V; W)$$

er forbundet ved kravet

$$\varphi(x)(v) = \Phi(x,v) \qquad \forall x \in M, \quad \forall v \in V.$$

Så gælder, at Φ er differentiabel hvis og kun hvis φ er differentiabel.

Korollar 7.4. Lad M være en differentiabel mangfoldighed og lad V være et endeligt dimensionalt reelt vektorrum.

Antag, at afbildningerne

$$\Phi : M \times V \longrightarrow V \quad \text{og} \quad \varphi : M \longrightarrow Gl(V)$$

er forbundet ved kravet

$$\varphi(x)(v) = \Phi(x,v) \qquad \forall x \in M, \quad \forall v \in V.$$

Så gælder, at Φ er differentiabel hvis og kun hvis φ er differentiabel.

<u>Bevis for lemma 7.3.</u>

Lad $\{e_1,\ldots,e_n\}$ og $\{f_1,\ldots,f_m\}$ være baser for henholdsvis V og W.

Matrixbeskrivelsen af $\varphi(x)$ $\forall x \in M$ giver os afbildningerne

$$\varphi_{ij} : M \longrightarrow E^1 \quad \text{for} \quad i = 1,\ldots,m \quad \text{og} \quad j = 1,\ldots,n$$

fastlagt ved, at

$$\varphi(x)(e_j) = \Phi(x,e_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(x) f_i$$

$\forall x \in M$, $\forall j = 1,\ldots,n$.

Pr. definition af den differentiable struktur på $\mathcal{L}(V;W)$ gælder:

(*) φ differentiabel hvis og kun hvis φ_{ij} differentiable for $i = 1,\ldots,m$ og $j = 1,\ldots,n$.

Den differentiable struktur på V er fastlagt ved bijektionen:

$$(u_1,\ldots,u_n) \in E^n \frown v = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \in V.$$

Vi finder nu:

$$\Phi(x,v) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x) u_j \Big) f_i \qquad \forall x \in M, \quad \forall v \in V.$$

Heraf aflæser man (overvej dette):

(**) Φ differentiabel hvis og kun hvis φ_{ij} differentiable for $i = 1,\dots,m$ og $j = 1,\dots,n$.

Sammenholder man (*) og (**) fås beviset for lemma 7.3.

Bevis for korollar 7.4.

Beviset følger ved at bemærke, at $Gl(V)$ er en åben delmængde af $\mathcal{L}(V;V)$ og netop har sin differentiable struktur fastlagt herved (gennemfør beviset).

Bemærkningen om $Gl(V)$ følger ved at betragte determinant afbildningen

$$\det : \mathcal{L}(V;V) \longrightarrow E^1$$

og observere, at $Gl(V) = \det^{-1}(E^1 \setminus \{0\})$.

Bevis for sætning 7.2.

Vi gennemfører beviset i tilfældet, hvor α er en covariant funktor i $\mathcal{V}$.

Antag endvidere, at ξ er et m-dimensionalt differentiabelt vektorbundt.

Betragt nu en åben delmængde U af B, så $\xi | U$ er triviel med trivialisering $h: U \times E^m \longrightarrow \pi^{-1}(U)$. h er en diffeomorfi, og afbildningen

$$h_x : E^m \longrightarrow E_x = \pi^{-1}(x)$$

defineret ved fastsættelsen

$$h_x(v) = h(x,v) \qquad \forall v \in E^m$$

er en isomorfi $\quad \forall x \in U$.

Funktoren α giver nu $\forall x \in U$ en isomorfi (hvorfor?)

$$\alpha(h_x): \alpha(E^m) \longrightarrow \alpha(E_x).$$

Disse isomorfier stykker sammen til en afbildning

$$\alpha(h): U \times \alpha(E^m) \longrightarrow \bar{\pi}^{-1}(U)$$

defineret ved fastsættelsen

$$\alpha(h) \mid x \times \alpha(E^m) = \alpha(h_x) \quad \forall x \in U.$$

Vi har dermed fra det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} U \times E^m \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "proj."'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

konstrueret et nyt kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} U \times \alpha(E^m) \arrow[rr, "\alpha(h)"] \arrow[dr, "proj."'] & & \bar{\pi}^{-1}(U) \arrow[dl, "\bar{\pi}|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

således at $\alpha(h)$ afbilder $x \times \alpha(E^m)$ isomorft på $\alpha(E_x)$. Heraf følger specielt, at $\alpha(h)$ er bijektiv.

Betragt dernæst 2 åbne delmængder U og O af B, så $\xi | U$ og $\xi | O$ er trivielle med trivialiseringer henholdsvis h og k.

Vi vil nu vise, at

$$\alpha(k)^{-1}\alpha(h): (U \cap O) \times \alpha(E^m) \longrightarrow (U \cap O) \times \alpha(E^m)$$

er differentiabel.

Dertil betragter vi først afbildningen

$$k^{-1}h: (U \cap 0) \times E^m \longrightarrow (U \cap 0) \times E^m.$$

Da h og k er diffeomorfier, er $k^{-1}h$ en diffeomorfi.

Idet $k^{-1}h$ afbilder fibre isomorft på sig selv, findes afbildninger

$$\Phi: (U \cap 0) \times E^m \longrightarrow E^m$$

og

$$\varphi: U \cap 0 \longrightarrow Gl(E^m),$$

således at

$$k^{-1}h = (\text{proj.}, \Phi)$$

og så

$$\varphi(x)(v) = \Phi(x,v) \qquad \forall x \in U \cap 0, \quad \forall v \in E^m.$$

Da $\alpha(k)^{-1}\alpha(h)$ ligeledes afbilder fibre isomorft på sig selv, findes afbildninger

$$\Psi: (U \cap 0) \times \alpha(E^m) \longrightarrow \alpha(E^m)$$

og

$$\psi: U \cap 0 \longrightarrow Gl(\alpha(E^m)),$$

således at

$$\alpha(k)^{-1}\alpha(h) = (\text{proj.}, \Psi)$$

og så

$$\psi(x)(w) = \Psi(x,w) \qquad \forall x \in U \cap 0, \quad \forall w \in \alpha(E^m).$$

Vi bemærker nu, at

$$\varphi(x) = k_x^{-1} h_x \qquad \forall x \in U \cap 0$$

og dernæst, at

$$\psi(x) = \alpha(k_x)^{-1}\alpha(h_x) = \alpha(k_x^{-1})\alpha(h_x) = \alpha(k_x^{-1}h_x)$$
$$= \alpha(\varphi(x))$$

for ethvert $x \in U \cap O$.

Da α er en differentiabel funktor, slutter vi heraf, at ψ er differentiabel, når φ er differentiabel (overvej dette).

Følgende række af slutninger viser så, at $\alpha(k)^{-1}\alpha(h)$ er differentiabel:

$$
\begin{aligned}
h \text{ og } k \text{ diff.} &\Longrightarrow k^{-1}h \text{ diff.}\\
&\Longrightarrow \Phi \text{ diff.}\\
&\Longrightarrow \varphi \text{ diff. (korr. 7.4)}\\
&\Longrightarrow \psi \text{ diff.} \quad (\alpha \text{ diff. funktor})\\
&\Longrightarrow \Psi \text{ diff (Korr. 7.4)}\\
&\Longrightarrow \alpha(k)^{-1}\alpha(h) \text{ diff.}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu på naturlig måde konstruere en differentiabel struktur på $\alpha(E)$.

Antag dertil, at $\dim\alpha(E^m) = k$, og at B er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Kortene på $\alpha(E)$ vil vi konstruere ud fra kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to B$ på B, så $\xi | \underline{x}(D)$ er triviel med trivialisering

$$h: \underline{x}(D) \times E^m \longrightarrow \pi^{-1}(\underline{x}(D)).$$

En sådan trivialisering giver en afbildning

$$\alpha(h): \underline{x}(D) \times \alpha(E^m) \longrightarrow \bar{\pi}^{-1}(\underline{x}(D)).$$

Lad nu

$$\theta: E^k \longrightarrow \alpha(E^m)$$

være en fast isomorfi (jævnfør antagelsen).

Vi får så en afbildning

$$\tilde{\underline{x}} = \alpha(h) \circ (\underline{x} \times \theta): D \times E^k \longrightarrow \bar{\pi}^{-1}(\underline{x}(D)).$$

$\tilde{\underline{x}}$ er klart en 1-1-tydig afbildning defineret på en åben mængde $D \times E^k$ i E^{n+k}.

Vi ønsker at definere den differentiable struktur på $\alpha(E)$ v. hj.a. kort af typen $\tilde{\underline{x}}$.

Da vi kan overdække $\alpha(E)$ med sådanne kort (hvorfor?), skal vi ifølge definition 1.2 blot vise, at 2 kort $\tilde{\underline{x}}$ og $\tilde{\underline{y}}$ på $\alpha(E)$ overlapper glat.

Antag altså, at

$$\tilde{\underline{y}} = \alpha(k) \circ (\underline{y} \times \theta) : C \times E^k \longrightarrow \pi^{-1}(\underline{y}(E))$$

er opstået fra kortet $\underline{y}: C \subseteq E^n \longrightarrow B$ på B med trivialisering k af $\xi | \underline{y}(C)$.

Da både $\alpha(h)$ og $\alpha(k)$ afbilder fiberet over et punkt på det tilsvarende fiber over samme punkt, følger det straks, at

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}(\tilde{\underline{x}}(D \times E^k) \cap \tilde{\underline{y}}(C \times E^k)) = \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(C)) \times E^k$$

og

$$\tilde{\underline{y}}^{-1}(\tilde{\underline{x}}(D \times E^k) \cap \tilde{\underline{y}}(C \times E^k)) = \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(C)) \times E^k.$$

Disse mængder er åbne i E^{n+k}, idet $\underline{x}$ og $\underline{y}$ overlapper glat på B.

Vi betragter nu

$$\tilde{\underline{y}}^{-1}\tilde{\underline{x}} = (\underline{y}^{-1} \times \theta^{-1})\alpha(k)^{-1}\alpha(h)(\underline{x} \times \theta)$$

og

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}\tilde{\underline{y}} = (\underline{x}^{-1} \times \theta^{-1})\alpha(h)^{-1}\alpha(k)(\underline{y} \times \theta).$$

Da vi har set, at $\alpha(k)$ og $\alpha(h)$ overlapper differentiabelt, og $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er diffeomorfier fra henholdsvis D og C til deres billeder i B, følger det fra disse udtryk, at $\tilde{\underline{y}}^{-1}\tilde{\underline{x}}$ og $\tilde{\underline{x}}^{-1}\tilde{\underline{y}}$ er differentiable afbildninger.

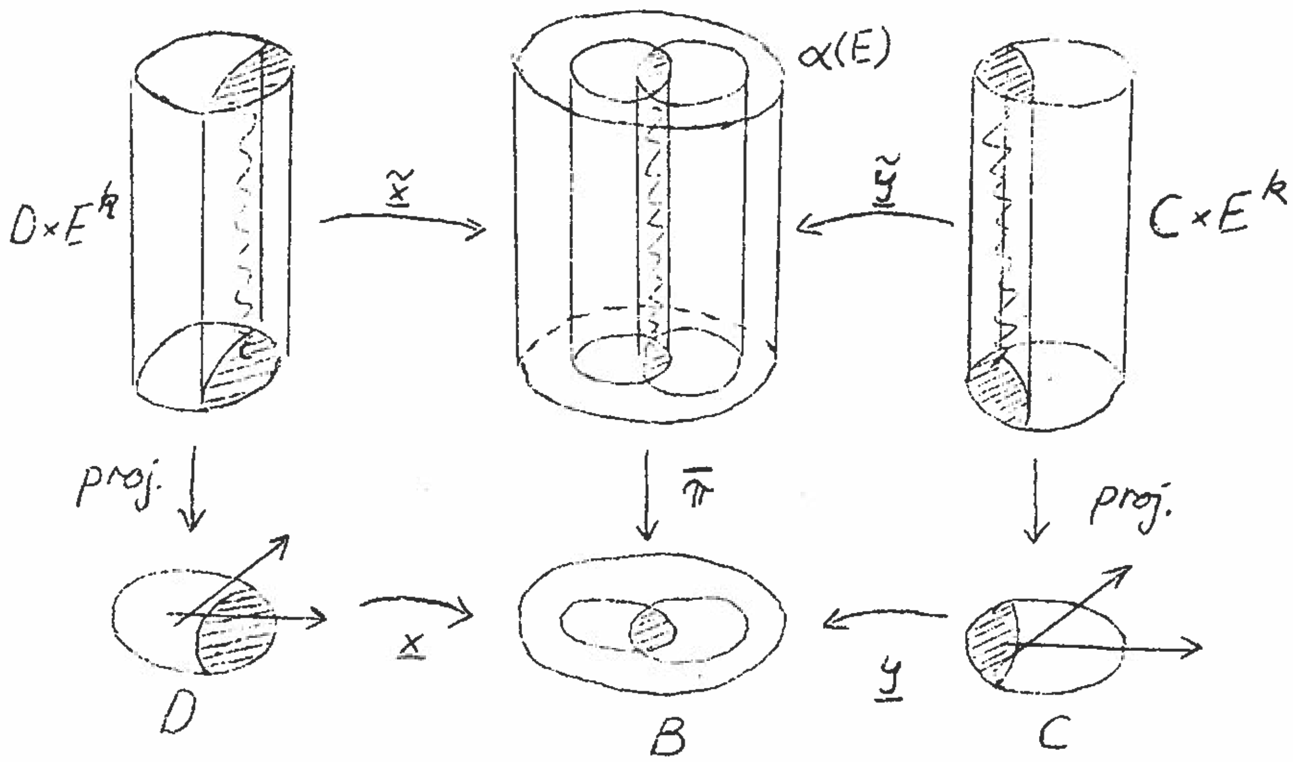


fig. 16

Kortene af type $\underset{\sim}{\tilde{x}}$ udgør således et $(n+k)$-dimensionalt del-atlas på $\alpha(E)$, og bestemmer derved en differentiabel struktur på $\alpha(E)$. Dette er den søgte struktur.

Da en isomorfi af E^k på sig selv er en diffeomorfi, indser man let (gør det), at 2 kort på $\alpha(E)$, som er konstrueret v.hj.a. 2 forskellige isomorfier $\theta: E^k \longrightarrow \alpha(E^m)$, overlapper differentiabelt. Den differentiable struktur på $\alpha(E)$ afhænger således ikke af isomorfien θ.

Af figur 16 eller det tilsvarende diagram fremgår umiddelbart, at

$$\underset{\sim}{x}^{-1}\ \bar{\pi}\ \underset{\sim}{\tilde{x}}: D \times E^k \longrightarrow D$$

blot er projektionen

$$\text{proj.}: D \times E^k \longrightarrow D.$$

Dette viser, at $\bar{\pi}$ er en differentiabel afbildning, når $\alpha(E)$ har ovenstående differentiable struktur (hvorfor?).

Betragt nu en vilkårlig åben delmængde U af B så $\xi | U$ er triviel med trivialisering h. Vi har altså diagrammet

$$\begin{tikzcd} U \times E^m \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

hvor h er en diffeomorfi, og h_x er en isomorfi $\forall x \in U$.

Hertil får vi som tidligere knyttet diagrammet

$$\begin{tikzcd} U \times \alpha(E^m) \arrow[rr, "\alpha(h)"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \bar{\pi}^{-1}(U) \arrow[dl, "\bar{\pi}|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

hvor $\alpha(h) | x \times \alpha(E^m) = \alpha(h_x) \quad \forall x \in U$.

Da $\bar{\pi}$ specielt er kontinuert, er $\bar{\pi}^{-1}(U) \subseteq \alpha(E)$, en åben delmængde i topologien på $\alpha(E)$ bestemt af den differentiable struktur på $\alpha(E)$ (sætning 1.13).

Vi skal nu vise, at $\alpha(h)$ er en diffeomorfi af $U \times \alpha(E^m)$ på denne åbne delmængde af $\alpha(E)$.

Dette viser vi ved at betragte kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow B$ på B, således at $\underline{x}(D) \subseteq U$. For sådanne kort på B giver $h | \underline{x}(D) \times E^m$ en trivialisering af $\xi | \underline{x}(D)$, og til disse trivialiseringer kan vi knytte kort $\tilde{\underline{x}}$ på $\alpha(E)$. Vi får nu:

$$\tilde{\underline{x}}^{-1} \circ \alpha(h) \circ (\underline{x} \times \theta) = (\underline{x}^{-1} \times \theta^{-1}) \circ \alpha(h)^{-1} \circ \alpha(h) \circ (\underline{x} \times \theta)$$

$$= 1_{D \times E^k}.$$

Dette viser, at $\alpha(h)$ er en diffeomorfi (hvorfor?).

Da $\alpha(h_x)$ er en isomorfi $\forall\, x \in U$, $\theta\colon E^k \longrightarrow \alpha(E^m)$ er en isomorfi, og, som vi lige har set, $\alpha(h)$ er en diffeomorfi, følger det, at afbildningen

$$\tilde{h} = \alpha(h) \circ (1_U \times \theta)\colon U \times E^k \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$$

giver en trivialisering af $\alpha(\xi) \mid U$.

Alle ovenstående overvejelser smelter nu sammen i udsagnet:

$\alpha(\xi)$ er et differentiabelt vektorbundt.

Under beviset har vi endvidere set, at enhver lokal trivialisering af ξ giver en tilsvarende lokal trivialisering af $\alpha(\xi)$.

Dermed har vi bevist sætning 7.2.

Opgave 1. Overvej beviset for sætning 7.2, når α er en contravariant funktor.

Vi vil nu undersøge de funktorielle egenskaber ved ovenstående konstruktion.

Lad dertil $\xi = (E, \pi, B)$ og $\xi' = (E', \pi', B)$ være 2 differentiable vektorbundter med samme basis rum, og lad

$$f = (1_B, f_E)\colon \xi \longrightarrow \xi'$$

være en bundt afbildning med den identiske afbildning mellem basis rummene.

Vi har altså følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f_E"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

hvor f_E er en differentiabel afbildning, og $(f_E)_x = f_E | E_x \colon E_x \longrightarrow E'_x$ er lineær $\forall\, x \in B$.

Hvis α er en covariant differentiabel funktor, får vi til f_E knyttet en afbildning

$$\alpha(f_E) : \alpha(E) \longrightarrow \alpha(E')$$

defineret ved fastsættelsen

$$\alpha(f_E) \mid \alpha(E_x) = \alpha((f_E)_x) \qquad \forall x \in B.$$

$\alpha(f_E)$ indgår i følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} \alpha(E) \arrow[rr, "\alpha(f_E)"] \arrow[dr, "\overline{\pi}"'] & & \alpha(E') \arrow[dl, "\overline{\pi'}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Da $\alpha(f_E)$ pr. konstruktion er lineær på hvert fiber, idet α er en funktor i kategorien $\mathcal{V}$, skal vi blot vise, at $\alpha(f_E)$ er differentiabel for at slutte, at

$$\alpha(f) = (1_B, \alpha(f_E)) : \alpha(\xi) \longrightarrow \alpha(\xi')$$

er en bundt afbildning.

Hvis α er en contravariant differentiabel funktor, får vi på tilsvarende måde det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} \alpha(E) \arrow[dr, "\overline{\pi}"'] & & \alpha(E') \arrow[ll, "\alpha(f_E)"'] \arrow[dl, "\overline{\pi'}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

hvor $\alpha(f_E)$ er defineret ved fastsættelsen

$$\alpha(f_E) \mid \alpha(E'_x) = \alpha((f_E)_x) \qquad \forall x \in B.$$

Vi skal igen blot vise, at $\alpha(f_E)$ er differentiabel for at slutte, at

$$\alpha(f) = (1_B, \alpha(f_E)) : \alpha(\xi') \longrightarrow \alpha(\xi)$$

er en bundt afbildning.

<u>Sætning 7.5.</u> Hvis $f = (1_B, f_E) : \xi \longrightarrow \xi'$ er en bundt afbildning, og α er en differentiabel funktor, er

$$\alpha(f) = (1_B, \alpha(f_E)) : \alpha(\xi) \longrightarrow \alpha(\xi')$$

eller

$$\alpha(f) = (1_B, \alpha(f_E)) : \alpha(\xi') \longrightarrow \alpha(\xi),$$

svarende til α covariant eller contravariant, en bundt afbildning.

<u>Bevis.</u> Antag, at ξ har dimensionen m og ξ' dimensionen n.

Vi undersøger tilfældet, hvor α er en covariant funktor.

Betragt nu åbne delmængder U af B så $\xi \mid U$ og $\xi' \mid U$ er trivielle med trivialiseringer henholdsvis h og k.

Hertil svarer afbildninger

$$\alpha(h) : U \times \alpha(E^m) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

og

$$\alpha(k) : U \times \alpha(E^n) \longrightarrow \pi^{-1}(U).$$

Da $\alpha(h)$ og $\alpha(k)$ er diffeomorfier (bevist i sætning 7.2), behøver vi blot at vise, at

$$\alpha(k)^{-1} \circ \alpha(f_E) \circ \alpha(h) : U \times \alpha(E^m) \longrightarrow U \times \alpha(E^n)$$

er differentiabel for at have bevist sætning 7.5 i tilfældet α covariant.

Vi går frem som i beviserne for sætning 6.9 og sætning 7.2.

Afbildningen

$$k^{-1} \circ f_E \circ h\colon U \times E^m \longrightarrow U \times E^n$$

er bestemt fuldstændigt af en afbildning

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{L}(E^m; E^n),$$

således at

$$(k^{-1} \circ f_E \circ h)(x,v) = (x, \varphi(x)(v)) \quad \forall x \in U, \quad \forall v \in E^m.$$

Tilsvarende findes en afbildning

$$\psi\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(\alpha(E^m); \alpha(E^n)),$$

således at

$$\big(\alpha(k)^{-1} \circ \alpha(f_E) \circ \alpha(h)\big)(x,w) = (x, \psi(x)(w)) \quad \forall x \in U, \quad \forall w \in \alpha(E^m).$$

Fra den fibervise definition af afbildningerne $\alpha(h)$, $\alpha(k)$ og $\alpha(f_E)$ følger, at

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \alpha(k_x^{-1}) \circ \alpha((f_E)_x) \circ \alpha(h_x)\\ &= \alpha(k_x^{-1} \circ (f_E)_x \circ h_x)\\ &= \alpha(\varphi(x))\end{aligned}$$

for ethvert $x \in U$.

V.hj.a. lemma 7.3 slutter man (gør dette):

$$k^{-1} \circ f_E \circ h \quad \text{diff.} \Longleftrightarrow \varphi \text{diff.}$$

og

$$\alpha(k)^{-1} \circ \alpha(f_E) \circ \alpha(h) \text{ diff} \Longleftrightarrow \psi \text{diff.}$$

Idet α er en diffentiabel funktor, følger fra ligningen $\psi(x) = \alpha(\varphi(x)) \; \forall x \in U$, at

$$\varphi \text{ diff} \Longrightarrow \psi \text{ diff.}$$

Da $k^{-1} \circ f_E \circ h$ er differentiabel, følger så straks, at

$$\alpha(k)^{-1} \circ \alpha(f_E) \circ \alpha(h) \text{ er differentiabel.}$$

Dette beviser sætning 7.5 for α covariant. Tilfældet α contravariant bevises tilsvarende.

Lad nu B være en fastholdt differentiabel mangfoldighed.

Ved <u>kategorien af differentiable vektor bundter over B</u> vil vi forstå den kategori, hvis objekter er differentiable vektorbundter $\xi = (E, \pi, B)$ over B, og hvis morfier er bundt afbildninger $f = (1_B, f_E): \xi \longrightarrow \xi'$.

Det er let at indse, at vi virkelig har beskrevet en kategori (overvej dette).

Sætningerne 7.2 og 7.5 kan nu sammenfattes i følgende sætning

<u>Sætning 7.6.</u> En differentiabel funktor α inducerer for enhver differentiabel mangfoldighed B en funktor af samme varians som α i kategorien af differentiable vektorbundter over B.

<u>Opgave 2.</u> Bevis sætning 7.6.

I opgaverne 3 og 4 behandles spørgsmål vedrørende konstruktionen af en bundt afbildning $\alpha(f)$ svarende til en bundt afbildning $f = (f_B, f_E)$, når vi ikke forlanger, at f_B skal være en identisk afbildning. Hvis α er en covariant differentiabel funktor behøves ingen bånd på f_B. Hvis α er contravariant, må vi nødvendigvis forlange, at f_B er en diffeomorfi.

<u>Opgave 3.</u> Lad α være en covariant differentiabel funktor, og lad

$$f = (f_B, f_E): \xi \longrightarrow \xi'$$

være en vilkårlig bundt afbildning.

Vis, at der findes en bundt afbildning

$$\alpha(f) = (f_B, \alpha(f_E)): \alpha(\xi) \longrightarrow \alpha(\xi').$$

Vis, at α herved inducerer en covariant funktor i kategorien af differentiable vektorbundter.

Opgave 4. Lad α være en contravariant differentiabel funktor, og lad

$$f = (f_B, f_E) : \xi \longrightarrow \xi'$$

være en bundt afbildning , hvor f_B er en diffeomorfi.

Vis, at der findes en bundt afbildning

$$\alpha(f) = (f_B^{-1}, \alpha(f_E)) : \alpha(\xi') \longrightarrow \alpha(\xi).$$

Beskriv en kategori således, at ovenstående konstruktion bliver en contravariant funktor i denne kategori.

I det følgende skal vi betragte en række exempler på differentiable funktorer, der alle har stor betydning i differential geometrien.

I disse exempler er V og W henholdsvis et n-dimensionalt og et m-dimensionalt reelt vektorrum. Antag endvidere, at $\{e_1, \ldots, e_n\}$ er en basis for V med tilhørende dual basis $\{e^{*1}, \ldots, e^{*n}\}$ for V^*, og at $\{f_1, \ldots, f_m\}$ er en basis for W med tilhørende dual basis $\{f^{*1}, \ldots, f^{*m}\}$ for W^*.

Exempel 7.7. Funktoren T^r_* for $r \geq 1$.

Vi skal bevise, at afbildningen

$$F \in \mathcal{L}(V; W) \curvearrowright T^r_*(F) \in \mathcal{L}(T^r_*(V); T^r_*(W))$$

er differentiabel.

Vi vil vise dette ved at sætte de 2 afbildningsrum i forbindelse med euklidiske rum via matrixbeskrivelse af lineære afbildninger.

Dertil bruger vi i $T_*^r(V)$ basen

$$\left\{ e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r} \mid 1 \leqq j_1 \ldots j_r \leqq n \right\}$$

og i $T_*^r(W)$ basen

$$\left\{ f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_r} \mid 1 \leqq i_1 \ldots i_r \leqq m \right\}.$$

Matrixbeskrivelse giver nu de 1-1-tydige korrespondancer

$$F \in \mathcal{L}(V; W) \longleftrightarrow \{ a_j^i \} \in E^{m \cdot n}$$

$$G \in \mathcal{L}(T_*^r(V); T_*^r(W)) \longleftrightarrow \left\{ b_{j_1 \ldots j_r}^{i_1 \ldots i_r} \right\} \in E^{m^r \cdot n^r}$$

hvor

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_j^i f_i$$

og

$$G(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r}) = \sum_{1 \leqq i_1 \ldots i_r \leqq m} b_{j_1 \ldots j_r}^{i_1 \ldots i_r} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_r}.$$

I $E^{p \cdot q}$ angiver p antallet af rækker og q antallet af søjler i matricerne.

Afbildning $F \rightsquigarrow T_*^r(F)$ svarer nu i koordinatsystemerne givet ved ovenstående korrespondancertil en afbildning

$$E^{m \cdot n} \longrightarrow E^{m^r \cdot n^r}.$$

Når man bemærker, at

$$T_*^r(F)(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r}) = F(e_{j_1}) \otimes \ldots \otimes F(e_{j_r})$$

indser man let, at denne afbildning er beskrevet ved

$$\{ a_j^i \} \in E^{m \cdot n} \rightsquigarrow \left\{ a_{j_1}^{i_1} \ldots a_{j_r}^{i_r} \right\} \in E^{m^r \cdot n^r}.$$

Da denne afbildning trivielt er differentiabel, har vi bevist, at den forelagte afbildning er differentiabel, og dermed, at T_*^r er en differentiabel funktor.

Exempel 7.8. Funktoren T_1^*.
Vi skal bevise, at afbildningen

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \rightsquigarrow T_1^*(F) \in \mathcal{L}(T_1^*(W);\ T_1^*(V))$$

er differentiabel.

Det bemærkes, at $T_1^*(V) = V^*$, $T_1^*(W) = W^*$ og at $T_1^*(F) = F^*$ er den duale afbildning hørende til F.

Vi benytter igen matrixbeskrivelse af de lineære afbildninger. Derved får vi de 1-1-tydige korrespondencer

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \longleftrightarrow \{a_j^i\} \in E^{m\cdot n}$$

$$G \in \mathcal{L}(W^*,V^*) \longleftrightarrow \{b_l^k\} \in E^{n\cdot m}$$

hvor

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_j^i f_i \quad \text{og} \quad G(f^{*k}) = \sum_{l=1}^{n} b_l^k e^{*l}.$$

Bemærk, at i den traditionelle opstilling af en matrix har $\{a_j^i\}$ øvre index som række index og nedre index som søjle index, medens $\{b_l^k\}$ har nedre index som række index og øvre index som søjle index.

Vi finder nu

$$b_i^j = \langle e_i, F^*(f^{*j})\rangle = \langle F(e_i), f^{*j}\rangle = a_i^j.$$

Koordinatfremstillingen af afbildningen $F \rightsquigarrow F^*$ bliver derfor

$$\{a_j^i\} \in E^{m\cdot n} \rightsquigarrow \{a_i^j\} \in E^{n\cdot m}.$$

Da denne afbildning er differentiabel, har vi bevist, at den forelagte afbildning er differentiabel, og dermed, at T_1^* er en differentiabel funktor.

Exempel 7.9. Funktoren Λ_r^* for $r \geqq 1$.
Vi skal vise, at afbildningen

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \rightsquigarrow \Lambda_r^*(F) \in \mathcal{L}(\Lambda_r^*(W);\Lambda_r^*(V))$$

er differentiabel.

Hvis $r > \min(n,m)$ er mindst et af vektorrummene $\Lambda_r^*(V)$ og $\Lambda_r^*(W)$ nul-vektorrummet (Appendix 2 side A 2.43). Deraf følger, at $\mathcal{L}(\Lambda_r^*(W);\Lambda_r^*(V))$ er nul-vektorrummet og altså som mangfoldighed blot et punkt (en 0-dimensional differentiabel mangfoldighed). Idet enhver afbildning fra eller til en 0-dimensional differentiabel mangfoldighed er differentiabel, er den forelagte afbildning differentiabel i dette tilfælde.

Antag nu, at $r \leqq \min(n,m)$.
Vi vil igen benytte matrixbeskrivelse af de lineære afbildninge
Dertil benytter vi i $\Lambda_r^*(V)$ basen

$$\{ e^{*i_1} \wedge \ldots \wedge e^{*i_r} \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n \}$$

og i $\Lambda_r^*(W)$ basen

$$\{ f^{*j_1} \wedge \ldots \wedge f^{*j_r} \mid 1 \leqq j_1 < \ldots < j_r \leqq m \}.$$

Matrixbeskrivelse giver de 1-1-tydige korrespondencer

$$F \in \mathcal{L}(V;W) \longleftrightarrow \{ a^i_j \} \in E^{m \cdot n}$$

$$G \in \mathcal{L}(\Lambda_r^*(W);\Lambda_r^*(V)) \longleftrightarrow \{ b^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r} \} \in E^{\binom{n}{r} \cdot \binom{m}{r}}$$

hvor index på $b^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r}$ er underkastet betingelserne

$$1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n \quad \text{og} \quad 1 \leqq j_1 < \ldots < j_r \leqq m.$$

Matricerne er bestemt ved ligningerne

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_j^i f_i \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

og

$$G(f^{*j_1} \wedge \dots \wedge f^{*j_r}) = \sum_{1 \leqq i_1 < \dots < i_r \leqq n} b_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} \, e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_r}$$

for $1 \leqq j_1 < \dots < j_r \leqq m$.

Koordinatbeskrivelsen af afbildningen $F \curvearrowright \Lambda_r^*(F)$ bliver en afbildning

$$E^{m \cdot n} \longrightarrow E^{\binom{n}{r} \cdot \binom{m}{r}}.$$

Vi skal finde denne afbildning.
Dertil bemærker vi, at

$$\Lambda_r^*(F)(f^{*j_1} \wedge \dots \wedge f^{*j_r}) = F^*(f^{*j_1}) \wedge \dots \wedge F^*(f^{*j_r})$$

og

$$F^*(f^{*j_k}) = \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k}^{j_k} \, e^{*i_k}.$$

Benytter man nu, at $\wedge$ er multilineær og alternerende, indser man let, at $\Lambda_r^*(F)(f^{*j_1} \wedge \dots \wedge f^{*j_r})$ bliver en sum af led af typen

$$a_{i_{\sigma(1)}}^{j_1} \cdots a_{i_{\sigma(r)}}^{j_r} \, e^{*i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e^{*i_{\sigma(r)}},$$

hvor $1 \leqq i_1 < \dots < i_r \leqq n$ og $\sigma \in S_r$.

Da

$$e^{*i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e^{*i_{\sigma(r)}} = \operatorname{sign}\sigma \cdot e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_r}$$

slutter vi så, at koordinatbeskrivelsen af $F \curvearrowright \Lambda_r^*(F)$ er afbildningen

$$\{a_j^i\} \in E^{m \cdot n} \curvearrowright \{b_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}\} \in E^{\binom{n}{r} \cdot \binom{m}{r}},$$

hvor

$$b^{j_1\dots j_r}_{i_1\dots i_r} = \sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sign}\sigma\ a^{j_1}_{i_{\sigma(1)}}\cdots a^{j_r}_{i_{\sigma(r)}}$$

for $1 \leqq i_1 < \dots < i_r \leqq n$ og $1 \leqq j_1 < \dots < j_r \leqq m$.

Da denne afbildning klart er differentiabel, har vi bevist, at den forelagte afbildning er differentiabel, og dermed, at Λ^*_r er en differentiabel funktor.

<u>Opgave 5.</u> Vis, at T^*_r og Λ^r_* for $r \geq 1$ er differentiable funktorer.

Hvis vi anvender de differentiable funktorer T^r_*, T^*_r og Λ^*_r på fibrene i et vilkårligt differentiabelt vektorbundt, får vi ifølge sætning 7.2 nye differentiable vektorbundter.

En række bundter af stor betydning i differential geometrien opstår ved at anvende disse funktorer på tangentbundter.

I det følgende er M^n derfor en n-dimensional differentiabel mangfoldighed med tangentbundt

$$\tau(M) = (T(M), \pi_M, M).$$

Inden vi anvender differentiable funktorer på $\tau(M)$, genkalder vi visse egenskaber ved dette bundt.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$, giver de n lokale vektorfelter $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ en trivialisering af $\tau(M) \mid \underline{x}(D)$. Vi har altså følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{x}(D)\times E^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "proj."'] & & \pi_M^{-1}(\underline{x}(D)) \arrow[dl, "\pi_M|"] \\ & \underline{x}(D) & \end{tikzcd}$$

hvor h er diffeomorfien givet ved

$$h(\underline{x}(u_1,\dots,u_n),(t^1,\dots,t^n)) = \sum_{i=1}^{n} t^i \underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)$$

$$\forall (u_1,\dots,u_n) \in D \text{ og } \forall (t^1,\dots,t^n) \in E^n.$$

For at læseren i det følgende kan drage visse analogier, bemærker vi endvidere, at hvis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ er standard basen i E^n, afbilder h tværsnittet

$$\underline{p} \in \underline{x}(D) \longrightarrow (\underline{p}, e_i) \in \underline{x}(D) \times E^n$$

i det trivielle bundt over $\underline{x}(D)$ på tværsnittet $\underline{X}_{u_i}$ i $\tau(M) \mid \underline{x}(D)$.

Det duale tangentbundt for M.

Anvender vi funktoren T_1^* på $\tau(M)$, får vi det såkaldte duale tangentbundt for M. For dette bruger vi betegnelsen

$$\tau^*(M) = (T^*(M), \overline{\pi}_M, M).$$

Vi bemærker, at

$$T^*(M) = \bigcup_{\underline{p} \in M} (T_pM)^*.$$

For det duale tangentrum $(T_pM)^*$ i $\underline{p} \in M$ bruger man ofte betegnelsen T_p^*M. Pr. definition har vi altså $T_p^*M = (T_pM)^*$.

En vektor i T_p^*M kaldes i tensor regning for en covariant vektor i $\underline{p} \in M$. Man møder også hyppigt betegnelsen en 1-form i $\underline{p} \in M$. Den sidste betegnelse retfærdiggøres af, at $T_1^* = \Lambda_1^*$. For vektorer i T_p^*M vil vi bruge symboler som ω_p og η_p.

Som sædvanlig, når vi har at gøre med et reelt vektorrum og dets tilhørende duale rum, har vi en bilineær afbildning

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : T_pM \times T_p^*M \longrightarrow E^1.$$

Hvis $X_p \in T_pM$ og $\omega_p \in T_p^*M$ er $\langle X_p, \omega_p \rangle$ værdien af ω_p på X_p.

Lad nu $f: U \longrightarrow E^1$ være en reel differentiabel funktion defineret på en åben omegn U af $\underline{p} \in M$ (med notationen på side 13: $f \in F(M, \underline{p})$).

f giver anledning til en covariant vektor df_p (eller $df(p)$) i $\underline{p} \in M$ kaldet <u>differentialet af f i p</u>. Da afbildningen

$$X_p \in T_pM \curvearrowright X_p[f] \in E^1$$

er lineær (lemma 2.12), kan vi definere df_p ved fastsættelsen

$$\langle X_p, df_p \rangle = X_p[f] \qquad \forall X_p \in T_pM.$$

Vi har tidligere brugt betegnelsen differentialet af f i $\underline{p} \in M$ for den lineære afbildning

$$f_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}E^1.$$

Hvad er forbindelsen mellem df_p og f_{*p} ?

For at få svaret på dette spørgsmål betragter vi standard koordinatsystemet $\underline{x} = 1_{E^1} : E^1 \longrightarrow E^1$ på E^1 med den enkelte koordinat $u \in E^1$. Enhver tangentvektor i $T_{f(p)}E^1$ kan nu entydigt skrives på formen $t \cdot \underline{x}_u(f(\underline{p}))$, hvor t er et reelt tal. Hvis $X_p \in T_pM$ findes altså et entydigt bestemt reelt tal t, således at

$$f_{*p}(X_p) = t \cdot \underline{x}_u(f(\underline{p})).$$

Anvender vi denne ligning på koordinatafbildningen $u \in E^1 \curvearrowright u \in E^1$, altså 1_{E^1}, hørende til koordinatsystemet $\underline{x}$ på E^1, finder vi:

$$\begin{aligned}
t &= t \cdot (\underline{x}_u(f(p))[1_{E^1}]) \\
&= (t \cdot \underline{x}_u(f(p)))[1_{E^1}] && \text{(lemma 2.12)} \\
&= f_{*p}(X_p)[1_{E^1}] \\
&= X_p[1_{E^1} f] && \text{(sætning 3.5)} \\
&= X_p[f] \\
&= \langle X_p, df_p \rangle .
\end{aligned}$$

Vi har hermed vist, at

$$f_{*p}(X_p) = \langle X_p, df_p \rangle \ \underline{x}_u(f(\underline{p})) \qquad \forall X_p \in T_pM$$

eller anderledes udtrykt

$$f_{*p} = \langle \cdot, df_p \rangle \ \underline{x}_u(f(p)).$$

Denne ligning etablerer en kanonisk 1-1-tydig korrespondence mellem f_{*p} og df_p. Dette retfærdiggør den fælles betegnelse differentialet af f i $\underline{p} \in M$.

Når $f: U \to E^1$ kan vi til ethvert $\underline{p} \in U$ knytte $df_p \in T_p^*M$. f giver således anledning til et tværsnit

$$df: U \longrightarrow \pi_M^{-1}(U) \subseteq T^*(M)$$

i $\mathcal{T}^*(M) \mid U$, hvis værdi i $\underline{p} \in U$ netop er $df_p \in T_p^*M$.

Lad nu $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et koordinatsystem på M med koordinater $(u_1, \dots, u_n) \in D$.

Svarende til kortet $\underline{x}$ har vi de n koordinatfunktioner

$$\varphi_i: \underline{x}(D) \longrightarrow E^1 \qquad \text{for} \quad i = 1, \dots, n$$

defineret ved fastsættelsen

$$\varphi_i(\underline{x}(u_1, \dots, u_n)) = u_i \qquad \forall (u_1, \dots, u_n) \in D.$$

Af naturlige grunde bruger vi betegnelsen du_i for differentialet af φ_i. Pr. definition har vi altså

$$\quad = d\varphi_i \qquad \text{for} \quad i = 1, \dots, n.$$

Differentialet af den i'te koordinatfunktion i $\underline{x}(u_1, \dots, u_n) \in \underline{x}(D)$ betegner vi med $du_i(u_1, \dots, u_n)$.

Som en konsekvens af vore definitioner får vi umiddelbart:

$$\langle \underline{x}_{u_j}(u_1,\dots,u_n), du_i(u_1,\dots,u_n)\rangle = \underline{x}_{u_j}[\varphi_i] = \delta_{ij}$$

$$\forall i,j = 1,\dots,n \quad \text{og} \quad \forall (u_1,\dots,u_n) \in D.$$

Heraf fremgår, at tværsnittene $du_1,\dots,du_n$ i $\mathcal{T}^*(M)\,|\,\underline{x}(D)$ i hvert dualt tangentrum over $\underline{x}(D)$ netop giver den duale basis til basen i det tilsvarende tangentrum defineret af tværsnittene $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ i $\mathcal{T}(M)\,|\,\underline{x}(D)$.

Med denne observation til sin rådighed kan man indse, at tværsnittene $du_1,\dots,du_n$ er differentiable.

Vi beviser dette således:

Fra diagrammet

$$\begin{tikzcd} \underline{x}(D) \times E^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "proj."'] & & \pi_M^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi_M|"] \\ & \underline{x}(D) & \end{tikzcd}$$

hvor $U = \underline{x}(D)$ og

hvor h er den sædvanlige diffeomorfi givet ved tværsnittene $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ i $\mathcal{T}(M)\,|\,\underline{x}(D)$, får vi ved anvendelse af funktoren T_1^* det kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \underline{x}(D) \times (E^n)^* \arrow[dr, "proj."'] & & \bar{\pi}_M^{-1}(U) \arrow[ll, "T_1^*(h)"'] \arrow[dl, "\bar{\pi}_M"] \\ & \underline{x}(D) & \end{tikzcd}$$

Den differentiable struktur på $T^*(M)$ er netop konstrueret, så $T_1^*(h)$ bliver en diffeomorfi.

Da tværsnittene

$$\underline{p} \in \underline{x}(D) \longrightarrow (\underline{p}, e_i) \in \underline{x}(D) \times E^n$$

i det trivielle bundt over $\underline{x}(D)$ ved h afbilder på tværsnittene $\underline{x}_{u_i}$ i $\mathcal{T}(M)|\underline{x}(D)$, og $T_1^*(h)|T_p^*(M) = h^*_p$ $\forall \underline{p} \in \underline{x}(D)$, kan man indse (gør dette), at tværsnittene du_i i $\mathcal{T}^*(M)|\underline{x}(D)$ ved $T_1^*(h)$ afbildes på tværsnittene

$$\underline{p} \in \underline{x}(D) \longrightarrow (\underline{p}, e^{*i}) \in \underline{x}(D) \times (E^n)^*$$

i bundtet $(\underline{x}(D) \times (E^n)^*, \text{proj.}, \underline{x}(D))$.

$\{e^{*1}, \ldots, e^{*n}\}$ er den duale basis til standard basen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ for E^n.

Da disse sidste tværsnit trivielt er differentiable, og $T_1^*(h)$ er en diffeomorfi, følger det, at tværsnittene $du_1, \ldots, du_n$ i $\mathcal{T}^*(M)|\underline{x}(D)$ er differentiable.

Da de samtidig giver en basis for hvert fiber, definerer de differentiable tværsnit $du_1, \ldots, du_n$ ifølge sætning 6.19 en trivialisering af $\mathcal{T}^*(M)|\underline{x}(D)$.

Vi kan nu også angive en række pæne kort på $T^*(M)$. Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ er et kort på M, svarer hertil et kort på $T^*(M)$, nemlig

$$\underline{\tilde{x}}: D \times E^n \longrightarrow T^*(M)$$

defineret ved fastsættelsen

$$\underline{\tilde{x}}(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot du_i(u_1, \ldots, u_n)$$
$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in D \text{ og } \forall (t_1, \ldots, t_n) \in E^n.$$

Lemma 7.10. Lad ω være et tværsnit i $\mathcal{T}^*(M)$, og lad $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M. Så findes der entydigt bestemte reelle funktioner

$$a_i : D \longrightarrow E^1 \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n,$$

således, at

$$\omega(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\ldots,u_n)du_i(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

<u>Bevis.</u> Følger straks af, at tværsnittene $du_1,\ldots,du_n$ i $\tau^*(M)|\underline{x}(D)$ giver en basis i hvert fiber over $\underline{x}(D)$.

Funktionerne $a_1,\ldots,a_n$ kaldes for <u>koordinatfunktionerne</u> over $\underline{x}(D)$ af tværsnittet ω i $\tau^*(M)$.

Vi stiler mod en sætning vedrørende differentiabilitet af tværsnit i $\tau^*(M)$. Først gør vi imidlertid en almen bemærkning.

Antag, at X er et vektorfelt over en åben delmængde $U \subseteq M$ (X er altså et tværsnit i $\tau(M)|U$), og at ω er et tværsnit i $\tau^*(M)|U$. Så kan vi definere en reel afbildning

$$\langle X,\omega\rangle : U \longrightarrow E^1$$

ved fastsættelsen

$$\langle X,\omega\rangle(\underline{p}) = \langle X_p,\omega_p\rangle \qquad \forall \underline{p} \in U.$$

Vi har altså på naturlig måde udvidet den bilineære afbildning

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : T_pM \times T_p^*M \longrightarrow E^1 \qquad \forall \underline{p} \in M$$

til tværsnit i $\tau(M)|U$ og $\tau^*(M)|U$.

<u>Sætning 7.11.</u> Et tværsnit ω i $\tau^*(M)$ er differentiabelt, hvis og kun hvis en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

D_1) $\omega : M \longrightarrow T^*(M)$ er differentiabel

D_2) I enhver koordinatfremstilling af ω er koordinatfunktionerne differentiable.

D_3) Afbildningen $\langle X, \omega|U\rangle : U \longrightarrow E^1$ er differentiabel for ethvert differentiabelt vektorfelt X på $U \subseteq M$.

Bevis. Betingelse $D_1)$ er definitionen på et differentiabelt tværsnit (Definition 6.12).

$D_1) \Longleftrightarrow D_2)$. Betragtes et kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M og det tilsvarende kort $\tilde{\underline{x}}$ på $T^*(M)$, får vi

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}\omega\, \underline{x}(u_1,\ldots,u_n)=(u_1,\ldots,u_n,a_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,a_n(u_1,\ldots,u_n))$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Heraf aflæses ækvivalensen af $D_1)$ og $D_2)$ straks.

$D_2) \Longleftrightarrow D_3)$. Lad igen $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M. Et vektorfelt X på $\underline{x}(D)$ har så en koordinatfremstilling

$$X(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a^i(u_1,\ldots,u_n)\underline{x}_{u_i}(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Samtidig har vi:

$$\omega(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1,\ldots,u_n)du_i(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Da tværsnittene $\underline{x}_{u_i}$ og du_i er gensidigt duale, følger så, at

$$\langle X, \omega|\underline{x}(D)\rangle (\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a^i(u_1,\ldots,u_n)\cdot a_i(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Antag nu, at $D_2)$ er opfyldt. Så er funktionerne $a_i: D \rightarrow E^1$ differentiable $\forall i = 1,\ldots,n$. Hvis X er et differentiabelt vektorfelt på $\underline{x}(D)$, er funktionerne $a^i: D \longrightarrow E^1$ differentiable $\forall i = 1,\ldots,n$. Fra ovenstående ligning får vi så umiddelbart, at

$$\langle X, \omega|\underline{x}(D)\rangle\, \underline{x}: D \longrightarrow E^1$$

er differentiabel. Dette viser, at $D_3)$ er opfyldt (overvej dette). Vi har dermed set, at $D_2) \Longrightarrow D_3)$.

Antag nu, at $D_3)$ er opfyldt. Så gælder specielt, at afbildningen

$$\langle \underline{x}_{u_i}, \omega | \underline{x}(D) \rangle \; \underline{x}: D \longrightarrow E^1$$

er differentiabel $\forall i = 1,\dots,n$.

Da

$$a_i = \langle \underline{x}_{u_i}, \omega | \underline{x}(D) \rangle \; \underline{x} \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

følger så, at a_i er differentiabel $\forall i = 1,\dots,n$. Dermed har vi bevist, at $D_3) \Longrightarrow D_2)$.

Dette afslutter beviset for sætning 7.11.

Et tværsnit ω i $\mathcal{T}^*(M)$ kaldes for et <u>covariant vektorfelt på M.</u>

For differentiable tværsnit ω i $\mathcal{T}^*(M)$ bruges betegnelserne <u>differentiabelt covariant vektorfelt på M</u> eller <u>differential form af grad 1 på M.</u>

Vektorrummet af differential former af grad 1 på M vil vi betegne med $\underline{\mathcal{D}^1(M)}$. (For vektorrumsstrukturen se sætning 6.17.)

Mængden af reelle differentiable funktioner på M udgør et vektorrum (endog en algebra) under punktvis addition (og multiplikation) af funktionsværdier. Da dette vektorrum senere skal spille rollen som vektorrummet af differential former af grad 0 på M, betegner vi det med $\underline{\mathcal{D}^0(M)}$.

$D_3)$ i sætning 7.11 viser nu, at vi har en afbildning

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M),$$

hvor $\langle X,\omega \rangle(p) = \langle X_p, \omega_p \rangle \qquad \forall p \in M$.

Hvis $f \in \mathcal{D}^0(M)$ og $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$, kan vi definere et tværsnit $f\omega$ i $\mathcal{T}^*(M)$ ved fastsættelsen

$$(f\omega)_p = f(p)\,\omega_p \qquad \forall p \in M.$$

Ved f.eks. at betragte koordinatfremstillingen af ω kan man let indse, at $f\omega$ er et differentiabelt tværsnit.

Vi har derfor til $f \in \mathcal{D}^0(M)$ og $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$ knyttet $f\omega \in \mathcal{D}^1(M)$.

Hvis $f \in \mathcal{D}^0(M)$ og $X \in \mathfrak{X}(M)$ har vi på tilsvarende måde defineret $fX \in \mathfrak{X}(M)$.

Idet

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : T_pM \times T_p^*M \longrightarrow E^1 \qquad \forall \underline{p} \in M$$

er bilineær, kan man nu indse (gør det), at

$$\langle fX + gY, \omega \rangle = f \cdot \langle X, \omega \rangle + g \cdot \langle Y, \omega \rangle$$

og

$$\langle X, f\omega + g\zeta \rangle = f \cdot \langle X, \omega \rangle + g \langle X, \zeta \rangle$$

for ethvert $f, g \in \mathcal{D}^0(M)$, ethvert $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ og ethvert $\omega, \zeta \in \mathcal{D}^1(M)$.

Afbildningen

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$$

er således bilineær m.h.t. funktioner i $\mathcal{D}^0(M)$.

Betragt nu specielt differentialet df af en differentiabel funktion $f : U \longrightarrow E^1$.

Hvis $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M med $\underline{x}(D) \cap U \neq \emptyset$, får vi en koordinatfremstilling af df over $\underline{x}(D) \cap U$. Præcist har vi:

$$df(\underline{x}(u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u_1, \ldots, u_n) du_i(u_1, \ldots, u_n)$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_n) \in \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap U)$.

eller anderledes udtrykt:

$$df = \sum_{i=1}^{n} a_i \, du_i \quad \text{på} \quad \underline{x}(D) \cap U.$$

Vi kan bestemme koordinatfunktionerne a_i ved at anvende ovenstående ligning på vektorfelterne $\underline{x}_{u_i}$.

Vi finder

$$\langle \underline{x}_{u_i}, df \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \underline{x}_{u_i}, du_j \rangle = a_i .$$

(Her bruger vi, at $\langle \cdot , \cdot \rangle$ er bilineær m.h.t. reelle differentiable funktioner.)

Pr. definition af df får vi nu videre:

$$\langle \underline{x}_{u_i}, df \rangle = \underline{x}_{u_i} [f] = \frac{\partial (f\underline{x})}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} .$$

Vi har dermed bevist, at

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i \quad \text{på} \quad \underline{x}(D) \cap U.$$

Dette er den sædvanlige fremstilling af et differential, og da

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial (f\underline{x})}{\partial u_i} \quad \text{(pr. definition)}$$

for $i = 1, \ldots, n$ er differentiable funktioner, vil dette vise (overvej dette), at df er et differentiabelt covariant vektorfelt.

Vi har nu specielt indset, at dannelse af differential giver en afbildning

$$d : \mathscr{D}^0(M) \longrightarrow \mathscr{D}^1(M).$$

Man indser let (gør det), at d er lineær, altså at

$$d(af + bg) = a\, df + b\, dg$$

for ethvert $a, b \in E^1$ og ethvert $f, g \in \mathscr{D}^0(M)$.

Der gælder endvidere, at

$$d(f\cdot g) = g\cdot df + f\cdot dg \qquad \forall f,g \in \mathscr{D}^{o}(M).$$

Opgave 6. Bevis ovenstående formel.

Opgave 7. Antag, at M er dækket af åbne mængder $U_1,\dots,U_k$, og at $f_i: U_i \longrightarrow E_1$ er differentiable funktioner, således at $f_i - f_j$ er konstant på $U_i \cap U_j$ $\forall i,j = 1,\dots,k$.

Vis, at der findes en differential form ω af grad 1 på M, således at $\omega | U_i = df_i$ $\forall i = 1,\dots,k$.

Opgave 8. Antag, at M er kurvesammenhængende.

Vis, at $f \in \mathscr{D}^{o}(M)$ er en konstant funktion hvis og kun hvis $df = 0$ ($df_p = 0 \in T_p^*M$ $\forall \underline{p} \in M$).

Vi betragter nu til slut skift af koordinater på M.

Lad altså $\underline{x}: D \subseteq E^n \longrightarrow M$ og $\underline{y}: E \subseteq E^n \longrightarrow M$ være kort på M med koordinater henholdsvis $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og $(v_1,\dots,v_n) \in E$.

Idet du_i og dv_i blot er differentialet af de respektive koordinatfunktioner hørende til kortene $\underline{x}$ og $\underline{y}$ gælder på $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)$:

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial v_j} dv_j \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

og

$$dv_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} du_j \qquad \forall i = 1,\dots,n.$$

Præcist udtrykt har vi:

$$du_i(\underline{x}^{-1}\underline{y}(v_1,\dots,v_n)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial v_j}(v_1,\dots,v_n)dv_j(v_1,\dots,v_n)$$

og

$$dv_i(\underline{y}^{-1}\underline{x}(u_1,\dots,u_n)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial u_j}(u_1,\dots,u_n)du_j(u_1,\dots,u_n)$$

for ethvert $(v_1,\dots,v_n) \in \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$
og ethvert $(u_1,\dots,u_n) \in \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$.

Bemærk forskellen mellem disse transformations regler og reglerne

$$\underline{x}_{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \underline{x}_{v_j} \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

og

$$\underline{x}_{v_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial v_i} \underline{x}_{u_j} \qquad \forall i = 1,\dots,n.$$

Opgave 9. Vis, at man v.hj.a. transformations reglerne for $d\underline{u}_i$ og $d\underline{v}_i$ direkte kan konstruere den differentiable struktur på $T^*(M)$. Konstruer dernæst $\mathcal{T}^*(M)$ direkte (kopier konstruktionen af $\mathcal{T}(M)$).

§ 8. Differential former.

I denne paragraf skal vi beskæftige os med systemet af differential former på en differentiabel mangfoldighed. Regning med differential former blev sat i system i begyndelsen af dette århundrede af bl.a. H. Poincare, É. Goursat og frem for alt Élie Cartan. Differential former har vist sig at være særdeles nyttige for studiet af differentiable mangfoldigheder, og de indtager en fremtrædende plads i den nyeste udvikling af differential geometrien.

Lad i det følgende M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Bundter af ydre former over M.

For ethvert helt tal $r \geq 1$ vil vi betragte et differentiabelt vektorbundt $\underline{\lambda_r^*(M)}$ over M, nemlig bundtet af ydre r-former over M.

Det omtalte bundt $\underline{\lambda_r^*(M)}$ opstår fra tangentbundtet $\tau(M) = (T(M), \pi_M, M)$ ved at anvende den differentiable funktor Λ_r^* (eksempel 7.9) på alle fibrene i $\tau(M)$. Ifølge Milnor's princip (sætning 7.2) får vi herved et differentiabelt vektorbundt

$$\lambda_r^*(M) = (\Lambda_r^*(T(M)), \overline{\pi}_M, M),$$

hvor

$$\Lambda_r^*(T(M)) = \bigcup_{p \in M} \Lambda_r^*(T_pM)$$

og $\overline{\pi}_M$ afbilder $\Lambda_r^*(T_pM)$ på $p \in M$ for ethvert $p \in M$.

Lad nu $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M og betragt trivialiseringen h af $\tau(M)|\underline{x}(D)$ bestemt af de lokale vektorfelter $\underline{x}_{u_1}, \dots, \underline{x}_{u_n}$ på $\underline{x}(D)$. Vi har altså diagrammet

$$\begin{tikzcd} \underline{x}(D) \times E^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi_M^{-1}(\underline{x}(D)) \arrow[dl, "\pi_M|"] \\ & \underline{x}(D) & \end{tikzcd}$$

hvor h er diffeomorfien givet ved

$$h(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n),t^1,\ldots,t^n) = \sum_{i=1}^{n} t^i \underline{x}_{u_i}(u_1,\ldots,u_n)$$

$$\forall (u_1,\ldots,u_n) \in D \quad \text{og} \quad \forall (t^1,\ldots,t^n) \in E^n.$$

Anvendes den differentiable funktor Λ_r^* på dette diagram, får vi diagrammet

$$\begin{tikzcd} \underline{x}(D) \times \Lambda_r^*(E^n) \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \overline{\pi}_M^{-1}(\underline{x}(D)) \arrow[ll, "\Lambda_r^*(h)"'] \arrow[dl, "\overline{\pi}_M|"] \\ & \underline{x}(D) & \end{tikzcd}$$

Da h giver en trivialisering af $\tau(M)|\underline{x}(D)$, følger det fra sætning 7.6, at $\Lambda_r^*(h)$ giver en trivialisering af $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$. Vi vil nu undersøge denne trivialisering nærmere.

Idet $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ betegner koordinaterne hørende til kortet $\underline{x}$ på M, har vi i § 7 set, at vektorerne

$$du_i(u_1,\ldots,u_n) \quad \text{for} \quad i = 1,\ldots,n$$

udgør en basis for det duale tangentrum til M i $\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) \in M$.

For ethvert talsæt $i_1,\ldots,i_r$ med $1 \leq i_1,\ldots,i_r \leq n$ kan vi så definere et tværsnit

$$du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} : \underline{x}(D) \longrightarrow \overline{\pi}_M^{-1}(\underline{x}(D))$$

i $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$ ved fastsættelsen

$$(du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r})(u_1,\ldots,u_n)$$
$$= du_{i_1}(u_1,\ldots,u_n) \wedge \ldots \wedge du_{i_r}(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Vi kan bevise, at tværsnittene $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ i $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$ er differentiable på følgende måde:

Idet $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er standard basen for E^n, har vi tidligere observeret (p. 116), at det "konstante" tværsnit i det trivielle n-dimensionale bundt over $\underline{x}(D)$ bestemt af basis-vektoren e_i ved h afbildes på tværsnittet $\underline{x}_{u_i}$ i $\tau(M)|\underline{x}(D)$. Heraf følger (overvej dette), at tværsnittet $du_{i_1}\wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ i $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$ ved $\Lambda_r^*(h)$ afbildes på tværsnittet

$$p \in \underline{x}(D) \longrightarrow (p, e^{*i_1} \wedge \ldots \wedge e^{*i_1}) \in \underline{x}(D) \times \Lambda_r^*(E^n)$$

i bundtet

$$(\underline{x}(D) \times \Lambda_r^*(E^n), \text{proj.}, \underline{x}(D)).$$

Da det sidste tværsnit trivielt er differentiabelt, og $\Lambda_r^*(h)$ er en diffeomorfi, følger det, at tværsnittet $du_{i_1}\wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ i $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$ er differentiabelt.

Lad nu $1 \leqq r \leqq n$.

Betragt de $\binom{n}{r}$ differentiable tværsnit i $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$,

$$du_{i_1}\wedge \ldots \wedge du_{i_r} \quad \text{for} \quad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n \quad .$$

Fra sætning A2.23 følger, at disse differentiable tværsnit giver en basis i fiberet for $\lambda_r^*(M)$ over ethvert punkt i $\underline{x}(D)$. Så ved vi fra sætning 6.19, at de bestemmer en trivialisering af $\lambda_r^*(M)|\underline{x}(D)$.

Som en konsekvens af dette kan vi nu direkte angive et kort $\tilde{\underline{x}}$ på $\Lambda_r^*(T(M))$ svarende til kortet $\underline{x}$ på M. Ud fra $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ definerer vi nemlig

$$\tilde{\underline{x}} : D \times E^{\binom{n}{r}} \longrightarrow \Lambda_r^*(T(M))$$

ved fastsættelsen

$$\tilde{\underline{x}}(u_1, \ldots, u_n, \{a_{i_1 \ldots i_r}\}_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n})$$
$$= \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n} a_{i_1 \ldots i_r} \, du_{i_1}\wedge \ldots \wedge du_{i_r} \quad (u_1, \ldots, u_n)$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_n) \in D$ og ethvert koordinatsæt $\{a_{i_1 \ldots i_r}\}_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n}$ i $E^{\binom{n}{r}}$.

<u>Bemærkning</u>. Når

$$\{a_{i_1 \ldots i_r}\}_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n}$$

opfattes som et punkt i $E^{\binom{n}{r}}$ sker dette ved at ordne elementerne $a_{i_1 \ldots i_r}$ lexikografisk efter deres index. Eksempelvis svarer talsættet

$$\{a_{i_1 i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4}$$

i tilfældet $n = 4$ og $r = 2$ til punktet

$$(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}) \in E^{\binom{4}{2}} = E^6 .$$

For $r > n$ degenererer alle fibrene $\bigwedge_r^*(T_pM)$ i $\lambda_r^*(M)$ til nul-vektorrummet. Total rummet $\bigwedge_r^*(T(M))$ bliver i dette tilfælde blot et eksemplar af M.

For $r > n$ har vi altså:

$$\lambda_r^*(M) = (M, 1_M, M) .$$

Til slut observerer vi, at vektorbundtet $\lambda_1^*(M)$ er det duale tangentbundt $\tau^*(M)$ for M.

<u>Opgave 1</u>. Undersøg i tilfældet $1 \leq r \leq n$ koordinatskiftet for de specielle koordinatsystemer $\tilde{x}, \tilde{y}, \ldots$ på $\bigwedge_r^*(T(M))$.

Konstruer derefter den differentiable struktur på $\bigwedge_r^*(T(M))$ direkte.

<u>Algebraen af differential former på M</u>.

<u>Definition 8.1</u>. Lad $r \geq 1$. <u>En differential form af grad r</u> på M er et differentiabelt tværsnit i bundtet af ydre r-former over M.

En differential form af grad r på M er altså en differentiabel afbildning

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge_r^*(T(M))$$

således at $\overline{\pi}_M \omega = 1_M$.

Eller verbalt: ω knytter til ethvert punkt $p \in M$ en ydre r-form på tangentrummet T_pM, og denne tilknytning hen over M sker differentiabelt.

Værdien af ω i $p \in M$ vil vi betegne med ω_p eller $\omega(p)$.

Vi vil nu først undersøge differentiabilitets kravet, der indgår i definitionen på en differential form. Dertil kræves lidt forberedelse.

Lemma 8.2. Lad ω være et tværsnit i bundtet $\lambda_r^*(M)$ for $1 \leqq r \leqq n$ og lad endvidere $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M. Så findes der entydigt bestemte reelle funktioner

$$a_{i_1 \dots i_r} : D \longrightarrow E^1 \quad \text{for} \quad 1 \leqq i_1 < \dots < i_r \leqq n$$

således, at

$$\omega(\underline{x}(u_1,\dots,u_n)) = \sum_{1 \leqq i_1 < \dots i_r \leqq n} a_{i_1 \dots i_r}(u_1,\dots,u_n) \cdot du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}(u_1,\dots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\dots,u_n) \in D$.

Bevis. Følger straks af, at tværsnittene $du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ i $\lambda_r^*(M) | \underline{x}(D)$ giver en basis i hvert fiber over $\underline{x}(D)$.

Funktionerne $a_{i_1 \dots i_r}$ kaldes koordinatfunktionerne for tværsnittet ω m.h.t. kortet $\underline{x}$ på M.

På grund af de kanoniske isomorfier mellem ydre potenser af et vektorrum og multilineære alternerende former på vektorrummet kan vi identificere et tværsnit i $\lambda_r^*(M)$ med en tilordning af præcis en r-lineær alternerende form på tangentrummet til ethvert punkt i M.

Lad os gøre ovenstående præcist. For ethvert punkt $p \in M$ har vi ifølge sætning A2.26 en kanonisk isomorfi

$$\Lambda_r^*(T_pM) \cong \mathcal{A}_r(T_pM;E^1) .$$

Via denne isomorfi vil vi i det følgende frit identificere et element $\omega_p \in \Lambda_r^*(T_pM)$ med en r-lineær alternerende form, som vi også betegner med ω_p,

$$\omega_p : T_pM \times \dots \times T_pM \longrightarrow E^1 .$$

Lad nu $U \subseteq M$ være en åben delmængde og betragt et tværsnit ω i $\lambda_r^*(M)|U$.

Til ethvert sæt af r vektorfelter $X_1,\dots,X_r$ på U (tværsnit i $\tau(M)|J$) knytter ω en afbildning

$$\omega(X_1,\dots,X_r) : U \longrightarrow E^1$$

defineret ved fastsættelsen

$$\omega(X_1,\dots,X_r)(p) = \omega_p(X_1(p),\dots,X_r(p))$$

for ethvert $p \in U$.

Da ω_p er lineær $\forall p \in U$, følger det straks, at ω bliver lineær på vektorfelter over U m.h.t. reelle funktioner på U.

For ethvert sæt af vektorfelter $X_1,\dots,X_r$, X_i' og X_i'' på U og enhver reel funktion $f : U \longrightarrow E^1$ gælder altså, at

$$\omega(\dots,X_i' + X_i'',\dots) = \omega(\dots,X_i',\dots) + \omega(\dots,X_i'',\dots)$$

$$\omega(\dots,fX_i,\dots) = f\cdot\omega(\dots,X_i,\dots)$$

(overvej dette).

Da ω_p er alternerende $\forall p \in U$, vil

$$\omega(X_1,\dots,X_r) : U \longrightarrow E^1$$

være nul-funktionen, hvis 2 vektorfelter X_i og X_j med $i \neq j$ er sammenfaldende.

Hvis $1 \leq r \leq n$ og $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M, får vi specielt, at

$$du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_r}(\underline{x}_{u_{j_1}},\dots,\underline{x}_{u_{j_r}}) : \underline{x}(D) \longrightarrow E^1$$

er den konstante funktion med værdien

$$\delta_{i_1j_1}\cdots\delta_{i_rj_r}$$

for ethvert sæt af index, hvor $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ og $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$. (Overvej dette; se bemærkningen side A2.47)

Sætning 8.3. Lad $1 \leq r \leq n$. Et tværsnit ω i $\lambda_r^*(M)$ er differentiabelt, hvis og kun hvis en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

D_1) $\omega: M \longrightarrow \Lambda_r^*(T(M))$ er differentiabel.

D_2) I enhver koordinatfremstilling af ω er koordinatfunktionerne differentiable.

D_3) Afbildningen

$$\omega(X_1,\dots,X_r) : U \longrightarrow E^1$$

er differentiabel for ethvert sæt af differentiable vektorfelter $X_1,\dots,X_r$ på en vilkårlig åben delmængde U af M.

Bevis. Overlades til læseren. Jævnfør beviset for sætning 7.11.

Opgave 2. Gennemfør beviset for sætning 8.3.

For $r > n$ findes der kun et tværsnit i

$$\lambda_r^*(M) = (M, 1_M, M),$$

nemlig 0-tværsnittet (her $1_M : M \longrightarrow M$), og dette er altid differentiabelt.

Som allerede bemærket i § 7 vil vi ved en differential form af grad 0 på M blot forstå en reel differentiabel funktion på M.

Opgave 3. Vis, at en differential form af grad 0 på M kan identificeres med et differentiabelt tværsnit i det trivielle liniebundt over M.

Vektorrummet af differential former af grad r på M vil vi betegne med $\mathcal{D}^r(M)$. Se sætning 6.17 for vektorrumsstrukturen.

Vi bemærker, at når M er en n-dimensional differentiabel mangfoldighed, er $\mathcal{D}^r(M)$ nul-vektorrummet for $r > n$.

Betragt nu hele tal $r, s \geq 0$.

For ethvert punkt $p \in M$ har vi det ydre produkt (wedge produktet eller Grassmann produktet):

$$\wedge : \Lambda_r^*(T_pM) \times \Lambda_s^*(T_pM) \longrightarrow \Lambda_{r+s}^*(T_pM) .$$

Disse produkter stykker sammen til et produkt

$$\wedge : \mathscr{D}^r(M) \times \mathscr{D}^s(M) \longrightarrow \mathscr{D}^{r+s}(M)$$

defineret ved fastsættelsen

$$(\omega \wedge \omega')(p) = \omega(p) \wedge \omega'(p)$$

$$\forall \omega \in \mathscr{D}^r(M), \ \forall \omega' \in \mathscr{D}^s(M) \quad \text{og} \quad \forall p \in M.$$

Multiplikationen af tværsnittene ω og ω' er altså sket fibervis.

For at sikre os at definitionen er i orden, må vi vise, at $\omega \wedge \omega'$ er et differentiabelt tværsnit i $\lambda_{r+s}^*(M)$.

Man kan let indse dette ved at betragte koordinatfremstillinger af ω og ω' og benytte D_2 i sætning 8.3.

Det er også muligt at afgøre differentiabilitet af $\omega \wedge \omega'$ ved kriteriet D_3 i sætning 8.3. Hvis $r,s \geqq 1$ og $X_1,\dots,X_{r+s}$ er differentiable vektorfelter på $U \subseteqq M$, gælder nemlig følgende formel

$$\omega \wedge \omega'(X_1,\dots,X_{r+s}) =$$

$$\frac{1}{r!} \cdot \frac{1}{s!} \cdot \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r)}) \cdot \omega'(X_{\sigma(r+1)},\dots,X_{\sigma(r+s)})$$

(Tages funktionsværdien i $p \in U$, reduceres ovenstående formel til formlen side A2.48 øverst).

Hvis $f \in \mathscr{D}^0(M)$ og $\omega \in \mathscr{D}^r(M)$, ser vi, at

$$(f \wedge \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p) \qquad \forall p \in M .$$

Altså blot sædvanlig skalær multiplikation for ethvert $p \in M$. Af denne årsag skriver man ofte

$$f \wedge \omega = f \cdot \omega \quad .$$

<u>Opgave 4</u>. Gennemfør beviset for, at $\omega \wedge \omega'$ er differentiabel.

Man kalder produktet

$$\wedge : \mathscr{D}^r(M) \times \mathscr{D}^s(M) \longrightarrow \mathscr{D}^{r+s}(M)$$

for <u>det ydre produkt</u>, <u>wedge produkt</u> eller <u>Grassmann produktet</u> af differential former.

Da produktet er defineret fibervist, får vi fra de tilsvarende egenskaber ved produktet i en covariant Grassmann algebra, at det ydre produkt af differential former er antikommutativt og associativt.

For $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$, $\omega' \in \mathcal{D}^s(M)$ og $\omega'' \in \mathcal{D}^t(M)$ gælder altså relationerne

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{r\cdot s}\ \omega' \wedge \omega$$

$$(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'').$$

Ved kravet om bilinearitet kan vi på sædvanlig måde overføre disse produkter for ethvert $r,s \geq 0$ til den direkte sum

$$\mathcal{D}(M) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{D}^r(M) = \mathcal{D}^0(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{D}^n(M).$$

(Bemærk, at $\mathcal{D}^r(M)$ er nul-vektorrummet for $r > n$).

Med dette produkt bliver $\mathcal{D}(M)$ en gradueret, antikommutativ associativ reel algebra. Denne algebra kaldes <u>algebraen af differential former på M</u>.

Et element $\omega \in \mathcal{D}(M)$ kaldes ofte et <u>differential polynomium</u>. Hvis $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$, har ω over $\underline{x}(D)$ formen

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i du_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} du_i \wedge du_j + \dots$$
$$+ a_{1\dots n}\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

hvor $a_0, a_i, a_{ij}, \dots, a_{1\dots n}$ er reelle differentiable funktioner på D. (+ skal forstås som direkte sum).

Til slut betragter vi igen virkningen af en differential form på vektorfelter.

Fra D_3 i sætning 8.3 følger straks, at enhver differential form $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$ $(r \geq 1)$ giver en afbildning

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$$

(r kopier af $\mathfrak{X}(M)$; Lie-algebraen af vektorfelter på M).

Denne afbildning er r-linear m.h.t. funktioner i $\mathcal{D}^0(M)$. D.v.s. for $X_1,\dots,X_r,X_i',X_i'' \in \mathfrak{X}(M)$ og $f \in \mathcal{D}^0(M)$ gælder:

$$\omega(\ldots,X_i' + X_i'',\ldots) = \omega(\ldots,X_i',\ldots) + \omega(\ldots,X_i'',\ldots)$$

$$\omega(\ldots,fX_i,\ldots) = f\cdot \omega(\ldots,X_i,\ldots) \ .$$

Endvidere gælder at

$$\omega(X_1,\ldots,X_r) = \text{nul-funktionen} \quad ,$$

hvis 2 vektorfelter X_i og X_j med $i \neq j$ er sammenfaldende.

I det følgende får vi brug for at kunne "lokalisere" en differential form.

For at kunne udføre denne proces må vi sikre existensen af såkaldte lokaliseringsfunktioner (lemma 8.5).

<u>Lemma 8.4</u>. Lad a og b være reelle tal med $0 < a < b$ og betragt E^n for $n \geq 1$.

Der findes en reel, differentiabel (som sædvanlig af klasse C^∞) afbildning

$$\varphi : E^n \longrightarrow E^1$$

således, at $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in E^n$, og så

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| \leq a \\ 0 & \text{for } \|x\| \geq b \end{cases} \quad \text{og } 0 \leq \varphi \leq 1$$

($\|\cdot\|$ er den sædvanlige norm i E^n).

<u>Bevis</u>. Betragt funktionen

$$h : E^1 \longrightarrow E^1$$

defineret ved fastsættelsen

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

Det er let at indse, at h er af klasse C^∞, og at $h(t) > 0$ for $t > 0$.

Grafen for h:

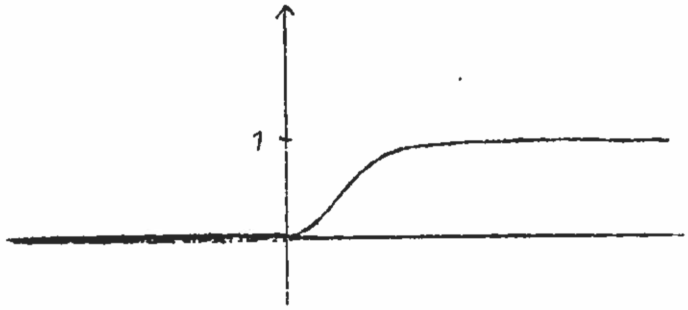


Fig. 17

Definer dernæst φ ved fastsættelsen

$$\varphi(x) = \frac{h(b^2-||x||^2)}{h(b^2-||x||^2)+h(||x||^2-a^2)} \qquad \forall x \in E^n .$$

Da $||x||^2$ er differentiabel (også i $x = 0$), er det klart, at φ bliver af klasse C^∞. Det er nu let at indse, at φ har de forlangte egenskaber.

Lemma 8.5. Lad M være en Hausdorffsk differentiabel mangfoldighed og betragt $p \in M$. Lad endvidere U være en åben omegn af p. Så findes en reel differentiabel funktion φ på M, som er konstant med værdien 1 på en omegn af p, er identisk 0 uden for U og har $1 \geq \varphi(q) \geq 0 \quad \forall q \in M$.

Bevis. Lad $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M, således at $\underline{x}(D) \subseteq U$, $0 \in D \subseteq E^n$ og $\underline{x}(0) = p$.

Vælg nu reelle tal a og b med $0 < a < b$, således at den lukkede kugle i E^n med centrum $0 \in E^n$ og radius b helt er indeholdt i D. D.v.s. således, at

$$\{x \in E^n \mid ||x|| \leq b\} \subseteq D .$$

Lad dernæst $\Theta: E^n \longrightarrow E^1$ være en funktion af typen i lemma 8.4. Definer så $\varphi : M \longrightarrow E^1$ ved fastsættelsen

$$\varphi(q) = \begin{cases} \Theta(\underline{x}^{-1}(q)) & \forall q \in \underline{x}(D) \\ 0 & \forall q \in M \setminus \underline{x}(D) \end{cases}$$

Da $\Theta(x) = 0$ for $||x|| \geq b$ er det let at indse, at φ er veldefineret og differentiabel.

Det er klart, at φ er identisk 0 uden for U. Vi ser endvidere, at φ er konstant med værdien 1 på den lukkede omegn

$$\underline{x}(\{x \in E^n \mid \|x\| \leqq a\}) .$$

Dette beviser lemma 8.5.

Opgave 5. Lad M være en Hausdorffsk differentiabel mangfoldighed. Lad endvidere K være en kompakt delmængde og U en åben delmængde af M, således at $K \subsetneqq U \subsetneqq M$.

Vis, at der findes en reel, differentiabel funktion φ på M, således at φ er konstant med værdien 1 på K, identisk 0 uden for U, og så $\varphi(p) \geqq 0 \quad \forall p \in M$.

Opgave 6. Lad

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$$

være en r-lineær afbildning m.h.t. funktioner fra $\mathcal{D}^0(M)$. Antag endvidere, at ω er alternerende.

Vis, at der findes en entydig bestemt differential form af grad r på M, som inducerer afbildningen ω.

M er en Hausdorffsk differentiabel mangfoldighed.

Ydre differentiation af differential former.

I resten af heftet er alle mangfoldigheder Hausdorffske. Vi starter med en existens og entydighedssætning

Sætning 8.6. Lad M være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed. Der findes netop en lineær afbildning

$$d : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$$

således at

1. $d(\mathcal{D}^r(M)) \subseteq \mathcal{D}^{r+1}(M)$
2. Hvis $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$ og $\omega' \in \mathcal{D}(M)$ er $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d\omega'$
3. Hvis $f \in \mathcal{D}^0(M)$ er $df \in \mathcal{D}^1(M)$ det sædvanlige differential af en differentiabel funktion.
4. Hvis $f \in \mathcal{D}^0(M)$ er $d(df) = 0$.

Notation: Den entydigt bestemte lineære afbildning d kaldes det ydre differential på M eller ydre differentiation af differential former på M (engelsk: exterior differential, exterior derivative, exterior differentiation).

I beviset for sætning 8.6 får vi brug for et lemma, som viser, at hvis d existerer, afhænger $d\omega(p)$ for $\omega \in \mathcal{D}(M)$ og $p \in M$ kun af værdien af ω i en vilkårlig omegn af $p \in M$. Præcist har vi:

Lemma 8.7. Lad $d : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ være en lineær afbildning, som opfylder 1-4 i sætning 8.6. Lad endvidere $\omega, \omega' \in \mathcal{D}(M)$ være 2 differential polynomier på M, således at $\omega|U = \omega'|U$ for en åben delmængde $U \subseteq M$. Så er $d\omega|U = d\omega'|U$.

Bevis. Da d er lineær, er det tilstrækkeligt at bevise, at $d\omega|U = 0$, hvis $\omega|U = 0$ for $\omega \in \mathcal{D}(M)$.

Antag altså, at $\omega|U = 0$ og betragt et vilkårligt punkt $p \in U$.

Ifølge lemma 8.5 kan vi finde en funktion $f \in \mathscr{D}^0(M)$, således at f er identisk 0 uden for U og $f(p) = 1$.

Da $\omega|U = 0$ er det klart, at $f\omega = 0 \in \mathscr{D}(M)$. Idet d er lineær, følger så, at $d(f\omega) = 0 \in \mathscr{D}(M)$.

Fra 2. i sætning 8.6 får vi nu:

$$0 = d(f\omega)(p) = df(p)\wedge\omega(p) + f(p)d\omega(p) .$$

og $\omega(p) = 0$

Idet $f(p) = 1$ reduceres ovenstående ligning derfor til $d\omega(p) = 0$. Da $p \in U$ var vilkårligt valgt, har vi dermed indset, at $d\omega|U = 0$. Som bemærket afslutter dette beviset for lemma 8.7.

Bevis for sætning 8.6.

Entydighed. Antag at $d : \mathscr{D}(M) \longrightarrow \mathscr{D}(M)$ er lineær og opfylder kravene 1. - 4.

Vi vil bevise entydigheden af d ved at vise, at restriktionen af $d\omega$ til et vilkårligt kort på M kan angives ved en formel, der kun afhænger af ω, for et vilkårligt $\omega \in \mathscr{D}(M)$. Da d er lineær, er det nok at vise dette for en differential form $\omega \in \mathscr{D}^r(M)$ med $r \geq 1$ (df for $f \in \mathscr{D}^0(M)$ er jo fastlagt ved 3.).

Betragt altså $\omega \in \mathscr{D}^r(M)$ med $r \geq 1$, og lad $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

For $\omega|\underline{x}(D)$ har vi koordinatfremstillingen

$$\omega|\underline{x}(D) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} a_{i_1\ldots i_r}\, du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r} ,$$

hvor $a_{i_1\ldots i_r} : D \longrightarrow E^1$ er differentiable funktioner.

Lad nu $p \in \underline{x}(D)$ være vilkårlig valgt.

Ifølge lemma 8.5 kan vi finde en funktion $f \in \mathscr{D}^0(M)$, som er identisk 0 uden for $\underline{x}(D)$ og konstant med værdien 1 på en åben omegn $U \subseteq \underline{x}(D)$ af p.

Definer så funktioner $\tilde{u}_k \in \mathscr{D}^0(M)$ for $k = 1,\ldots,n$ ved fastsættelsen

$$\tilde{u}_k(q) = \begin{cases} f(q)u_k & \text{for } q = \underline{x}(u_1,\ldots,u_n) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og funktioner $\tilde{a}_{i_1\ldots i_r} \in \mathscr{D}^0(M)$ for $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ ved fastsættelsen

$$\tilde{a}_{i_1\ldots i_r}(q) = \begin{cases} f(q)\cdot a_{i_1\ldots i_r}(u_1,\ldots,u_n) & \text{for} \quad q = \underline{x}(u_1,\ldots,u_n) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da f er konstant med værdien 1 på U, følger det, at

$$d\tilde{u}_k|U = du_k|U \qquad \text{for} \quad k = 1,\ldots,n$$

$$d\tilde{a}_{i_1\ldots i_r}|U = da_{i_1\ldots i_r}|U \quad \text{for} \quad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n.$$

Danner vi differential formen

$$\tilde{\omega} = \sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq n} \tilde{a}_{i_1\ldots i_r} d\tilde{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i_r}$$

ser vi nu, at

$$\omega|U = \tilde{\omega}|U .$$

Fra lemma 8.7 følger så, at

$$d\omega|U = d\tilde{\omega}|U .$$

Da alle differential former, der indgår i definitionen af $\tilde{\omega}$, er defineret på <u>hele</u> M, kan vi benytte egenskaberne ved d til beregning af $d\tilde{\omega}$.

Af <u>2</u>. og <u>4</u>. får vi:

$$d(d\tilde{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i_r}) = 0 \quad .$$

Benyttes lineariteten af d og <u>2</u>. får vi dernæst

$$d\tilde{\omega} = \sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq n} d\tilde{a}_{i_1\ldots i_r} \wedge d\tilde{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i_r} \quad .$$

Fra tidligere observationer følger heraf:

$$d\omega|U = \left(\sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq n} da_{i_1\ldots i_r} \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \right)|U \quad .$$

Da denne ligning specielt gælder i $p \in U \subseteqq \underline{x}(D)$, og p var vilkårlig valgt i $\underline{x}(D)$, har vi dermed bevist, at

$$d\omega|\underline{x}(D) = \sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq n} da_{i_1\ldots i_r} \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \quad .$$

Vi ser heraf, at $d\,\omega|\underline{x}(D)$ er bestemt entydigt af $\omega|\underline{x}(D)$. Dette beviser entydigheden af d.

<u>Existens</u>. I denne afdeling skal vi konstruere en lineær afbildning $d : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$, der tilfredsstiller <u>1</u>.- <u>4</u>.

Fra entydighedsbeviset ved vi, at hvis en sådan afbildning d findes, må $d\omega|\underline{x}(D)$ tilfredsstille ovenstående formel for ethvert $\omega \in \mathcal{D}(M)$ og ethvert kort $\underline{x}$ på M. Vort eneste håb er altså at vise, at disse lokale fremstillinger definerer et lokalt d, og derefter vise, at disse lokale differentialer stykker sammen til et globalt d.

Betragt derfor nu et vilkårligt kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$. Da $\underline{x}(D)$ er en åben delmængde af M, er $\underline{x}(D)$ selv en differentiabel mangfoldighed. Der findes derfor højst en kandidat til et ydre differential på $\underline{x}(D)$, nemlig afbildningen

$$d_{\underline{x}(D)} : \mathcal{D}(\underline{x}(D)) \longrightarrow \mathcal{D}(\underline{x}(D))$$

defineret ved følgende forskrift:

Hvis $\omega \in \mathcal{D}^r(\underline{x}(D))$ med $r \geq 1$ har fremstillingen:

$$\omega = \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_r\leqq n} a_{i_1\dots i_r}\, du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_r}$$

sætter vi

$$d_{\underline{x}(D)}(\omega) = \sum_{1\leqq i_1<\dots<i_r\leqq n} da_{i_1\dots i_r}\wedge du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_r}$$

hvor

$$da_{i_1\dots i_r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\dots i_r}}{\partial u_j}\, du_j \; .$$

Hvis $f \in \mathcal{D}^0(\underline{x}(D))$ skal $d_{\underline{x}(D)}f$ blot være det sædvanlige differential af f.

$d_{\underline{x}(D)}$ defineres derefter på et vilkårligt element i $\mathcal{D}(\underline{x}(D))$ ved krav om linearitet.

Antag nu et øjeblik, at vi har vist, at det således definerede $d_{\underline{x}(D)}$ givet et ydre differential på $\underline{x}(D)$ for ethvert kort $\underline{x}$ på M.

Betragt så 2 kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ og $\underline{y} : E \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M med $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$. På $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)$ kan vi nu definere 2 ydre differentialer, nemlig et svarende til kortet

$$\underline{x}\,| : \underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow M$$

og et svarende til kortet

$\underline{y}| : \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)) \longrightarrow M$.

På grund af entydigheden af et ydre differential (som vi har bevist) stemmer disse differentialer overens.

Da $d\omega(p)$ $\forall \omega \in \mathcal{D}(M)$ og $\forall p \in M$ kun afhænger af værdien af ω i en vilkårlig omegn af p (lemma 8.7), kan vi definere $d : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ ved fastsættelsen

$$d\omega|\underline{x}(D) = d_{\underline{x}(D)}(\omega|\underline{x}(D))$$

for ethvert $\omega \in \mathcal{D}(M)$ og ethvert kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M.

Det er let at verificere, at d er veldefineret (gør det). Det er endvidere klart, at d er lineær og tilfredsstiller $\underline{1}.$ - $\underline{4}.$

For at have påvist existensen af et ydre differential på M skal vi nu blot vise, at $d_{\underline{x}(D)}$ er et ydre differential på $\underline{x}(D)$ for et vilkårligt kort $\underline{x} : D \subsetneq E^n \longrightarrow M$ på M.

Da $d_{\underline{x}(D)} : \mathcal{D}(\underline{x}(D)) \longrightarrow \mathcal{D}(\underline{x}(D))$ er lineær pr. definition, mangler vi blot at vise $\underline{1}.$ - $\underline{4}.$

$\underline{1}.$ Følger direkte fra definitionen af $d_{\underline{x}(D)}$.

$\underline{2}.$ På grund af lineariteten af $d_{\underline{x}(D)}$ er det tilstrækkeligt at betragte tilfældet

$$\omega = a\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \in \mathcal{D}^r(\underline{x}(D))$$

og

$$\omega' = b\, du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s} \in \mathcal{D}^s(\underline{x}(D)) .$$

Der følger nu en håndfast udregning:

$$d_{\underline{x}(D)}(\omega \wedge \omega')$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_k} (a \cdot b) du_k \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial u_k} du_k \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}\right) \wedge (b\, du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s})$$

$$+ (-1)^r (a\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial u_k} du_k \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s}\right)$$

$$= d_{\underline{x}(D)}\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d_{\underline{x}(D)}\omega' .$$

Fortegnet $(-1)^r$ kommer ind, fordi vi har flyttet du_k forbi de r elementer $du_{i_1},\dots,du_{i_r}$ og wedge produktet er anti-kommutativt.

3. Dette indgår i definitionen af $d_{\underline{x}(D)}$.

4. Betragt $f \in \mathcal{D}^0(\underline{x}(D))$.

Da $d_{\underline{x}(D)}f$ blot er det sædvanlige differential af f, ved vi, at

$$d_{\underline{x}(D)}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}\, du_i \ .$$

Så får vi:

$$d_{\underline{x}(D)}(d_{\underline{x}(D)}f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}\, du_j \wedge du_i \ .$$

Da wedge produktet er anti-kommutativt følger heraf:

$$d_{\underline{x}(D)}(d_{\underline{x}(D)}f) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}\right) du_i \wedge du_j \ .$$

Idet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} \qquad \forall i,j = 1,\dots,n$$

får vi så:

$$d_{\underline{x}(D)}(d_{\underline{x}(D)}f) = 0.$$

Dette afslutter som tidligere bemærket beviset for sætning 8.6.

Følgende lemma viser, at vi kan beregne den lokale virkning af d ved at bruge et lokalt ydre differential.

<u>Lemma 8.8</u>. Lad U være en åben delmængde af den differentiable mangfoldighed M med differentiabel struktur induceret fra M. Lad endvidere d og d_U betegne de ydre differentialer på henholdsvis M og U. Så gælder, at

$$d\,\omega|U = d_U(\omega|U) \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}(M) \ .$$

<u>Bemærkning</u>. Som regel skriver man ikke d_U for det ydre differential på U, men blot d. Lemma 8.8 retfærdiggør dette.

Bevis for lemma 8.8. Hvis $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M og $U = \underline{x}(D)$, ser vi, at ligningen

$$d\omega|\underline{x}(D) = d_{\underline{x}(D)}(\omega|\underline{x}(D))$$

for $\omega \in \mathscr{D}(M)$ blev brugt til definition af $d\omega$ i beviset for sætning 8.6. I dette tilfælde er der altså intet at bevise.

Hvis $U \subseteq M$ er en vilkårlig åben delmængde, betragter vi kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M med $\underline{x}(D) \subseteq U$. Så får vi:

$$\begin{aligned} d\omega|\underline{x}(D) &= d_{\underline{x}(D)}(\omega|\underline{x}(D)) \\ &= d_{\underline{x}(D)}((\omega|U)|\underline{x}(D)) \\ &= d_U(\omega|U)|\underline{x}(D). \end{aligned}$$

Dette beviser lemma 8.8.

Lemma 8.9. Lad d være det ydre differential på den differentiable mangfoldighed M. Så gælder, at

$$d(d\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathscr{D}(M).$$

Bevis. På grund af lemma 8.8 er det tilstrækkeligt at betragte ω i et kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M, og da d er lineær, er det endvidere tilstrækkeligt at betragte tilfældet

$$\omega|\underline{x}(D) = a\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \qquad \text{for} \quad r \geq 1 .$$

Udnyttes 2. og 4. i sætning 8.6 får man ved induktion over r, at

$$d(du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}) = 0.$$

Ved hjælp af 2. får man nu:

$$d(\omega|\underline{x}(D)) = da \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$$

og

$$d(d(\omega|\underline{x}(D))) = d(da) \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} .$$

Idet $d(da) = 0$ på grund af 4., følger heraf:

$$d(d(\omega|\underline{x}(D))) = 0.$$

Dette beviser lemma 8.9.

Hvis $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$ kan man helt generelt opstille en formel for virkningen af $d\omega$ på $r + 1$ differentiable vektorfelter. Vi vil her kun beskæftige os med tilfældet $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$.

Lemma 8.1o. Hvis $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$ og $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gælder det, at

$$d\omega\,(X,Y) = X\,[\omega(Y)] - Y\,[\omega(X)] - \omega([X,Y])\ .$$

Bevis. Da vi kan regne lokalt, er det tilstrækkeligt at betragte tilfældet

$$\omega = f\ dg \quad \text{for} \quad f,g \in \mathcal{D}^o(M)\ .$$

Af 2. og 4. i sætning 8.6 følger:

$$d\omega = df \wedge dg.$$

Benyttes formlen side 135, der giver virkningen af et wedge produkt på vektorfelter, får vi:

$$\begin{aligned} d\omega\,(X,Y) &= df \wedge dg(X,Y) \\ &= df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) \\ &= X[f]\cdot Y[g] - Y[f]\cdot X[g]\ . \end{aligned}$$

Vi beregner nu elementerne i den søgte lignings højre side:

$$\begin{aligned} X\,[\omega(Y)] &= X\,[f\ dg(Y)] = X\,[fY[g]] \\ &= X[f]\ Y[g] + fX[Y[g]] \\ Y\,[\omega(X)] &= Y\,[f\ dg(X)] = Y\,[fX[g]] \\ &= Y[f]\ X[g] + fY[X[g]] \\ \omega([X,Y]) &= f\ dg([X,Y]) = f\,[X,Y]\,[g] \\ &= f\cdot X\,[Y[g]] - fY[X[g]]. \end{aligned}$$

Formlen bevises nu ved en simpel sammenligning af ligningens 2 sider.

Transport af differential former ved differentiable afbildninger.

Lad $F : M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning. Som vi nu skal se, inducerer F en algebra-homomorfi

$$F^* : \mathcal{D}(N) \longrightarrow \mathcal{D}(M),$$

som kommuterer med de ydre differentialer på henholdsvis M og N, d.v.s. således at

$$F^* d_N = d_M F^*$$

(som regel bruges betegnelsen d for både d_N og d_M).

Først definitionen af F^*.

Lad ω være et tværsnit i $\lambda_r^*(N)$ for $r \geqq 1$. Som tidligere observeret kan ω_q identificeres med en r-lineær alternerende form på T_qN $\forall q \in N$.

For $p \in M$ definerer vi så

$$F^{*r}(\omega)_p : T_pM \times \dots \times T_pM \longrightarrow E^1 \qquad (r \text{ kopier af } T_pM)$$

ved fastsættelsen:

$$F^{*r}(\omega)_p(X_p^1, \dots, X_p^r) = \omega_{F(p)}(F_{*p}(X_p^1), \dots, F_{*p}(X_p^r))$$

for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1, \dots, X_p^r \in T_pM$.

Da F_{*p} er lineær, er det let at indse, at $F^{*r}(\omega)_p$ bliver en r-lineær alternerende form på T_pM, altså et element i $\Lambda_r^*(T_pM)$.

Vi får herved defineret et tværsnit $F^{*r}(\omega)$ i $\lambda_r^*(M)$.

Lemma 8.11. Hvis ω er et differentiabelt tværsnit i $\lambda_r^*(N)$, er $F^{*r}(\omega)$ et differentiabelt tværsnit i $\lambda_r^*(M)$, d.v.s. hvis $\omega \in \mathcal{D}^r(N)$, vil $F^{*r}(\omega) \in \mathcal{D}^r(M)$.

Bevis. Hvis $r > \min(n,k)$, bliver $F^*(\omega)$ automatisk nul-tværsnittet, og der er intet at bevise.

Antag derfor, at $r \leqq \min(n,k)$.

Lad så $\underline{x} : D \subseteqq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M med koordinater $(u_1, \dots, u_n) \in D$, og $\underline{y} : E \subseteqq E^k \longrightarrow N$ et kort på N med koordinater $(v_1, \dots, v_k) \in E$. Vi kan uden indskrænkning i det følgende antage, at $\underline{x}(D) \subseteqq F^{-1}(\underline{y}(E))$. Lad endvidere

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_1(u_1,\dots,u_n)\\
&\ \vdots\\
v_k &= v_k(u_1,\dots,u_n)
\end{aligned}
$$

være koordinatbeskrivelsen af F m.h.t. kortene $\underline{x}$ og $\underline{y}$

Hvis

$$\omega\,|\,\underline{y}(E) = \sum_{1\leq j_1<\dots<j_r\leq k} \bar{a}_{j_1\dots j_r}\, dv_{j_1}\wedge\dots\wedge dv_{j_r}$$

og

$$F^{*r}(\omega)\,|\,\underline{x}(D) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n} a_{i_1\dots i_r}\, du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_r}$$

får vi nu:

$$
\begin{aligned}
a_{i_1\dots i_r} &= F^{*r}(\omega)(\underline{x}_{u_{i_1}},\dots,\underline{x}_{u_{i_r}})\\
&= \omega\,(F_*(\underline{x}_{u_{i_1}}),\dots,F_*(\underline{x}_{u_{i_r}}))\\
&= \omega\,\Big(\sum_{j_1=1}^{k}\frac{\partial v_{j_1}}{\partial u_{i_1}}\,\underline{y}_{v_{j_1}},\dots,\sum_{j_r=1}^{k}\frac{\partial v_{j_r}}{\partial u_{i_r}}\,\underline{y}_{v_{j_r}}\Big) \in C^\infty \text{ ifølge } D_3 \text{ p. 134.}
\end{aligned}
$$

Ved anvendelse af D_2 i sætning 8.3 følger det straks fra disse udtryk, at $F^{*r}(\omega)$ er differentiabel, idet ω og F er differentiable.

Dette beviser lemma 8.11.

Konklusionen af ovenstående overvejelser er, at vi har fået defineret en afbildning

$$F^{*r}:\mathcal{D}^r(N)\longrightarrow\mathcal{D}^r(M)$$

for ethvert $r\geq 1$.

For $r=0$ definerer vi nu

$$F^{*o} : \mathscr{D}^o(N) \longrightarrow \mathscr{D}^o(M)$$

ved fastsættelsen

$$F^{*o}(f) = fF \qquad \forall f \in \mathscr{D}^o(N).$$

Med disse definitioner indser man let, at F^{*r} er lineær for ethvert $r \geq 0$.

Den søgte lineære afbildning

$$F^* : \mathscr{D}(N) \to \mathscr{D}(M)$$

defineres nu som den direkte sum af de lineære afbildninger F^{*r}.

Da F^*, som følge af definitionen, således afbilder elementer af grad r (elementer i $\mathscr{D}^r(N)$) på elementer af grad r (elementer i $\mathscr{D}^r(M)$), omtaler man ofte F^* som en graduerede afbildning.

Bemærkning. I det følgende vil vi som regel blot benytte betegnelsen F^* for enhver af de lineære afbildninger $F^{*r} = F^*|\mathscr{D}^r(N)$.

Sætning 8.12. Lad $F : M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning. Så er

$$F^* : \mathscr{D}(N) \longrightarrow \mathscr{D}(M)$$

en algebra-homomorfi, d.v.s.

1) $F^*(a\omega + b\omega') = aF^*(\omega) + bF^*(\omega')$
2) $F^*(\omega \wedge \omega') = F^*(\omega) \wedge F^*(\omega')$

for ethvert sæt af elementer $\omega, \omega' \in \mathscr{D}(N)$.

Bevis. 1) er afklaret. Da F^* således er lineær, behøver vi i beviset for 2) kun at betragte tilfældet $\omega \in \mathscr{D}^r(N)$ og $\omega' \in \mathscr{D}^s(N)$. 2) følger nu umiddelbart ved anvendelse af formlen side 135, der giver virkningen af et wedge produkt på en stribe af vektorfelter (Gennemfør argumentet).

Sætning 8.13. Lad $F : M^n \longrightarrow N^k$ være en differentiabel afbildning, og lad d_M og d_N betegne de ydre differentialer på henholdsvis M og N. Så gælder, at

$$F^* d_N = d_M F^*$$

<u>kort</u>: F^* kommuterer med de ydre differentialer.

<u>Bevis</u>. Vi skal specielt bevise, at

$$F^* d_N(f) = d_M F^*(f)$$

for $f \in \mathcal{D}^o(N)$.

Denne formel er ækvivalent med formlen

$$F^*(df) = d(fF).$$

Hvis $X_p \in T_pM$ er en vilkårlig tangentvektor til M, viser følgende udregning, at den sidste formel, og dermed også at den første formel, er sand:

$$\begin{aligned} F^*(df)_p(X_p) &= df_{F(p)}(F_{*p}(X_p)) \\ &= F_{*p}(X_p)\,[f] \\ &= X_p\,[fF] \\ &= d(fF)_p(X_p). \end{aligned}$$

Generelt er det tilstrækkeligt at bevise, at

$$F^* d_N(\omega) = d_M F^*(\omega)$$

for $\omega \in \mathcal{D}^r(N)$, fordi F^*, d_M og d_N er lineære.

Da vi kan regne lokalt, er det endvidere tilstrækkeligt at betragte ω på formen

$$\omega = f\, df_1 \wedge \ \dots \wedge df_r$$

for $f, f_1, \dots, f_r \in \mathcal{D}^o(N)$.

Hvis man benytter, at F^* er en algebra-homomorfi, får man:

$$\begin{aligned} F^* d_N(\omega) &= F^* d_N(f\, df_1 \wedge \ \dots \wedge df_r) \\ &= F^*(df \wedge df_1 \wedge \ \dots \wedge df_r) \\ &= F^*(df) \wedge F^*(df_1) \wedge \dots \wedge F^*(df_r). \end{aligned}$$

Fra det allerede beviste følger så:

$$\begin{aligned} F^* d_N(\omega) &= d(fF) \wedge d(f_1F) \wedge \dots \wedge d(f_rF) \\ &= d_M((fF)d(f_1F) \wedge \dots \wedge d(f_rF)) \\ &= d_M(F^*(f)F^*(df_1) \wedge \dots \wedge F^*(df_r)) \end{aligned}$$

$$= d_M(F^*(f\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_r))$$
$$= d_M F^*(\omega).$$

Dermed er sætning 8.13 bevist.

Til sidst beskæftiger vi os med de funktorielle egenskaber ved konstruktionen af differential former og inducerede afbildninger.

Beviset for følgende sætning overlades til læseren.

Sætning 8.14. Hvis $F : M^n \longrightarrow N^k$ og $G : N^k \longrightarrow L^m$ er differentiable afbildninger, gælder:

1 $(GF)^* = F^* G^*$

2 $(1_M)^* = 1_{\mathcal{D}(M)}$

subsidiært for alle $r \geq 0$:

1 $(GF)^{*r} = F^{*r} G^{*r}$

2 $(1_M)^{*r} = 1_{\mathcal{D}^r(M)}$.

Bemærkning (for kategori-fans).

Bruger man betegnelsen $\mathcal{D}(F)$ for den inducerede afbildning F^* af en differentiabel afbildning F, får man følgende smukke formulering af indholdet i § 8:

Vi har konstrueret en contravariant funktor $\mathcal{D}$ fra kategorien af differentiable mangfoldigheder til kategorien af differentielt graduerede reelle algebraer.

En differentielt gradueret algebra er en gradueret algebra A med en lineær afbildning $d : A \longrightarrow A$, således at $d^2 = 0$, og således at d har egenskaber svarende til 1 og 2 i sætning 8.6.

OPGAVER

I opgaverne 7,8,9 og 1o betragtes E^n med de sædvanlige koordinater $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ hørende til kortet $x = 1_{E^n}$

Opgave 7. Betragt følgende differential form på E^n:

$$\omega = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, du_i \wedge du_j ,$$

hvor $a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$

Vis, at

$$d\omega = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_j}\right) du_i \wedge du_j \wedge du_k .$$

Opgave 8. Lad $F : E^n \longrightarrow E^n$ være en affin afbildning, som har formen $F = T \circ A$, hvor A er en lineær afbildning med matrix $\{a^i_j\}$, og T er en translation med forskydningsvektor $(b^1,\dots,b^n)$. Hvis

$$F(u_1,\dots,u_n) = (v_1,\dots,v_n)$$

gælder altså:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j u_j + b^i \qquad \forall i = 1,\dots,n.$$

Find $F^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_n)$.

Opgave 9. Definer $F : E^2 \longrightarrow E^2$ ved fastsættelsen:

$$F(u_1,u_2) = (u_1 \cdot u_2, 1).$$

Beregn $F^*(du_1)$, $F^*(du_2)$ og $F^*(u_2 \cdot du_1)$.

Opgave 1o. Definer $F : E^2 \longrightarrow E^3$ ved fastsættelsen:

$$F(u_1,u_2) = (\sin u_1 \cdot \cos u_2, \sin u_1 \cdot \sin u_2, \cos u_1).$$

Find $F^*(u_2 du_1 + u_3\, du_2 + u_1\, du_3)$.

Opgave 11. (Se opgave 7 § 4 og sætning 6.23).

Lad G være en Lie-gruppe af dimension n, og lad $X_1,\dots,X_n$ være n lineært uafhængige venstre invariante vektorfelter på G (basis i Lie-algebraen $\mathfrak{g}$ for G).

Der findes konstanter c^k_{ij} (hvorfor ?), således at

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c^k_{ij} X_k .$$

Konstanterne c^k_{ij} kaldes <u>struktur konstanterne</u> for G m.h.t. basisfelterne $X_1,\dots,X_r$ på G.

Definer duale differential former $\omega_1,\dots,\omega_r$ af grad 1 på G ved fastsættelsen:

$\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (konstant funktion).

1) Vis, at ω_i er venstre invariant, d.v.s.

$$L_a^*(\omega_i) = \omega_i \quad \forall a \in G.$$

2) Vis, at

$$d\omega_i = -\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^i \,\omega_j \wedge \omega_k = \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} c_{jk}^i \,\omega_k \wedge \omega_j .$$

Denne ligning kaldes

<u>Maurer - Cartan's ligning</u>.

§9. Riemann'sk metrik.

Anvendes den differentiable funktor T_2^* (sætning A2.12) på tangentbundtet $\tau(M) = (T(M), \pi_M, M)$ for en differentiabel mangfoldighed M, får vi ifølge Milnor's princip et nyt differentiabelt vektorbundt

$$\tau_2^*(M) = (T_2^*(T(M)), \overline{\pi}_M, M),$$

hvor

$$T_2^*(T(M)) = \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes T_p^*M.$$

$\tau_2^*(M)$ kaldes for <u>bundtet af covariante tensorer af grad 2 på M</u> eller <u>bundtet af tensorer af type (0,2) på M</u>.

Hvis $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ er et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$, får vi et tværsnit $du_i \otimes du_j$ i $\tau_2^*(M)|\underline{x}(D)$ for ethvert par af index $i,j = 1,\ldots,n$. Tværsnittet $du_i \otimes du_j$ defineres ved fastsættelsen:

$$du_i \otimes du_j(u_1,\ldots,u_n) = du_i(u_1,\ldots,u_n) \otimes du_j(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Anvendes den contravariante funktor T_2^* på den sædvanlige trivialisering af $\tau(M)|\underline{x}(D)$ (se f.eks. p. 128) får vi diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
\underline{x}(D) \times T_2^*(E^n) \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \overline{\pi}_M^{-1}(\underline{x}(D)) \arrow[ll, "T_2^*(h)"'] \arrow[dl, "\overline{\pi}_M|"] \\
& \underline{x}(D) &
\end{tikzcd}$$

Hvis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ som sædvanlig er standard basis for E^n, indser man analogt med tidligere (p. 129 - 130), at $T_2^*(h)$ afbilder tværsnittet $du_i \otimes du_j$ i $\tau_2^*(M)|\underline{x}(D)$ på det "konstante" tværsnit

$$p \in \underline{x}(D) \longrightarrow (p, e^{*i} \otimes e^{*j}) \in \underline{x}(D) \times T_2^*(E^n)$$

i bundtet

$$(\underline{x}(D) \times T_2^*(E^n), \text{proj.}, \underline{x}(D)).$$

Da det sidste tværsnit trivielt er differentiabelt, og $T_2^*(h)$ giver en trivialisering af $\mathcal{T}_2^*(M)|\underline{x}(D)$ (sætning 7.6), følger det, at $du_i \otimes du_j$ er et differentiabelt tværsnit i $\mathcal{T}_2^*(M)|\underline{x}(D)$.

Idet tværsnittene $du_1,\ldots,du_n$ i $\mathcal{T}^*(M)|\underline{x}(D)$ udpeger en basis i T_p^*M $\forall p \in M$, følger det fra sætning A2.7, at de n^2 tværsnit $du_i \otimes du_j$ i $\mathcal{T}_2^*(M)|\underline{x}(D)$ udpeger en basis i fiberet over ethvert punkt $p \in \underline{x}(D)$.

Fra sætning 6.19 følger nu, at de differentiable tværsnit

$$du_i \otimes du_j \quad \text{for} \quad i,j = 1,\ldots,n$$

giver en trivialisering af $\mathcal{T}_2^*(M)|\underline{x}(D)$.

Svarende til kortet $\underline{x}$ på M får vi så et kort $\underline{\tilde{x}}$ på $T_2^*(T(M))$, nemlig

$$\underline{\tilde{x}} : D \times E^{n^2} \longrightarrow T_2^*(T(M))$$

defineret ved fastsættelsen

$$\underline{\tilde{x}}(u_1,\ldots,u_n, \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n})$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j(u_1,\ldots,u_n)$$
$$\forall (u_1,\ldots,u_n) \in D \quad \text{og} \quad \forall \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in E^{n^2} .$$

Bemærkning. Når $\{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ opfattes som et punkt i E^{n^2}, sker dette ved at ordne elementer g_{ij} leksikografisk.

Definition 9.1. Et tværsnit g i bundtet $\mathcal{T}_2^*(M)$ over en differentiabel mangfoldighed M kaldes for et covariant tensorfelt af grad 2 på M eller et tensorfelt af type (0,2) på M.

Lemma 9.2. Lad g være et covariant tensorfelt af grad 2 på den differentiable mangfoldighed M, og lad $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D$. Så findes der entydigt bestemte reelle funktioner

$$g_{ij} : D \longrightarrow E^1 \quad \text{for} \quad i,j = 1,\ldots,n$$

således at

$$g(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n))$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u_1,\ldots,u_n)\, du_i \otimes du_j(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$.

Bevis. Tværsnittene $du_i \otimes du_j$ i $\mathcal{T}_2^*(M)|\underline{x}(D)$ giver en basis i hvert fiber over $\underline{x}(D)$.

Funktionerne g_{ij} kaldes koordinatfunktionerne for g eller komponenterne for g m.h.t. kortet $\underline{x}$ på M.

Ifølge sætning A2.14 har vi for ethvert $p \in M$ en kanonisk isomorfi

$$T_p^*M \otimes T_p^*M \cong \mathcal{L}(T_pM,T_pM;E^1),$$

hvor $\mathcal{L}(T_pM,T_pM;E^1)$ er vektorrummet af bilineære former på T_pM.

I det følgende vil vi derfor frit identificere et element $g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ med en bilineær form:

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow E^1.$$

Dette betyder, at vi kan identificere ethvert covariant tensorfelt af grad 2 på M med en tilordning af en bilineær form på tangentrummet til ethvert punkt $p \in M$.

Hvis X og Y er vektorfelter på M, og g er et covariant tensorfelt af grad 2 på M, kan vi nu definere en afbildning

$$g(X,Y) : M \longrightarrow E^1$$

ved fastsættelsen

$$g(X,Y)(p) = g_p(X_p,Y_p) \quad \forall p \in M.$$

Da g_p er bilineær $\forall p \in M$, bliver denne virkning af g på vektorfelter bilineær m.h.t. reelle funktioner på M, d.v.s.:

$$g(X+Y,Z) = g(X,Z) + g(Y,Z)$$

$$g(X,Y+Z) = g(X,Y) + g(X,Z)$$

$$g(fX,Y) = f\cdot g(X,Y)$$

$$g(X,fY) = f\cdot g(X,Y)$$

for ethvert sæt af vektorfelter X,Y og Z på M og enhver reel funktion $f : M \longrightarrow E^1$.

I omstående kunne vi naturligvis i stedet for M have betragtet en åben delmængde $U \subseteq M$. Betragter vi specielt situationen i et kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$, gælder det, at

$$du_i \otimes du_j(\underline{x}_{u_k},\underline{x}_{u_l}) = \langle \underline{x}_{u_k}, du_i\rangle \cdot \langle \underline{x}_{u_l}, du_j\rangle$$

er den konstante funktion med værdien

$$\delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

for ethvert sæt af index $i,j,k,l = 1,\dots,n$ (se side A2.22).

Hvis g i koordinatsystemet $\underline{x}$ har fremstillingen

$$g|\underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j$$

følger så, at

$$g_{ij} = g(\underline{x}_{u_i},\underline{x}_{u_j}) \qquad \forall i,j = 1,\dots,n$$

Dette betyder, at matricen $\{g_{ij}(u_1,\dots,u_n)\}$ beskriver den bilineære form g i basen $\underline{x}_{u_1}(u_1,\dots,u_n),\dots,$ $\underline{x}_{u_n}(u_1,\dots,u_n)$ over ethvert punkt i $\underline{x}(D)$. Hvis

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i\, \underline{x}_{u_i} \quad \text{og} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b^j\, \underline{x}_{u_j}$$

er vektorfelter på $\underline{x}(D)$, gælder altså:

$$g(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, a^i b^j$$

som funktioner på $\underline{x}(D)$.

Lad os nu undersøge, hvordan komponenterne for et covariant tensorfelt g af grad 2 på M transformerer ved skift af koordinater. Lad dertil $\underline{x}$ og $\underline{y}$ være kort på M med koordinater henholdsvis $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og $(v_1,\dots,v_n) \in E$ og således, at $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$. Antag endvidere, at g har komponenterne g_{ij} m.h.t. kortet $\underline{x}$ og $\bar{g}_{ij}$ m.h.t. kortet $\underline{y}$.

På $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)$ gælder udregningen:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ij} &= g(\underline{y}_{v_i},\underline{y}_{v_j}) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} g(\underline{x}_{u_k},\underline{x}_{u_l})\, \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial v_j}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial v_j} .$$

Vi har dermed udledt transformationsreglen:

$$\bar{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial v_j}$$

eller præcist:

$$\bar{g}_{ij}(v_1,\ldots,v_n)$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(\underline{x}^{-1}\underline{y}(v_1,\ldots,v_n)) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial v_i}(v_1,\ldots,v_n) \cdot \frac{\partial u_l}{\partial v_j}(v_1,\ldots,v_n)$$

for ethvert $(v_1,\ldots,v_n) \in \underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$.

Bemærkning. Denne transformationsregel knytter forbindelsen til den klassiske tensoranalyse. Her definerer man et covariant tensorfelt af grad 2 på M ved følgende krav:

1) Til ethvert kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M er knyttet n^2 reelle funktioner defineret på $\underline{x}(D)$. Disse funktioner, g_{ij} for $i,j = 1,\ldots,n$, kaldes tensorfeltets komponenter m.h.t. kortet $\underline{x}$.

2) I overlappet mellem 2 kort på M gælder ovenstående transformationsregel for komponenterne m.h.t. de 2 kort.

Har man givet et system, der opfylder 1) og 2), får man et covariant tensorfelt g af grad 2 på M i vores forstand ved definitionen

$$g|\underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j .$$

Transformationsreglen sikrer netop, at g bliver veldefineret.

Differentiabilitet af et covariant tensorfelt af grad 2 på M kan afgøres ved følgende sætning.

Sætning 9.3. Lad M være en differentiabel mangfoldighed. Et tværsnit g i $\mathcal{T}_2^*(M)$ er differentiabelt, hvis og kun hvis en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

T_1) $g : M \longrightarrow T_2^*(T(M))$ er differentiabel.

T_2) I enhver koordinatfremstilling af g er koordinatfunktionerne differentiable.

T_3) Afbildningen

$$g(X,Y) : U \longrightarrow E^1$$

er differentiabel for ethvert par af differentiable vektorfelter X og Y på en vilkårlig åben delmængde U af M.

Bevis. T_1) er netop definitionen på, at g er et differentiabelt tværsnit. For at have bevist sætningen skal vi altså blot vise ækvivalensen af de 3 udsagn.

$T_1) \Longleftrightarrow T_2)$. Lad $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og betragt det tilsvarende kort $\tilde{\underline{x}}$ på $T_2^*(T(M))$. Hvis g har koordinatfremstillingen

$$g|\underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j$$

gælder

$$\tilde{\underline{x}}^{-1}\, g\underline{x}(u_1,\dots,u_n)$$
$$= (u_1,\dots,u_n,\{g_{ij}(u_1,\dots,u_n)\}_{i,j=1,\dots,n})$$

for ethvert $(u_1,\dots,u_n) \in D$.

Heraf følger ækvivalensen af T_1) og T_2) straks.

$T_2) \Longleftrightarrow T_3)$. Det er tilstrækkeligt at betragte situationen i et kort $\underline{x}$ på M. Hvis koordinatfremstillingen af g er som ovenfor, gælder det, at

$$g(\underline{x}_{u_i},\underline{x}_{u_j}) = g_{ij}$$

som funktioner på $\underline{x}(D)$.

Da g er lineær m.h.t. reelle funktioner, følger ækvivalensen af T_2) og T_3) umiddelbart heraf.

Definition 9.4. Et covariant tensorfelt g af grad 2 på M kaldes positiv definit, hvis g_p er positiv definit $\forall p \in M$, d.v.s.

$$g_p(X_p,X_p) > 0 \quad \forall X_p \in T_pM \smallsetminus \{0\}.$$

g kaldes symmetrisk, hvis g_p er symmetrisk $\forall p \in M$, d.v.s.

$$g_p(X_p,Y_p) = g_p(Y_p,X_p) \quad \forall X_p,Y_p \in T_pM.$$

Vi bemærker, at egenskaberne positiv definit og symmetrisk ved g er ækvivalent med, at i enhver koordinatfremstilling af g er matricen $\{g_{ij}\}$ positiv definit og symmetrisk i ethvert punkt af sit definitionsområde. Dette skyldes, at matricen $\{g_{ij}\}$ beskriver g.

Definition 9.5. Et differentiabelt, positiv definit, symmetrisk covariant tensorfelt af grad 2 på en differentiabel mangfoldighed M kaldes en Riemann'sk metrik på M. En Riemann'sk metrik vil blive betegned med $(\cdot,\cdot)$.

Hvis $(\cdot,\cdot)$ er en Riemann'sk metrik på M, betegner $(\cdot,\cdot)_p$ den covariante tensor på T_pM, som $(\cdot,\cdot)$ knytter til $p \in M$. Da $(\cdot,\cdot)_p$ kan opfattes som en positiv definit, symmetrisk bilineær form på T_pM, ser vi, at $(\cdot,\cdot)_p$ er et indre produkt på tangentrummet T_pM.

En Riemann'sk metrik på en differentiabel mangfoldighed M knytter således et indre produkt på tangentrummet til ethvert punkt $p \in M$, og denne tilknytning hen over M sker differentiabelt.

Hvis $\underline{x}$ er et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$ har en Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ på M lokalt fremstillingen

$$(\cdot,\cdot)|\underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j.$$

Traditionelt bruges betegnelsen

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\; du_i \otimes du_j$$

for en sådan lokal fremstilling af $(\cdot,\cdot)$.

Dette skyldes, at ds pr. definition bliver den infinitisimale buelængde på M, og buelængde betegnes traditionelt med s. Hvis M tænkes forsynet med en bestemt Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ kalder man derfor også ofte $(\cdot,\cdot)$ for den metriske tensor eller den metriske fundamentalform på M. Vi skal senere præcisere dette.

Definition 9.6. En Riemann'sk mangfoldighed er en differentiabel mangfoldighed M udstyret med en Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$.

En Riemann'sk mangfoldighed består altså foruden en differentiabel struktur af en yderligere struktur, nemlig en Riemann'sk metrik. Med andre ord, den samme differentiable mangfoldighed med forskellige Riemann'ske metrikker er forskellige Riemann'ske mangfoldigheder.

Eksempel 9.7. Betragt E^n med de sædvanlige koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$ hørende til kortet $\underline{x} = 1_{E^n}$ på E^n. Hvis

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \underline{x}_{u_i} \quad \text{og} \quad Y_p = \sum_{i=1}^{n} b^i \underline{x}_{u_i}$$

er tangentvektorer til E^n i $p \in E^n$, sætter vi

$$(X_p,Y_p)_p = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i .$$

Ved hjælp af kriteriet $T_3)$ i sætning 9.3 er det let at indse, at de indre produkter $(\cdot,\cdot)_p$ i T_pE^n $\forall p \in E^n$ tilsammen giver en Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ på E^n. Vi ser, at $(\cdot,\cdot)$ er karakteriseret ved, at basisvektorfelterne $\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}$ er ortonormale. For komponenterne af $(\cdot,\cdot)$ m.h.t. $\underline{x}$ gælder altså:

$$g_{ij} = (\underline{x}_{u_i},\underline{x}_{u_j}) = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1,\dots,n.$$

Denne Riemann'ske metrik kaldes ofte den flade Riemann'ske metrik på E^n.

Når E^n opfattes som Riemann'sk mangfoldighed, er det med den flade metrik, hvis intet andet udtrykkeligt fremhæves.

Eksempel 9.8. Lad M^n og N^k være differentiable mangfoldigheder, og lad $F : M \longrightarrow N$ være en immersion. Antag endvidere, at $(\cdot,\cdot)_N$ er en Riemann'sk metrik på N.

For ethvert $p \in M$ kan vi nu definere en bilineær form $(\cdot,\cdot)_{M,p}$ på T_pM ved fastsættelsen:

$$(X_p,Y_p)_{M,p} = (F_*(X_p),F_*(Y_p))_{N,F(p)} \quad \forall X_p,Y_p \in T_pM.$$

Vi får herved defineret et covariant tensorfelt $(\cdot,\cdot)_M$ af grad 2 på M.

Da $(\cdot,\cdot)_N$ er symmetrisk, er det klart, at $(\cdot,\cdot)_M$ bliver symmetrisk.

Betingelsen, at F er en immersion, sikrer, at $(\cdot,\cdot)_M$ bliver positiv definit. Hvis $X_p \neq 0$, gælder nemlig, at $F_*(X_p) \neq 0$ (F_{*p} er 1-1-tydig, Definition 3.15), og derfor, at

$$(X_p,X_p)_{M,p} = (F_*(X_p),F_*(X_p))_{N,F(p)} > 0.$$

Differentiabilitet af $(\cdot,\cdot)_M$ kan vi påvise således:

Vælg kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M og $\underline{y} : E \subseteq E^k \longrightarrow N$ på N med koordinater henholdsvis $(u_1,\ldots,u_n) \in D$ og $(v_1,\ldots,v_k) \in E$. I det følgende kan vi endvidere uden indskrænkning antage, at $\underline{x}(D) \subseteq F^{-1}(\underline{y}(E))$.

Antag, at

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(u_1,\ldots,u_n) \\ &\vdots \\ v_k &= v_k(u_1,\ldots,u_n) \end{aligned}$$

er koordinatbeskrivelsen af F m.h.t. kortene $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Hvis g_{ij} betegner komponenterne for $(\cdot,\cdot)_M$ m.h.t. kortet $\underline{x}$ og $\bar{g}_{l,m}$ komponenterne for $(\cdot,\cdot)_N$ m.h.t. kortet $\underline{y}$, får vi:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (\underline{x}_{u_i},\underline{x}_{u_j})_M \\ &= (F_*(\underline{x}_{u_i}),F_*(\underline{x}_{u_j}))_N \\ &= \Big(\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial v_l}{\partial u_i}\, \underline{y}_{v_l}\, ,\, \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial v_m}{\partial u_j}\, \underline{y}_{v_m}\Big)_N \\ &= \sum_{l,m=1}^{k} \bar{g}_{lm}\, \frac{\partial v_l}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial v_m}{\partial u_j} \, . \end{aligned}$$

Idet $\bar{g}_{lm}$ er differentiabel ifølge T_2) i sætning 9.3, følger heraf, at g_{ij} er differentiabel $\forall\, i,j = 1,\ldots,n$. Igen ved brug af T_2) i sætning 9.3 slutter vi så, at $(\cdot,\cdot)_M$ er differentiabel.

Vi har dermed bevist, at $(\cdot,\cdot)_M$ bliver en Riemann'sk metrik på M. Denne metrik kaldes den af immersionen F <u>inducerede metrik</u> på M.

Eksempel 9.9. Eksemplerne 9.7 og 9.8 kan specielt anvendes i tilfældet, hvor M^n er en del-mangfoldighed af E^k.

Hvis $(\cdot,\cdot)$ er den flade Riemann'ske metrik på E^k, er den inducerede Riemann'ske metrik på M fastlagt ved:

$$(X_p,Y_p)_{M,p} = (I_{*p}(X_p),I_{*p}(Y_p)) \qquad \forall X_p,Y_p \in T_pM,$$

hvor $I : M \longrightarrow E^k$ er inklusionsafbildningen.

Det indre produkt af tangentvektorer i et punkt af M udregnes altså ved følgende regel:

Opfat tangentvektorer til M som sædvanlige vektorer i E^k og tag så det sædvanlige skalære produkt i E^k.

Specielt dækkes flader i E^3 ved dette eksempel. Hvis intet andet er fremhævet tænkes en del-mangfoldighed af et euklidisk rum altid forsynet med den inducerede Riemann'ske metrik fra det omgivende rum.

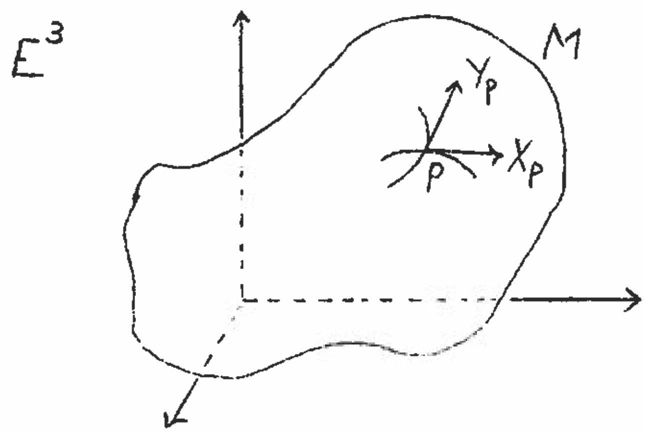


Fig. 18

Bemærkning. Det er ikke alle differentiable mangfoldigheder, der kan forsynes med en Riemann'sk metrik. Vi nævner uden bevis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse er, at mangfoldigheden som topologisk rum er et parakompakt Hausdorff rum. Denne betingelse vil være opfyldt, hvis mangfoldigheden er et Hausdorff rum, hvor topologien har en tællelig basis. I mange fremstillinger lægger man dette (svage) bånd på mangfoldighederne fra starten, og sikrer herved som nævnt, at alle de mangfoldigheder, man betragter, tillader en Riemann'sk metrik.

En Riemann'sk metrik på en differentiabel mangfoldighed M giver en kanonisk isomorfi af tangentbundtet $\tau(M)$ på det duale tangentbundt $\tau^*(M)$.

Som introduktion til dette minder vi om følgende fundamentale sætning fra teorien for vektorrum med indre produkt.

<u>Sætning</u>. Lad V være et n-dimensionalt vektorrum over legemet k med et indre produkt $(\cdot,\cdot)$. Så findes en kanonisk isomorfi

$$m : V \longrightarrow V^*$$

defineret ved fastsættelsen

$$m(v)(w) = (v,w) \qquad \forall v,w \in V.$$

<u>Bevis</u>. Det er klart, at m er lineær.

Lad nu $\{e_1,\ldots,e_n\}$ være en ortonormal basis for V. Så følger straks, at

$$m(e_i) = e^{*i} \qquad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Dette beviser, at m er en isomorfi.

<u>Sætning 9.10</u>. Lad M være en Riemann'sk mangfoldighed med Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$. Så findes en kanonisk bundt isomorfi af $\tau(M)$ på $\tau^*(M)$ beskrevet ved det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\pi_M"'] & & T^*(M) \arrow[dl, "\tau_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

hvor m er defineret ved fastsættelsen

$$m(X_p)(Y_p) = (X_p,Y_p)_p \qquad \forall p \in M, \quad \forall X_p,Y_p \in T_pM.$$

<u>Bevis</u>. Vi observerer, at afbildningen

$$m_p = m|T_pM : T_pM \longrightarrow T_p^*M$$

netop er den kanoniske isomorfi bestemt af det indre produkt $(\cdot,\cdot)_p$ på T_pM.

Da m således er en isomorfi på ethvert fiber, skal vi ifølge sætning 6.9 blot bevise, at m er en differentiabel afbildning for at have bevist sætningen.

Lad dertil $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$ og lad $\underline{\tilde{x}}$ og $\underline{\tilde{\tilde{x}}}$ være de tilsvarende kort på henholdsvis $T(M)$ og $T^*(M)$.

Hvis

$$(\cdot,\cdot)|\underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j$$

finder vi:

$$m(\underline{x}_{u_i})(\underline{x}_{u_j}) = (\underline{x}_{u_i},\underline{x}_{u_j}) = g_{ij} \,.$$

Heraf følger:

$$m(\underline{x}_{u_i}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, du_j \qquad \forall i = 1,\dots,n.$$

Så får vi:

$$\underline{\tilde{\tilde{x}}}^{-1}\; m\; \underline{\tilde{x}}\; (u_1,\dots,u_n,t^1,\dots,t^n)$$
$$= \underline{\tilde{\tilde{x}}}^{-1}\; m(\sum_{i=1}^{n} t^i\, \underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n))$$
$$= \underline{\tilde{\tilde{x}}}^{-1}\; (\sum_{i=1}^{n} t^i\, m(\underline{x}_{u_i}(u_1,\dots,u_n)))$$
$$= \underline{\tilde{\tilde{x}}}^{-1}\; (\sum_{i=1}^{n} t^i\, (\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(u_1,\dots,u_n) du_j(u_1,\dots,u_n)))$$
$$= (u_1,\dots,u_n,\sum_{i=1}^{n} t^i\cdot g_{i1}(u_1,\dots,u_n),\dots,\sum_{i=1}^{n} t^i\, g_{in}(u_1,\dots,u_n))$$
$$\forall (u_1,\dots,u_n) \in D \;\text{ og }\; \forall (t^1,\dots,t^n) \in E^n.$$

Da g_{ij} er differentiable funktioner, viser dette, at m er differentiabel.

Dermed har vi bevist sætningen.

For en Riemann'sk mangfoldighed M etablerer isomorfien i sætning 9.1o en 1-1-tydig korrespondance mellem vektorfelter på M og covariante vektorfelter (eller 1-former) på M.

Betragter vi specielt differentialet df af en differentiabel funktion $f : M \longrightarrow E^1$ svarer hertil et differentiabelt vektorfelt på M, kaldet <u>gradientfeltet for f</u> og betegnet med grad f.

Pr. definition har vi altså:

$$m \circ \operatorname{grad} f = df$$

eller på diagramform:

$$\begin{tikzcd}
T(M) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\pi_M"'] & & T^*(M) \arrow[dl, "\bar{\pi}_M"] \\
& M \arrow[ul, bend left, "\operatorname{grad} f"] \arrow[ur, bend right, "df"'] &
\end{tikzcd}$$

Vi bemærker, at $\operatorname{grad} f$ afhænger af den Riemann'ske metrik på M via m.

Hvis X er et vilkårligt differentiabelt vektorfelt på M, får vi:

$$X[f] = df(X) = (m \circ \operatorname{grad} f)(X)$$
$$= (\operatorname{grad} f, X) .$$

Formlen

$$X[f] = (\operatorname{grad} f, X)$$

generaliserer den fra analysen kendte formel for "den retnings-afledede" af en funktion.

I et koordinatsystem $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1, \dots, u_n) \in D \subseteq E^n$ har $\operatorname{grad} f$ fremstillingen:

$$\operatorname{grad} f \,|\, \underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n} a^i \, \underline{x}_{u_i} .$$

Antag endvidere, at

$$(\cdot,\cdot) \,|\, \underline{x}(D) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \, du_i \otimes du_j .$$

Vi ønsker at udtrykke koordinatfunktionerne a^i ved de partielle afledede af f og komponenterne g_{ij} i den metriske tensor.

I beviset for sætning 9.1o har vi observeret, at

$$m(\underline{x}_{u_i}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \, du_j \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Vi får derfor nu:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \, du_j = df \,|\, \underline{x}(D)$$
$$= m \circ \operatorname{grad} f \,|\, \underline{x}(D)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a^i g_{ij} \, du_j .$$

Dette giver matrixligningen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) = (a^1, \ldots, a^n) \begin{Bmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ g_{n1} \cdots g_{nn} \end{Bmatrix}$$

Da $\{g_{ij}\}$ er symmetrisk, får vi ved at transponere denne ligning:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ g_{n1} \cdots g_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{Bmatrix}$$

Idet matricen $\{g_{ij}\}$ er positiv definit, er den specielt ikke-singulær. Den har derfor en invers matrix, som vi betegner med $\{g^{ij}\}$. Elementerne g^{ij} bestemmes altså af ligningerne:

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

Vi ser nu, at den i'te koordinatfunktion for $\operatorname{grad} f$ m.h.t. kortet $\underline{x}$ er givet ved:

$$a^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

Der gælder altså:

$$\operatorname{grad} f \,|\, \underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) \underline{x}_{u_i} .$$

<u>Eksempel 9.11</u>. Betragt E^n med sædvanlige koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$. Hvis E^n forsynes med den flade Riemann'ske metrik, er $\{g_{ij}\}$ identitetsmatricen. $\{g^{ij}\}$ er derfor også identitetsmatricen. Så får vi:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \underline{x}_{u_i} .$$

<u>Bemærkning</u>. Elementerne g^{ij} kan fortolkes som komponenterne for et contravariant tensorfelt af grad 2 på M. Dette tensorfelt kaldes ofte <u>den contravariante metriske tensor</u> eller <u>den contravariante metriske fundamentalform</u> på M. Se opgave 5.

<u>Bemærkning</u>. Isomorfien i sætning 1. kan opfattes som et specielt eksempel på de operationer man i klassisk tensoranalyse kalder for "at hæve og sænke index". Skrevet som tensorbundter (opgave 5) har vi bundt isomorfien

$$\mathcal{T}^1_0(M) \cong \mathcal{T}^0_1(M).$$

I koordinater gælder, at

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, a^j \quad \text{og} \quad a^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\, a_j$$

for et vektorfelt

$$\sum_{i=1}^{n} a^i\, \underline{x}_{u_i}$$

og et contravariant vektorfelt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, du_i \ ,$$

som korresponderer under bundt isomorfien.

O P G A V E R

Opgave 1. Lad $\xi = (E, \pi, B)$ og $\eta = (E', \pi', B)$ være differentiable vektorbundter med samme basis B.

Betragt triplen

$$\xi \otimes \eta = (E \otimes E', \overline{\pi}, B),$$

hvor $E \otimes E' = \bigcup_{x \in B} E_x \otimes E'_x$

og $\overline{\pi}$ afbilder $E_x \otimes E'_x$ på $x \in B$.

Hvis $U \subseteq B$, s og s' er tværsnit i henholdsvis $\xi|U$ og $\eta|U$ defineres på oplagt måde et tværsnit $s \otimes s'$ i $\xi \otimes \eta|U$.

Vis, at man på en og kun en måde kan give $E \otimes E'$ differentiabel struktur, således at $s \otimes s'$ er et differentiabelt tværsnit i $\xi \otimes \eta|U$, hvis s og s' er differentiable tværsnit i henholdsvis $\xi|U$ og $\eta|U$.

Vis, at med denne struktur på $E \otimes E'$ bliver $\xi \otimes \eta$ et differentiabelt vektorbundt over B.

$\xi \otimes \eta$ kaldes naturligt for tensor produktet af bundterne ξ og η.

Opgave 2. Lad ξ, η og ζ være vektorbundter over B. Vis, at der findes kanoniske bundt isomorfier:

1) $\xi \otimes \eta \cong \eta \otimes \xi$

2) $(\xi \otimes \eta) \otimes \zeta \cong \xi \otimes (\eta \otimes \zeta)$.

Opgave 3. Lad ξ_1, ξ_2, η_1 og η_2 være vektorbundter over B, og lad $f : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ og $g : \eta_1 \longrightarrow \eta_2$ være bundt afbildninger med $f_B = g_B = 1_B$.

Definer

$$(f \otimes g)_E : E(\xi_1) \otimes E(\eta_1) \longrightarrow E(\xi_2) \otimes E(\eta_2)$$

ved fastsættelsen

$$(f \otimes g)_E | E_x(\xi_1) \otimes E_x(\eta_1) = (f_E)_x \otimes (g_E)_x \qquad \forall x \in B.$$

Vis, at $f \otimes g = (1_B, (f \otimes g)_E)$ giver en bundt afbildning

$$f \otimes g : \xi_1 \otimes \eta_1 \longrightarrow \xi_2 \otimes \eta_2 .$$

$f \otimes g$ kaldes for <u>tensor produktet</u> af bundt afbildningerne f og g.

Undersøg de funktorielle egenskaber ved konstruktionen af tensor produkt af bundter og bundt afbildninger.

<u>Opgave 4</u>. Lad M være en differentiabel mangfoldighed. Konstruer vektorbundter

$$\tau_*^r(M) = (T_*^r(T(M)), \overline{\pi}_M, M)$$

og

$$\tau_r^*(M) = (T_r^*(T(M)), \overline{\overline{\pi}}_M, M)$$

for alle $r \geq 1$ ved at anvende de differentiabel funktorer T_*^r og T_r^* på tangentbundtet $\tau(M)$ for M.

Lad $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D$. Vis, at tværsnittene

$$\underline{x}_{u_{i_1}} \otimes \dots \otimes \underline{x}_{u_{i_r}} \quad \text{for} \quad i_1,\dots,i_r = 1,\dots,n$$

giver en trivialisering af $\tau_*^r(M)|\underline{x}(D)$, og at tværsnittene

$$du_{i_1} \otimes \dots \otimes du_{i_r} \quad \text{for} \quad i_1,\dots,i_r = 1,\dots,n$$

giver en trivialisering af $\tau_r^*(M)|\underline{x}(D)$.

Betragt dernæst vektorbundtet

$$\tau_s^r(M) = \tau_*^r(M) \otimes \tau_s^*(M).$$

Idet fiberet over $p \in M$ i $\tau_s^r(M)$ netop er

$$T_s^r(T_pM)) = T_pM \otimes \dots \otimes T_pM \otimes T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M$$

(r kopier af T_pM og s kopier af T_p^*M), kalder man $\tau_s^r(M)$ for <u>bundtet af tensorer af contravariant grad r og covariant grad s over M</u>, eller <u>bundtet af tensorer af type (r,s) over M</u>.

Et tværsnit i $\tau_s^r(M)$ kaldes tilsvarende for et <u>tensorfelt af type (r,s)</u> på M.

Vis, at tværsnittene

$$\underline{x}_{u_{i_1}} \otimes \dots \otimes \underline{x}_{u_{i_r}} \otimes du_{j_1} \otimes \dots \otimes du_{j_s},$$

hvor alle index kan antage værdier fra 1 til n, giver en trivialisering af $\tau_s^r(M)|\underline{x}(D)$ for et kort $\underline{x}$ på M.

Et tværsnit T i $\mathcal{T}^r_s(M)$ har over $\underline{x}(D)$ koordinatfremstillingen:

$$T|\underline{x}(D) = \sum T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \underline{x}_{u_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \underline{x}_{u_{i_r}} \otimes du_{j_1} \otimes \ldots \otimes du_{j_s} .$$

Funktionerne $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ kaldes <u>komponenterne</u> for T m.h.t. kortet $\underline{x}$.

Formuler og bevis differentiabilitets kriterier for T.

Find transformationsregler for komponenterne af et tensorfelt ved skift af koordinater.

Observer til slut, at der findes en kanonisk bundt isomorfi

$$\mathcal{T}^r_s(M) \simeq \mathcal{T}(M) \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}(M) \otimes \mathcal{T}^*(M) \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}^*(M)$$

(r kopier af $\mathcal{T}(M)$ og s kopier af $\mathcal{T}^*(M)$).

<u>Opgave 5</u>. Lad M være en Riemann'sk mangfoldighed. Vis, at der for $r \geqq 1$ findes en kanonisk bundt isomorfi

$$m^r_s : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1}_{s+1}(M).$$

Hvis m er bundt isomorfien i sætning 9.1o, er m^r_s givet ved:

$$m^r_s = \underbrace{1_{\mathcal{T}(M)} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{T}(M)}}_{r-1} \otimes m \otimes \underbrace{1_{\mathcal{T}^*(M)} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathcal{T}^*(M)}}_{s} .$$

Betragt tilfældet $r = 2$ og $s = 1$,

$$m^2_1 : \mathcal{T}^2_1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1_2(M) .$$

Lad T være et tensorfelt af type $(2,1)$ og $\overline{T}$ et tensorfelt af type $(1,2)$ på M.

Antag, at

$$T|\underline{x}(D) = \sum T^{i_1 i_2}_{j} \underline{x}_{u_{i_1}} \otimes \underline{x}_{u_{i_2}} \otimes du_j$$

$$\overline{T}|\underline{x}(D) = \sum \overline{T}^{i}_{j_1 j_2} \underline{x}_{u_i} \otimes du_{j_1} \otimes du_{j_2}$$

for et kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1, \ldots, u_n) \in D \subseteq E^n$.

Vis, at

$$\overline{T}^{i}_{j_1 j_2} = \sum_{i_2=1}^{n} T^{i i_2}_{j_2} g_{i_2 j_1} \quad \text{og} \quad T^{i_1 i_2}_{j} = \sum_{j_1=1}^{n} \overline{T}^{i_1}_{j_1 j} g^{j_1 i_2} ,$$

hvis T og $\overline{T}$ korresponderer ved m^2_1.

Operationer af denne type kaldes i tensoranalysen for "at hæve og sænke index".

Betragt i tilfældet $r = 2$ og $s = 0$ bundt isomorfien:

$$m_1^1\, m_o^2 : \ \mathcal{T}_o^2(M) \longrightarrow \mathcal{T}_2^o(M).$$

Vis, at tensorfeltet af type (2,o), som ved denne bundt isomorfi afbildes på den metriske tensor, har komponenterne g^{ij} m.h.t. et kort $\underline{x}$ på M, hvis den metriske tensor har komponenterne g_{ij} m.h.t. $\underline{x}$.

Opgave 6. Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Vis, at der for $r \geq 1$ og $s \geq 1$ findes en bundt afbildning $\mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ givet ved det kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} T_s^r(T(M)) \arrow[rr, "K_j^i"] \arrow[dr, "\overline{\pi}_M"'] & & T_{s-1}^{r-1}(T(M)) \arrow[dl, "\overline{\pi}_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

hvor

$$K_j^i | T_s^r(T_pM) \ : \ T_s^r(T_pM) \longrightarrow T_{s-1}^{r-1}(T_pM)$$

er kontraktionen defineret i opgave 16 Appendix 2 for ethvert $p \in M$ ($\mathcal{T}_o^o(M)$ skal opfattes som det trivielle liniebundt over M).

Afbildningen K_j^i giver en afbildning af tensorfelter af type (r,s) på M på tensorfelter af type $(r-1,s-1)$ på M kaldet <u>kontraktion</u> af et tensorfelt m.h.t. index i og j.

Lad nu T være et tensorfelt af type (r,s) på M. Find komponenterne for $K_j^i(T)$ udtrykt ved komponenterne for T m.h.t. et kort $\underline{x}$ på M.

Opgave 7. Lad M^n være en del-mangfoldighed af en Riemann'sk mangfoldighed N^k med Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$.

Betragt $\forall\, p \in M$ følgende underrum af T_pN:

$$N_pM = \{ X_p \in T_pN \mid (I_{*p}(Y_p), X_p) = 0 \quad \forall Y_p \in T_pM \}.$$

Betragt nu triplen

$$\nu(M) = (N(M), \pi_{\nu(M)}, M),$$

hvor $N(M) = \bigcup_{p \in M} N_pM$ og $\pi_{\nu(M)}$ afbilder N_pM på $p \in M$ $\forall\, p \in M$.

Vis, at $N(M)$ kan gives en differentiabel struktur, således at $\nu(M)$ bliver et differentiabelt vektorbundt.

$\nu(M)$ kaldes normalbundtet for M i N.

Opgave 8. Lad $f : N^k \longrightarrow E^1$ være en differentiabel afbildning, og lad $a \in E^1$. Antag, at $M = f^{-1}(a) \neq \emptyset$, og at $df_p \neq 0$ $\forall\, p \in M$.

Vis, at M er en differentiabel mangfoldighed, og at normalbundtet for M i N er trivielt.

Opgave 9. Lad M^n være en Riemann'sk mangfoldighed. For ethvert $p \in M$ sættes

$$S(T_pM) = \{X_p \in T_pM \mid (X_p, X_p)_p = 1\} .$$

Lad nu

$$S(T(M)) = \bigcup_{p \in M} S(T_pM) .$$

Vis, at $S(T(M))$ kan gives struktur som en $(2n-1)$-dimensional del-mangfoldighed af $T(M)$.

(Hint: Betragt afbildningen $f : T(M) \longrightarrow E^1$ defineret ved fastsættelsen $f(X_p) = (X_p, X_p)_p$ for enhver tangentvektor X_p til M).

Triplen $(S(T(M)), \overline{\pi}_M, M)$ kaldes sfære-bundtet for M.

Bemærkning. Et sfære-bundt er ikke et vektorbundt, men tilhører den mere omfattende klasse af fiber bundter.

Hvad er sfære-bundtet for S^1 ?

Opgave 1o. Betragt det n-dimensionale reelle projektive rum RP^n.

Vis, at der findes en entydig bestemt Riemann'sk metrik på RP^n, således at projektionen

$$k_1 : S^n \longrightarrow RP^n$$

inducerer den sædvanlige Riemann'ske metrik på S^n (d.v.s. den Riemann'ske metrik induceret fra E^{n+1}).

Opgave 11. Lad Σ^2 være sfæren i E^3 med radius 1 og centrum $(0,0,1) \in E^3$.

Lad

$$P : \Sigma^2 - (0,0,2) \longrightarrow E^2$$

være stereografisk projektion fra "nordpolen".

Lad Σ^2 have den inducerede Riemann'ske metrik fra E^3. P^{-1} inducerer en Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)_{st.}$ på E^2.

Vis, at

$$(X_p, Y_p)_{st.} = \frac{1}{\left(1+\frac{u_1^2+u_2^2}{4}\right)^2} \cdot (X_p, Y_p)$$

for $X_p, Y_p \in T_pE^2$, hvor $p = (u_1, u_2) \in E^2$.

$(\cdot,\cdot)$ betegner den flade Riemann'ske metrik på E^2.

E^2 med den Riemann'ske metrik $(\cdot,\cdot)_{st.}$ kaldes for den stereografiske plan.

Opgave 12. Lad M være en Riemann'sk mangfoldighed og lad f og g være differentiable reelle funktioner på M.

Vis, at

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad}\, f + f \cdot \text{grad}\, g .$$

§ 1o. Vektoranalyse på en orienteret Riemann'sk mangfoldighed.

I denne paragraf skal vi se, hvordan den klassiske vektoranalyse kan passes ind i teorien for differential former. Herunder vil vi være så generelle, at vi kan overføre de klassiske differential operatorer gradient, divergens og Laplace operatoren til en vilkårlig orienteret Riemann'sk mangfoldighed.

Orienterbare mangfoldigheder.

Vi genkalder først visse definitioner vedrørende orientering af reelle vektorrum.

Lad V være et n-dimensionalt reelt vektorrum, og lad $\mathcal{B}$ være mængden af ordnede baser $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{f_1,\dots,f_n\}$ etc. i V. Vi ønsker at definere en relation i $\mathcal{B}$, som betegnes med $\underset{\sigma}{\sim}$ og læses "bestemmer samme orientering". Da $\Lambda_n^*(V)\ (\simeq \mathcal{A}_n(V;E^1))$ er 1-dimensional, vil 2 vilkårlige n-lineære alternerende former $x,y \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$ være proportionale. Følgende definition af $\underset{\sigma}{\sim}$ er derfor uafhængig af valget af $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$:

$$\{e_1,\dots,e_n\} \underset{\sigma}{\sim} \{f_1,\dots,f_n\}$$

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x(e_1,\dots,e_n)\cdot x(f_1,\dots,f_n) > 0$$

($x(e_1,\dots,e_n)\cdot x(f_1,\dots,f_n) > 0$ fortæller blot, at værdien af x på de 2 baser har samme fortegn).

Det er klart, at $\underset{\sigma}{\sim}$ bliver en ækvivalensrelation i $\mathcal{B}$ med netop 2 ækvivalensklasser.

Definition 1o.1. En orientering af et reelt vektorrum V er et valg af en ud af de 2 ækvivalensklasser, hvori baserne for V er delt. Baserne i den valgte ækvivalensklasse siges at være positive baser og baserne i den anden ækvivalensklasse negative baser. En n-form $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$, som antager positive værdier på de positive baser, kaldes en positiv n-form. Hvis $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$ antager negative værdier på de positive baser, kaldes x en negativ n-form.

Det er klart, at ethvert endeligt dimensionalt reelt vektorrum har præcis 2 orienteringer.

Vi bemærker endvidere, at en n-form $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$ fastlægger en orientering af V, idet baserne $\{e_1, \ldots, e_n\}$ med $x(e_1, \ldots, e_n) > 0$ vælges som de positive baser. Med denne orientering af V bliver x en positiv n-form på V.

Hvis $x, y \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$, og $y = ax$ med $a > 0$, bestemmer x og y samme orientering af V.

Lad nu M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Vi vil sige, at M er orienterbar, hvis éthvert af tangentrummene for M kan forsynes med en orientering, således at disse orienteringer i tangentrummene hen over M er kædet "differentiabelt" sammen. Vi kan gøre dette præcist ved hjælp af differential former.

Definition 1o.2. En n-dimensional differentiabel mangfoldighed M siges at være orienterbar, hvis der findes en differential form ω af grad n på M, således at $\omega_p \neq 0 \quad \forall p \in M$.

Terminologi. En differential form ω af typen i definition 1o.2 kaldes et volumen mål på M.

Hvis ω er et volumen mål på M, giver ω_p, som ovenfor bemærket, en orientering af $T_pM \quad \forall p \in M$. Differentiabiliteten af ω kæder disse orienteringer "differentiabelt" sammen.

Antag nu, at M er sammenhængende.

Hvis ω og ω' er 2 volumen mål på M findes en differentiabel funktion $f : M \to E^1$ med $f(p) \neq 0 \quad \forall p \in M$, således at $\omega' = f\omega$. Da M er sammenhængende, viser et topologisk argument, at $f(p) > 0 \quad \forall p \in M$ eller $f(p) < 0 \quad \forall p \in M$.

Vi siger, at de 2 volumen mål ω og ω' på M bestemmer samme orientering af M, hvis $f(p) > 0 \quad \forall p \in M$.

Relationen "bestemmer samme orientering" deler klart volumen målene på en sammenhængende orienterbar mangfoldighed ind i netop 2 ækvivalensklasser.

Definition 1o.3. En sammenhængende, orienterbar differentiabel mangfoldighed M siges at være orienteret, hvis der er foretaget et valg af ækvivalensklasse af volumen mål på M. Et volumen mål i den valgte ækvivalensklasse kaldes et <u>positivt volumen mål</u>, og et volumen mål i den anden ækvivalensklasse et <u>negativt volumen mål</u>.

En vilkårlig orienterbar differentiabel mangfoldighed siges at være orienteret, hvis enhver af dens sammenhængskomponenter er orienteret.

Det er klart, at enhver sammenhængende, orienterbar differentiabel mangfoldighed kan orienteres på netop 2 måder.

<u>Eksempel 1o.4</u>. Betragt E^n med sædvanlige koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$ hørende til kortet $\underline{x} = 1_{E^n}$.
Differentialformen

$$\omega = du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

er klart et volumen mål på E^n. E^n er altså orienterbar.

Når E^n orienteres sker dette ved at udpege ω som et positivt volumen mål på E^n. Dette betyder, at $\{\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}\}$ giver en positiv basis i hvert tangentrum for E^n.

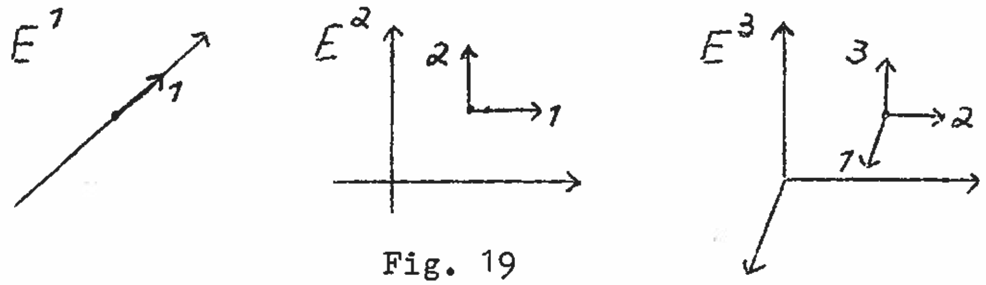


Fig. 19

Hvis $S : E^n \longrightarrow E^n$ er spejling i $0 \in E^n$, d.v.s.:

$$S(u_1,\dots,u_n) = (-u_1,\dots,-u_n)$$

observerer vi til senere brug, at

$$S^*(\omega) = (-1)^n \omega \ .$$

Når vi benytter, at S^* er en algebra homomorfi, som kommuterer med det ydre differential, følger dette ved udregningen:

$$\begin{aligned} S^*(\omega) &= S^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_n) \\ &= S^*(du_1) \wedge \dots \wedge S^*(du_n) \end{aligned}$$

$$= d(u_1S)\wedge\ldots\wedge d(u_nS)$$
$$= d(-u_1)\wedge\ldots\wedge d(-u_n)$$
$$= (-1)^n du_1\wedge\ldots\wedge du_n$$
$$= (-1)^n\,\omega$$

Eksempel 1o.4 slut.

Følgende sætning viser, at orientiabilitet bliver geometrisk anskueligt for en stor klasse af hyperflader i euklidiske rum.

Sætning 1o.5. Lad M^n være en immersed del-mangfoldighed af E^{n+1} og antag, at der findes et differentiabelt normalfelt Z på M, således at $Z_p \neq 0$ $\forall p \in M$. Så er M orienterbar.

Bevis. Lad $(u_1,\ldots,u_{n+1}) \in E^{n+1}$ være de sædvanlige koordinater på E^{n+1} hørende til kortet $\underline{x} = 1_{E^{n+1}}$.

Der findes entydigt bestemte reelle funktioner

$$z_i : M \longrightarrow E^1 \quad \text{for} \quad i = 1,\ldots,n+1,$$

således at

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n+1} z_i(p)\,\underline{x}_{u_i}(p) \qquad \forall p \in M.$$

Differentiabilitet af Z kan nu udtrykkes ved, at funktionerne z_i er differentiable (sætning 6.16).

Vi skal have defineret en differential form ω af grad n på M så $\omega_p \neq 0$ $\forall p \in M$.

Definitionen forløber således:

$$\omega_p(X_p^1,\ldots,X_p^n)$$
$$= (du_1\wedge\ldots\wedge du_{n+1})_p(I_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*p}(X_p^n),Z_p)$$

for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1,\ldots,X_p^n \in T_pM$.

Det er klart, at ω_p bliver en n-lineær alternerende form på T_pM $\forall p \in M$. Det er endvidere klart, at $\omega_p \neq 0$ $\forall p \in M$, for vælges $\{X_p^1,\ldots,X_p^n\}$ som en basis i T_pM bliver

$\{I_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*p}(X_p^n),Z_p\}$ en basis i T_pE^{n+1}.

For at have bevist, at ω definerer et volumen mål på M, skal vi nu blot indse, at ω er differentiabel.

Betragt dertil et kort $\underline{y} : E \subseteq E^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ på E^{n+1}, således at $\underline{y} \mid E \cap E^n$ er et kort på M. Hvis $(v_1,\ldots,v_{n+1}) \in E$ er koordinaterne for $\underline{y}$, svarer $M \cap \underline{y}(E)$ præcis til punkterne med koordinaten $v_{n+1} = 0$. $\underline{y} \mid E \cap E^n$ er et arvet koordinatsystem på M (sætning 3.23).

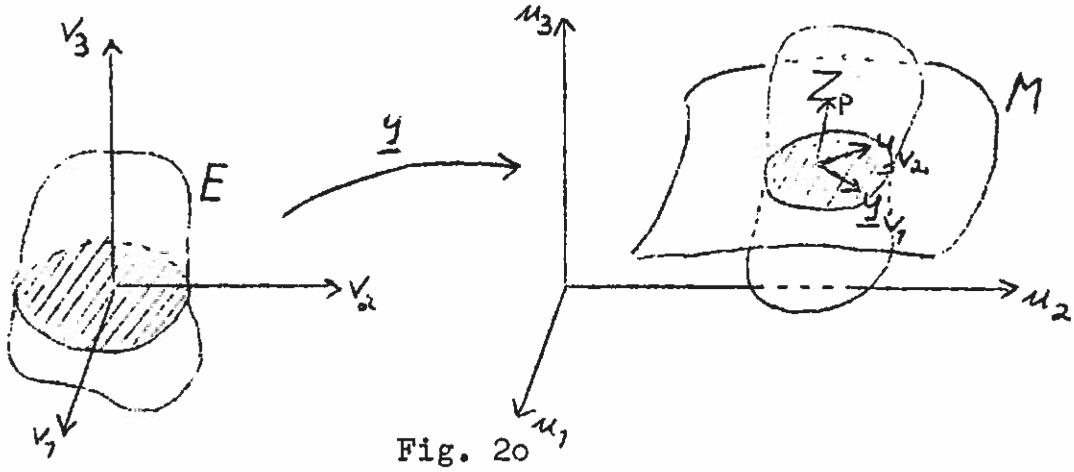


Fig. 2o

Hvis

$$\omega \mid \underline{y}(E \cap E^n) = a_{1\ldots n}\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

vil $a_{1\ldots n} = \omega(\underline{y}_{v_1},\ldots,\underline{y}_{v_n})$.

Vi finder nu:

$$\begin{aligned} a_{1\ldots n} &= \omega(\underline{y}_{v_1},\ldots,\underline{y}_{v_n}) \\ &= du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial u_i}{\partial v_1}\, \underline{x}_{u_i},\ldots,\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial u_i}{\partial v_n}\, \underline{x}_{u_i},\right. \\ &\qquad\qquad \left.\sum_{i=1}^{n+1} z_i\, \underline{x}_{u_i}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sign}\sigma \cdot \frac{\partial u_{\sigma(1)}}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial u_{\sigma(n)}}{\partial v_n} \cdot z_{\sigma(n+1)} \,. \end{aligned}$$

Dette udtryk viser, at $a_{1\ldots n}$ er en differentiabel funktion på $\underline{y}(E \cap E^n)$. Da vi kan overdække M med arvede koordinatsystemer, viser dette, at ω er differentiabel.

ω er altså et volumen mål på M, og beviset er ført.

Bemærkning. Et differentiabelt normalfelt på en hyperflade M i E^{n+1} inducerer altså en orientering af M fastlagt ved volumen målet konstrueret i ovenstående sætning. De positive baser i et tangentrum for M ved denne orientering er præcis dem, der ved supplering med normalen giver en positiv basis i det tilsvarende tangentrum for E^{n+1}.

Eksempel 1o.6. Betragt enheds-sfæren S^n i E^{n+1}.

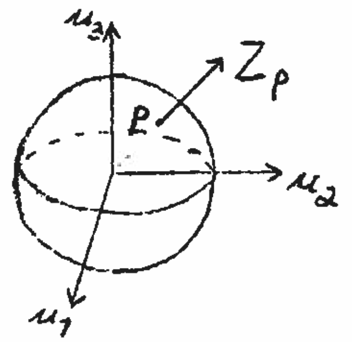


Fig. 21

Lad $\underline{x} = 1_{E^{n+1}}$ være det sædvanlige kort på E^{n+1} med koordinater $(u_1,\ldots,u_{n+1}) \in E^{n+1}$.

På S^n kan vi betragte enheds-normalfeltet Z, givet ved

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \, \underline{x}_{u_i}(p) \quad \text{for} \quad p = \underline{x}(u_1,\ldots,u_{n+1}) \in S^n.$$

Z giver en orientering af S^n fastlagt ved volumen målet Ω, hvor

$$\Omega_p(X_p^1,\ldots,X_p^n)$$
$$= (du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n+1})_p(I_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*p}(X_p^n),Z_p)$$

for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1,\ldots,X_p^n \in T_pS^n$.

Denne orientering af S^n, fastlagt ved hjælp af den udadrettede enheds-normal til S^n, er standard orienteringen af S^n.

Lad nu $A : S^n \longrightarrow S^n$ være den antipodiske afbildning. Så gælder formlen

$$A^*(\Omega) = (-1)^{n+1}\Omega .$$

Bevis. Hvis $S : E^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ er spejling i $0 \in E^{n+1}$

(eksempel 1o.4) gælder trivielt

$$SI = IA : S^n \longrightarrow E^{n+1}.$$

Vi bemærker endvidere, at

$$S_{*p}(Z_p) = Z_{A(p)} \qquad \forall p \in S^n$$

(overvej dette).

Sætter vi $\omega = du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n+1}$ og benytter resultatet

$$S^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$$

fra eksempel 1o.4, gælder følgende udregning for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1,\ldots,X_p^n \in T_pM$:

$$\begin{aligned}
&(A^*(\Omega))_p(X_p^1,\ldots,X_p^n)\\
&= \Omega_{A(p)}(A_{*p}(X_p^1),\ldots,A_{*p}(X_p^n))\\
&= \omega_{A(p)}(I_{*A(p)}A_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*A(p)}A_{*p}(X_p^n),Z_{A(p)})\\
&= \omega_{S(p)}(S_{*p}I_{*p}(X_p^1),\ldots,S_{*p}I_{*p}(X_p^n),S_{*p}(Z_p))\\
&= (S^*(\omega))_p(I_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*p}(X_p^n),Z_p)\\
&= (-1)^{n+1}\omega_p(I_{*p}(X_p^1),\ldots,I_{*p}(X_p^n),Z_p)\\
&= (-1)^{n+1}\Omega_p(X_p^1,\ldots,X_p^n).
\end{aligned}$$

Af denne udregning følger:

$$A^*(\Omega)_p = (-1)^{n+1}\,\Omega_p \qquad \forall p \in S^n .$$

Dette beviser formlen.

Følgende figur viser geometrisk hvorfor A "vender" orienteringen på S^2:

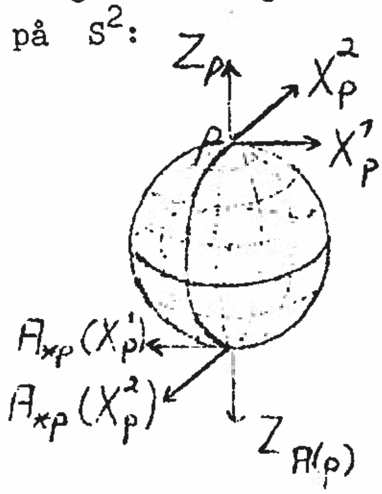


Fig. 22

Bemærk, at $\{X_p^1, X_p^2, Z_p\}$ er en højre stillet basis i rummet, mens $\{A_{*p}(X_p^1), A_{*p}(X_p^2), Z_{A(p)}\}$ er venstre stillet.

$\{X_p^1, X_p^2\}$ er derfor en positiv basis i T_pS^2, mens $\{A_{*p}(X_p^1), A_{*p}(X_p^2)\}$ er en negativ basis i $T_{A(p)}S^2$. (Se opgave 4).

Eksempel 1o.6 slut.

Eksempel 1o.7. I dette eksempel vil vi betragte det n-dimensionale reelle projektive rum RP^n.

Om RP^n gælder:

<u>RP^n er orienterbar, hvis n er ulige, og ikke orienterbar, hvis n er lige.</u>

For at bevise dette betragter vi projektionen

$$k_1 : S^n \longrightarrow RP^n.$$

Antag nu, at RP^n er orienterbar, og at ω er et volumen mål på RP^n. Som vi skal se, fører denne antagelse til en modstrid for n lige.

Da k_1 er en immersion (k_1 afbilder "små" kort på S^n diffeomorft på deres billeder i RP^n), bliver $k_1^*(\omega)$ et volumen mål på S^n. Der findes derfor en differentiabel funktion $f: S^n \longrightarrow E^1$ med $f(p) \neq 0 \quad \forall p \in S^n$, således at

$$k_1^*(\omega) = f\,\Omega,$$

hvor Ω er volumen målet på S^n i eksempel 1o.6.

Da S^n er sammenhængende, må der gælde, at

$$f(p) > 0 \quad \forall p \in S^n \quad \text{eller} \quad f(p) < 0 \quad \forall p \in S^n .$$

Idet vi benytter, at $k_1 A = k_1$ (trivielt), får vi:

$$\begin{aligned} f\,\Omega &= k_1^*(\omega) = (k_1A)^*(\omega) \\ &= A^*(k_1^*(\omega)) \qquad \text{(sætning 8.14)} \\ &= A^*(f\,\Omega) \\ &= (fA)A^*(\Omega) \qquad (A^* \text{ algebra-homomorfi}) \\ &= (-1)^{n+1}(fA)\,\Omega \quad \text{(eksempel 1o.6)}. \end{aligned}$$

Da $\Omega_p \neq 0 \quad \forall p \in S^n$, får vi heraf ligningen

$$f = (-1)^{n+1} fA.$$

Hvis n er lige, følger det af denne ligning, at $f(p)$ og $f(A(p))$ har modsat fortegn $\forall\, p \in S^n$. Dette er i modstrid med egenskaben $f > 0$ eller $f < 0$ på S^n.

Der kan derfor ikke findes et volumen mål på RP^n, når n er lige. Med andre ord: RP^n er ikke orienterbar for n lige.

Vi beviser nu, at RP^n er orienterbar for n ulige. Dertil bemærker vi først, at

$$\begin{aligned}
&\Omega_{A(p)}(A_{*p}(X_p^1),\dots,A_{*p}(X_p^n)) \\
&\quad = (A^*(\Omega))_p(X_p^1,\dots,X_p^n) \\
&\quad = (-1)^{n+1}\Omega_p(X_p^1,\dots,X_p^n) \\
&\quad = \Omega_p(X_p^1,\dots,X_p^n)
\end{aligned}$$

for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1,\dots,X_p^n \in T_pS^n$.

På grund af denne relation, og fordi $(k_1)_{*p}$ og $(k_1)_{*A(p)}$ afbilder henholdsvis T_pS^n og $T_{A(p)}S^n$ isomorft på $T_{k_1(p)}RP^n$, kan vi uden indbyrdes modstrid definere

$\omega_{k_1(p)} \in \Lambda_n^*(T_{k_1(p)}RP^n) \setminus \{0\}$ ved fastsættelsen:

$$\begin{aligned}
&\omega_{k_1(p)}((k_1)_{*p}(X_p^1),\dots,(k_1)_{*p}(X_p^n)) \\
&\qquad = \Omega_p(X_p^1,\dots,X_p^n)
\end{aligned}$$

for ethvert sæt af tangentvektorer $X_p^1,\dots,X_p^n \in T_pS^n$.

Med andre ord: Vi kan fastlægge et volumen mål ω på RP^n for n ulige, således at

$$k_1^*(\omega) = \Omega.$$

Dette beviser, at RP^n er orienterbar for n ulige.

Eksempel 1o.7 slut.

På en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed M er man interesseret i et positivt volumen mål, som harmonerer med den Riemann'ske metrik.

Hvis $p \in M$ og $\{E_p^1,\dots,E_p^n\}$ er en positiv, ortonormal basis i T_pM findes en entydig bestemt n-form $dV_p \in \bigwedge_n^*(T_pM)$, således at

$$dV_p(E_p^1,\dots,E_p^n) = 1.$$

Hvis $\{\overline{E}_p^1,\dots,\overline{E}_p^n\}$ er en vilkårlig anden positiv, ortonormal basis i T_pM, findes en ortogonal matrix $\{a_{ij}\}$ (transponeret = invers) bestemt ved

$$\overline{E}_p^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E_p^j \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,n.$$

Vi finder nu:

$$dV_p(\overline{E}_p^1,\dots,\overline{E}_p^n) = \det\{a_{ij}\}\ .$$

Da $\{a_{ij}\}$ er ortogonal, er det $\{a_{ij}\} = \pm 1$, og da begge involverede baser er positive, derfor $+1$.

Det fremgår så, at dV_p er karakteriseret ved, at dens værdi på en vilkårlig positiv, ortonormal basis i T_pM er 1.

n-formerne dV_p definerer et tværsnit dV i $\lambda_n^*(M)$. Som vi skal se, er dV differentiabel og definerer derfor et volumen mål på M. Dette volumen mål kaldes ofte for <u>det Riemann'ske volumen mål</u> på den orienterede, Riemann'ske mangfoldighed M.

<u>Bemærkning</u>. Betegnelsen dV skal <u>ikke</u> antyde, at dV er differentialet af en differential form af grad $n-1$ på M. Betegnelsen skyldes, at dV optræder i rollen som det infinitisimale volumen element.

Koordinatfremstillinger af dV bliver smukkest i kort, der harmonerer med orienteringen på M. Derfor følgende definition:

<u>Definition 1o.8</u>. Et kort $\underline{x}$ med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$ på en orienteret mangfoldighed M siges at være et <u>positivt orienteret kort</u>, hvis $\{\underline{x}_{u_1}(p),\dots,\underline{x}_{u_n}(p)\}$ er en positiv basis i T_pM $\forall p \in \underline{x}(D)$. Eller ækvivalent: $(du_1\wedge \dots \wedge du_n)_p$ er en positiv n-form på T_pM $\forall p \in \underline{x}(D)$.

<u>Lemma 10.9</u>. Enhver orienteret differentiabel mangfoldighed M har et del-atlas for den differentiable struktur bestående af positivt orienterede kort.

<u>Bevis</u>. Lad $\mathcal{P}$ være mængden af positivt orienterede kort på M.

Vi behøver blot at bevise, at de lokale koordinatsystemer i $\mathcal{P}$ overdækker M.

Lad dertil $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$ og antag, at D er sammenhængende. Hvis ω er et positivt volumen mål på M, findes så en differentiabel funktion $f : \underline{x}(D) \longrightarrow E^1$ med $f(p) \neq 0 \quad \forall p \in \underline{x}(D)$, således at

$$du_1 \wedge \ldots \wedge du_n = f \cdot (\omega | \underline{x}(D)).$$

Da D er sammenhængende, vil $f > 0$ eller $f < 0$ på $\underline{x}(D)$. Hvis $f > 0$ er $\underline{x}$ et positivt orienteret kort. Hvis $f < 0$ betragter vi

$$D' = \{(v_1,\ldots,v_n) \in E^n \mid (-v_1,v_2,\ldots,v_n) \in D\}$$

og afbildningen $\underline{x}' : D' \longrightarrow M$ defineret ved fastsættelsen

$$\underline{x}'(v_1,v_2,\ldots,v_n) = \underline{x}(-v_1,v_2,\ldots,v_n) \qquad \forall (v_1,\ldots,v_n) \in D'$$

Man overbeviser sig nu let om, at $\underline{x}'$ er et positivt orienteret kort på M. Det er herefter let at indse, at $\mathcal{P}$ er et del-atlas på M.

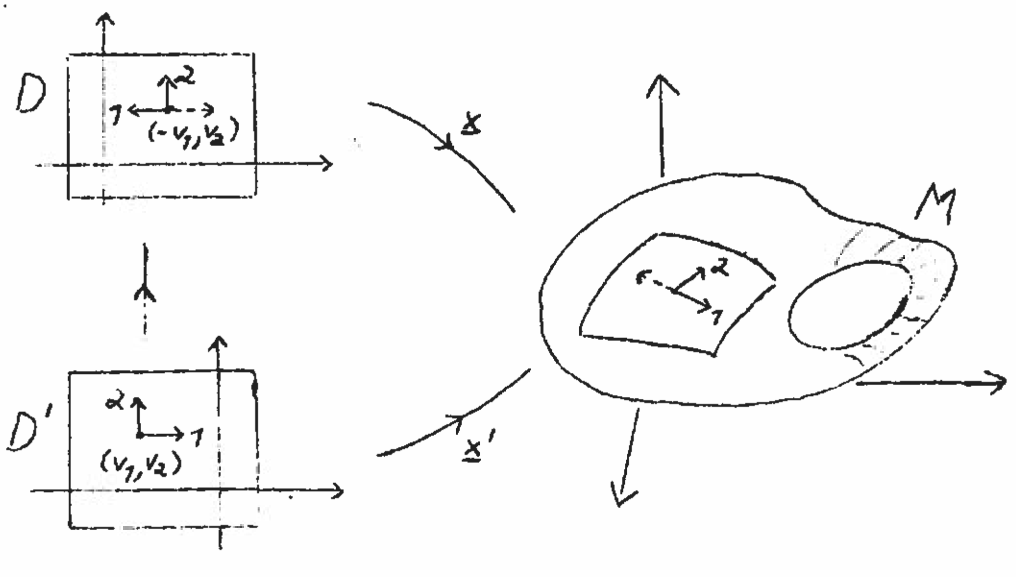


Fig. 23

Lad nu igen M være en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed.

Vi søger koordinatfremstillingen for dV i et positivt orienteret kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteqq E^n$.

Lad $p \in \underline{x}(D)$, og lad $\{E_p^1,\dots,E_p^n\}$ være en positiv, ortonormal basis i T_pM. Lad endvidere $\{c_{ij}\}$ være matricen bestemt ved, at

$$\underline{x}_{u_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, E_p^j \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,n.$$

Da $\{E_p^1,\dots,E_p^n\}$ er ortonormal, følger heraf, at

$$g_{ij}(p) = (\underline{x}_{u_i}(p), \underline{x}_{u_j}(p))_p = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot c_{jk} \,.$$

$\{c_{ij}\}$ tilfredsstiller således matrixligningen

$$\{g_{ij}(p)\} = \{c_{ij}\} \cdot \{c_{ij}\}^{tr}.$$

Idet

$$dV_p(\underline{x}_{u_1}(p),\dots,\underline{x}_{u_n}(p)) = \det\{c_{ij}\} \cdot dV_p(E_p^1,\dots,E_p^n)$$
$$= \det\{c_{ij}\}$$

og basen $\{\underline{x}_{u_1}(p),\dots,\underline{x}_{u_n}(p)\}$ er positiv, ser vi, at $\det\{c_{ij}\} > 0$.

Vi slutter så:

$$\det\{c_{ij}\} = \sqrt{\det\{g_{ij}(p)\}} \,.$$

Deraf følger, at

$$dV_p(\underline{x}_{u_1}(p),\dots,\underline{x}_{u_n}(p)) = \sqrt{\det\{g_{ij}(p)\}} \,.$$

Da denne ligning gælder for ethvert $p \in \underline{x}(D)$, får vi nu:

$$dV \mid \underline{x}(D) = \sqrt{\det\{g_{ij}\}}\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n \,.$$

Dette er den søgte koordinatfremstilling af dV i et positivt orienteret kort på M. Da vi kan overdække M med positivt orienterede kort, viser disse fremstillinger bl.a., at dV er differentiabel. dV er derfor et volumen mål på M.

Notation. Størrelsen $\det\{g_{ij}\}$ indgår ofte i formler. Vi vil derfor benytte forkortelsen

$$G = \det\{g_{ij}\} .$$

Det Riemann'ske volumen mål dV på en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed M har altså i et positivt orienteret kort $\underline{x}$ med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$ fremstillingen:

$$dV \mid \underline{x}(D) = \sqrt{G}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n .$$

En kanonisk bundt isomorfi.

Vi beviser først en sætning om endelig dimensionale vektorrum.

Sætning 1o.1o. Lad V være et vilkårligt n-dimensionalt vektorrum over k, og lad $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$ være en ikke triviel n-form på V.

Svarende til x findes en kanonisk isomorfi

$$l : \Lambda_{n-1}^*(V) \longrightarrow V,$$

hvor $l(y) \in V$ for $y \in \Lambda_{n-1}^*(V)$ er fastlagt ved kravet

$$y \wedge v^* = \langle l(y), v^* \rangle \, x \qquad \forall v^* \in V^*.$$

Bevis. Vi må først vise, at vi virkelig har fastlagt en afbildning l ved ovenstående krav.

Dertil bemærker vi, at da $\dim V = n$ er $\dim \Lambda_n^*(V) = 1$. $x \in \Lambda_n^*(V) \setminus \{0\}$ er derfor en basis for $\Lambda_n^*(V)$. Til ethvert par af elementer $y \in \Lambda_{n-1}^*(V)$ og $v^* \in V^*$ findes derfor en entydig bestemt skalar $a(y,v^*) \in k$, således at

$$y \wedge v^* = a(y,v^*)x .$$

Det er let at se, at

$$a(y, v^{*1} + v^{*2}) = a(y,v^{*1}) + a(y,v^{*2})$$

og

$$a(y, \lambda v^*) = \lambda\, a(y,v^*)$$

for $v^*, v^{*1}, v^{*2} \in V^*$, $y \in \Lambda_{n-1}^*(V)$ og $\lambda \in k$.

For fastholdt $y \in \Lambda_{n-1}^*(V)$ er tilordningen

$$v^* \in V^* \curvearrowright a(y,v^*) \in k$$

således et lineært funktional på V^*, altså et element i $(V^*)^*$.
På grund af den kanoniske isomorfi mellem et endeligt dimensionalt vektorrum og dets dobbelt duale rum, findes der derfor en entydig bestemt vektor $l(y) \in V$, således at

$$a(y,v^*) = \langle l(y),v^*\rangle \qquad \forall v^* \in V^* .$$

Vi har dermed bevist, at der for ethvert $y \in \Lambda^*_{n-1}(V)$ findes en entydig bestemt vektor $l(y) \in V$, således at

$$y \wedge v^* = \langle l(y),v^*\rangle \; x \qquad \forall v^* \in V^*.$$

Der findes altså en entydig bestemt afbildning l som foreskrevet.

Vi beviser nu, at l er lineær. For $y_1,y_2 \in \Lambda^*_{n-1}(V)$ og $v^* \in V^*$ får vi:

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2) \wedge v^* &= y_1 \wedge v^* + y_2 \wedge v^* \\ &= \langle l(y_1),v^*\rangle \; x + \langle l(y_2),v^*\rangle \; x \\ &= \langle l(y_1) + l(y_2),v^*\rangle \; x .\end{aligned}$$

Da denne ligning fælder for ethvert $v^* \in V^*$, må der, som vi har set, gælde, at

$$l(y_1 + y_2) = l(y_1) + l(y_2) \qquad \forall y_1,y_2 \in \Lambda^*_{n-1}(V).$$

På tilsvarende måde, ser vi, at

$$l(\lambda y) = \lambda \cdot l(y) \qquad \forall \lambda \in k, \; \forall y \in \Lambda^*_{n-1}(V).$$

Vi beviser nu til sidst, at l er en isomorfi.

Dertil bemærker vi, at vi kan vælge en basis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ for V med tilhørende dual basis $\{e^{*1},\ldots,e^{*n}\}$ for V^*, således at

$$x = e^{*1} \wedge \ldots \wedge e^{*n}$$

(gennemfør argumentet).

Fra Appendix 2 ved vi, at $(n-1)$-formerne

$$e^{*1} \wedge \ldots \wedge e^{*i-1} \wedge e^{*i+1} \wedge \ldots \wedge e^{*n} \qquad \text{for } i = 1,\ldots,$$

udgør en basis for $\bigwedge^*_{n-1}(V)$.

Definitionsligningen for 1 giver os nu:

$$(e^{*1}\wedge \ldots \wedge e^{*i-1}\wedge e^{*i+1}\wedge \ldots \wedge e^{*n}) \wedge e^{*j}$$
$$= \langle 1(e^{*1}\wedge \ldots \wedge e^{*i-1}\wedge e^{*i+1}\wedge \ldots \wedge e^{*n}), e^{*j}\rangle\, e^{*1}\wedge \ldots \wedge e^{*n}$$

for ethvert $i,j = 1,\ldots,n$.

Benyttes anti-kommutativiteten af $\wedge$, følger heraf:

$$\langle 1(e^{*1}\wedge \ldots \wedge e^{*i-1}\wedge e^{*i+1}\wedge \ldots \wedge e^{*n}), e^{*j}\rangle = (-1)^{n-i}\cdot \delta_{ij}$$

for ethvert $i,j = 1,\ldots,n$.

Dette viser, at

$$1(e^{*1}\wedge \ldots \wedge e^{*i-1}\wedge e^{*i+1}\wedge \ldots \wedge e^{*n}) = (-1)^{n-i}\, e_i$$

for ethvert $i = 1,\ldots,n$.

Da den lineære afbildning 1 således afbilder en basis for $\bigwedge^*_{n-1}(V)$ på en basis for V, følger det, at 1 er en isomorfi.

Dermed er sætningen bevist.

Svarende til isomorfien mellem vektorrum i sætning 1o.1o findes en bundt isomorfi, som vi nu skal beskrive.

<u>Sætning 1o.11</u>. Lad M være en n-dimensional, orienterbar differentiabel mangfoldighed, og lad Ω være et volumen mål på M.

Svarende til Ω findes en kanonisk bundt isomorfi af $\lambda^*_{n-1}(M)$ på $\tau(M)$ beskrevet ved det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^*_{n-1}(T(M)) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\bar{\pi}_M"'] & & T(M) \arrow[dl, "\pi_M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

hvor $1(\omega_p) \in T_pM$ for $\omega_p \in \bigwedge^*_{n-1}(T_pM)$ er fastlagt ved kravet

$$\omega_p \wedge \omega'_p = \langle 1(\omega_p), \omega'_p\rangle\, \Omega_p \quad \forall \omega'_p \in T^*_pM.$$

Bevis. Vi observerer, at afbildningen

$$l_p = l \mid \bigwedge_{n-1}^*(T_pM) : \bigwedge_{n-1}^*(T_pM) \longrightarrow T_pM$$

netop er den kanoniske isomorfi fra sætning 10.10 bestemt af n-formen $\Omega_p \in \bigwedge_n^*(T_pM) \setminus \{0\}$.

Da l således er en isomorfi på ethvert fiber, skal vi ifølge sætning 6.9 blot bevise, at l er en differentiabel afbildning for at have bevist sætningen.

Lad dertil $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$. Da de differentiable tværsnit

$$du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n \quad \text{for} \quad i = 1,\ldots,n$$

giver en trivialisering af $\bigwedge_{n-1}^*(M) \mid \underline{x}(D)$, og l er lineær på hvert fiber, er det tilstrækkeligt at bevise, at

$$l(du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n)$$

er et differentiabelt tværsnit i $\tau(M) \mid \underline{x}(D)$ for $i = 1,\ldots,n$ (overvej dette).

Da

$$\Omega \mid \underline{x}(D) = \Omega(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n})du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

får vi ved at benytte definitionsligningen for l:

$$(du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n) \wedge du_j$$
$$= \langle l(\cdot \wedge \cdot), du_j \rangle \, \Omega(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n})du_1 \wedge \ldots \wedge du_n .$$

Disse ligninger for ethvert $i,j = 1,\ldots,n$ viser (hvorfor ?), at

$$l(du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n) = (-1)^{n-i} \frac{\underline{x}_{u_i}}{\Omega(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n})}$$

for ethvert $i = 1,\ldots,n$.

Bemærk, at $\Omega(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n}) \neq 0$, fordi Ω er et volumen mål på M.

Dette udtryk viser klart, at

$$l(du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n)$$

er et differentiabelt tværsnit i $\tau(M) \mid \underline{x}(D)$ for ethvert

$i = 1,\ldots,n$ (D_3 i sætning 8.3 benyttes).

Som tidligere bemærket afslutter dette beviset for sætning 10.11.

Divergens af et vektorfelt.

I dette afsnit er M en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed med Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ og Riemann'sk volumen mål dV.

Ifølge sætning 10.11 giver dV anledning til en kanonisk bundt isomorfi fra $\lambda^*_{n-1}(M)$ til $\mathcal{T}(M)$. Den differentiable afbildning l mellem total rummene giver derfor en 1-1-tydig korrespondence mellem differential former af grad $n-1$ på M (differentiable tværsnit i $\lambda^*_{n-1}(M)$) og differentiable vektorfelter på M (differentiable tværsnit i $\mathcal{T}(M)$).

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^*_{n-1}(T(M)) \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "\bar{\pi}_M"] & & T(M) \arrow[dl, "\pi_M"'] \\
& M \arrow[ul, bend left, "l^{-1}\circ X"] \arrow[ur, bend right, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

Lad nu X være et differentiabelt vektorfelt på M. Så er $l^{-1}\circ X$ en differential form af grad $n-1$ på M (vi benytter $\circ$ for at understrege, at der er tale om sammensætning af differentiable afbildninger). Anvender vi det ydre differential på $l^{-1}\circ X$ får vi en differential form af grad n på M, $d(l^{-1}\circ X)$. Da $d(l^{-1}\circ X)$ har grad n findes en entydig bestemt differentiabel funktion (hvorfor ?)

$$\operatorname{div}X : M \longrightarrow E^1$$

således at

$$(-1)^{n-1}\, d(l^{-1}\circ X) = \operatorname{div}X \cdot dV.$$

Den skalære funktion $\operatorname{div}X$ kaldes for <u>divergensen</u> af vektorfeltet X.

Forbindelsen mellem det her definerede $\operatorname{div}X$ og den klassiske definition af divergensen af et vektorfelt på E^n får vi frem ved at betragte koordinatfremstillinger af $\operatorname{div}X$.

Lad dertil $\underline{x}$ være et positivt orienteret kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$.

I beviset for differentiabilitet af ι (sætning 1o.11) har vi bl.a. indset, at

$$\iota(du_1\wedge\ldots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}\wedge\ldots\wedge du_n)$$
$$= (-1)^{n-i}\frac{\underline{x}_{u_i}}{dV(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n})}$$

for ethvert $i = 1,\ldots,n$.

Da

$$dV \mid \underline{x}(D) = \sqrt{G}\; du_1\wedge\ldots\wedge du_n$$

får vi så

$$\iota(du_1\wedge\ldots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}\wedge\ldots\wedge du_n) = (-1)^{n-i}\frac{\underline{x}_{u_i}}{\sqrt{G}}$$

for ethvert $i = 1,\ldots,n$.

Lad nu X være et differentiabelt vektorfelt på M med koordinatfremstilling

$$X \mid \underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n} t^i\, \underline{x}_{u_i}$$

i kortet $\underline{x}$.

Benyttes ovenstående formel for ι får vi så:

$$\iota^{-1}\circ X \mid \underline{x}(D)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\, t^i\cdot\sqrt{G}\cdot du_1\wedge\ldots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}\wedge\ldots\wedge du_n\,.$$

Når vi benytter egenskaberne ved et ydre differential samt anti-kommutativiteten af $\wedge$, følger heraf:

$$d(\iota^{-1}\circ X)\mid\underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\partial(t^i\cdot\sqrt{G})}{\partial u_i}\cdot(-1)^{i-1}\, du_1\wedge\ldots\wedge du_n$$
$$= (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(t^i\cdot\sqrt{G})}{\partial u_i}\, du_1\wedge\ldots\wedge du_n\,.$$

Så får vi:

$$(-1)^{n-1}d(\iota^{-1}\circ X)\mid\underline{x}(D)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial(t^i\cdot\sqrt{G})}{\partial u_i}\sqrt{G}\; du_1\wedge\ldots\wedge du_n$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(t^i \cdot \sqrt{G})}{\partial u_i}\right) dV \,|\, \underline{x}(D).$$

Pr. definition af divX følger heraf:

$$\mathrm{div}X \,|\, \underline{x}(D) = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(t^i \cdot \sqrt{G})}{\partial u_i}.$$

Dette er den søgte koordinatfremstilling af divX i det positivt orienterede kort $\underline{x}$ på M.

På en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed M har vi nu indført differential operatorerne gradient og divergens. Vi kan derfor også definere Laplace operatoren Δ.

Hvis $f : M \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, sætter vi pr. definition

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f).$$

Da vi kender koordinatfremstillingen for grad f (side 168), får vi straks følgende koordinatfremstilling af $\Delta(f)$ i et positivt orienteret kort $\underline{x}$ på M:

$$\Delta(f) \,|\, \underline{x}(D) = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{G} \cdot g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j}\right).$$

Eksempel 1o.12. Betragt E^n med de sædvanlige koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$ hørende til kortet $\underline{x} = 1_{E^n}$.

Når E^n forsynes med den flade Riemann'ske metrik og orienteres på sædvanlig måde (eksempel 1o.4), er $\underline{x} = 1_{E^n}$ et positivt orienteret kort på E^n med $\{g_{ij}\}$ lig identitetsmatricen. Derfor er også $\{g^{ij}\}$ identitetsmatricen, og $G = 1$.

Hvis

$$X = \sum_{i=1}^{n} t^i \cdot \underline{x}_{u_i}$$

får vi så:

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial t^i}{\partial u_i}.$$

Hvis $f : E^n \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, ser vi endvidere, at

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial u_i)^2}.$$

Vi ser altså, at divergens og Laplace operatoren, som de er defineret her, er en generalisation af de fra den klassiske analyse kendte operatorer til en vilkårlig orienteret, Riemann'sk mangfoldighed.

Eksempel 1o.12 slut.

Gradient, divergens og, som vi snart skal se, rotationen af et vektorfelt på E^3 er via kanoniske isomorfier defineret ved hjælp af det ydre differential. Man må derfor forvente, at de klassiske formler fra vektoranalysen kan afledes fra egenskaberne ved det ydre differential. I det følgende skal vi undersøge dette.

Vi bemærker imidlertid først, at der findes en formel, der forbinder de differentiable afbildninger m (sætning 9.1o) og l (sætning 1o.11).

Lemma 1o.13. Hvis M er en orienteret, Riemann'sk mangfoldighed med Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ og Riemann'sk volumen mål dV gælder, at

$$(l^{-1}\circ X) \wedge (m\circ Y) = (X,Y)dV$$

for ethvert par af differentiable vektorfelter X og Y på M.

Bevis. Da følgende formel er rigtig $\forall p \in M$ pr. definition af l, er den rigtig som en ligning mellem differential former på M:

$$(l^{-1}\circ X) \wedge (m\circ Y) = \langle l\circ(l^{-1}\circ X),\ m\circ Y\rangle\ dV$$
$$= \langle X,\ m\circ Y\rangle\ dV.$$

Når definitionen af m benyttes, ser vi, at følgende udregning gælder $\forall p \in M$:

$$\langle X,\ m\circ Y\rangle_p = \langle X_p,\ (m\circ Y)_p\rangle_p$$
$$= \langle X_p,\ m(Y_p)\rangle_p = m(Y_p)(X_p)$$
$$= (Y_p,X_p)_p = (X_p,Y_p)_p = (X,Y)_p.$$

Heraf følger, at

$$\langle X,\ m\circ Y\rangle = (X,Y).$$

Lemmaet bevises nu ved at sammenholde de udledte formler.

Som en anvendelse beviser vi følgende formel, som gælder for enhver differentiabel funktion $f : M \longrightarrow E^1$ og ethvert differentiabelt vektorfelt X på M:

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = (\operatorname{grad} f, X) + f \cdot \operatorname{div} X .$$

Bevis. Pr. definition af divergens får vi først:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\cdot X)dV &= (-1)^{n-1} d(1^{-1} \circ (f \cdot X)) \\ &= (-1)^{n-1} d(f \cdot (1^{-1} \circ X)).\end{aligned}$$

I det sidste lighedstegn har vi blot benyttet, at 1^{-1} er lineær på hvert fiber.

I den følgende udregning benytter vi bl.a. 2 i sætning 8.6, dfinitionen af $\operatorname{grad} f$, anti-kommutativiteten af $\wedge$ samt lemma 10.13:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(f\cdot X)dV \\ &\quad = (-1)^{n-1} df \wedge (1^{-1} \circ X) + (-1)^{n-1} f \cdot d(1^{-1} \circ X) \\ &\quad = (-1)^{n-1} (m \circ \operatorname{grad} f) \wedge (1^{-1} \circ X) + (f \cdot \operatorname{div} X) dV \\ &\quad = (1^{-1} \circ X) \wedge (m \circ \operatorname{grad} f) + (f \operatorname{div} X) dV \\ &\quad = (X, \operatorname{grad} f)\, dV + (f \operatorname{div} X) dV \\ &\quad = \{(\operatorname{grad} f, X) + f \operatorname{div} X\}\, dV.\end{aligned}$$

Da $dV_p \neq 0$ $\forall p \in M$ følger formlen direkte heraf.

Vektoranalyse på E^3.

I dette afsnit betragter vi E^3 med sædvanlige koordinater $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ hørende til kortet $\underline{x} = 1_{E^3}$. E^3 udstyres med den flade Riemann'ske metrik og tænkes orienteret på sædvanlig måde. Vi bemærker, at

$$dV = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$$

så er det Riemann'ske volumen mål på E^3.

Hvis X er et differentiabelt vektorfelt på E^3, er $d(m^\circ X)$ en differential form af grad 2 på M. Da $2 = n-1$ i dette tilfælde, vil $1^\circ d(m^\circ X)$ derfor være et differentiabelt vektorfelt på E^3. Dette vektorfelt kaldes <u>rotationen</u> af vektorfeltet X og betegnes med $\operatorname{rot} X$. Vi har altså pr. definition:

$$\operatorname{rot} X = 1^\circ d(m^\circ X).$$

<u>Opgave 1</u>. Vis, at

$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial t^3}{\partial u_2} - \frac{\partial t^2}{\partial u_3}\right) x_{u_1} + \left(\frac{\partial t^1}{\partial u_3} - \frac{\partial t^3}{\partial u_1}\right) x_{u_2} + \left(\frac{\partial t^2}{\partial u_1} - \frac{\partial t^1}{\partial u_2}\right) x_{u_3}$$

hvis $X = t^1 \underline{x}_{u_1} + t^2 \underline{x}_{u_2} + t^3 \underline{x}_{u_3}$.

<u>Vektorproduktet</u> $X \times Y$ af 2 differentiable vektorfelter X og Y på E^3 definerer vi således:

$$X \times Y = 1^\circ((m^\circ X) \wedge (m^\circ Y)).$$

<u>Opgave 2</u>. Vis, at koordinatfremstillingen af $X \times Y$ er den sædvanlige fremstilling af et vektorprodukt.

Hvis $f\colon E^3 \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, og X er et differentiabelt vektorfelt på E^3, gælder følgende relationer:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$$

og

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

Begge disse relationer er en konsekvens af egenskaben $d^2 = 0$ ved det ydre differential (lemma 8.9). Præcist har vi:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 1^\circ d(m^\circ(m^{-1} \circ df)) \\ &= 1^\circ d(df) = 0\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) \cdot dV &= d(1^{-1} \circ (1^\circ d(m^\circ X))) \\ &= d(d(m^\circ X)) = 0.\end{aligned}$$

Benytter man derivations egenskaben ved det ydre differential (2 i sætning 8.6), kan man endvidere bevise formlerne:

$$\operatorname{rot}(fX) = \operatorname{grad} f \times X + f \operatorname{rot} X$$

$$\operatorname{div}(X \times Y) = (\operatorname{rot} X, Y) - (X, \operatorname{rot} Y).$$

Opgave 3. Verificer ovenstående formler.

OPGAVER

Opgave 4. Betragt E^n med sædvanlig orientering (eksempel 1o.4)

a) Vis, at de positive baser i tangentrummet for et punkt $p \in E^1$ netop består af vektorerne $X_p \neq 0$, hvor X_p's retning falder sammen med den sædvanlige gennemløbsretning på E^1.

b) Vis, at de positive baser i tangentrummet for et punkt $p \in E^2$ netop er de baser $\{X_p^1, X_p^2\}$ i T_pE^2, hvor man kommer fra retningen af X_p^1 til retningen af X_p^2 ved at gennemløbe en vinkel v med $0 < v < \pi$ imod uret.

c) Betragt et punkt $p \in E^3$. Vi vil sige, at en basis $\{X_p^1, X_p^2, X_p^3\}$ i T_pE^3 er højre-stillet, hvis X_p^3 falder i det halvrum for planen udspændt af X_p^1 og X_p^2, der indeholder $X_p^1 \times X_p^2$ (det sædvanlige vektorprodukt i rummet). Vis, at de positive baser i T_pE^3 netop er de højre-stillede baser i T_pE^3.

Hint til b) og c): Brug f.eks. resultatet vedrørende elementære matricer udledt i § 3 opgave 19.

Opgave 5. Lad M og N være diffeomorfe differentiable mangfoldigheder.

Vis, at M er orienterbar hvis og kun hvis N er orienterbar.

Antag nu yderligere, at M og N er orienterede, og at Ω er et positivt volumen mål på N.

En diffeomorfi $F : M \longrightarrow N$ siges at være <u>orienteringsbevarende</u> (-vendende), hvis $F^*(\Omega)$ er et positivt (negativt) volumen mål på M.

Vis, at de orienteringsbevarende diffeomorfier af en differentiabel mangfoldighed M ind i sig selv er en gruppe under sammensætning.

Giv eksempler på orienteringsbevarende og -vendende diffeomorfier.

<u>Opgave 6</u>. Lad M og N være diffeomorfe Riemann'ske mangfoldigheder.

En diffeomorfi $F : M \longrightarrow N$ kaldes en <u>isometri</u>, hvis

$$(F_{*p}(X_p), F_{*p}(Y_p))_{N,F(p)} = (X_p, Y_p)_{M,p}$$

for ethvert $p \in M$ og ethvert par af tangentvektorer $X_p, Y_p \in T_pM$.

Hvis der findes en isometri $F : M \longrightarrow N$ siges M og N at være <u>isometriske</u>.

Vis, at F^{-1} og GF er isometrier, hvis $F : M \longrightarrow N$ og $G : N \longrightarrow L$ er isometrier.

Antag nu yderligere, at M og N er orienterede, og at $F : M \longrightarrow N$ er en orienteringsbevarende isometri.

Vis, at F bevarer det Riemann'ske volumen mål, d.v.s: Hvis dV er det Riemann'ske volumen mål på N, er $F^*(dV)$ det Riemann'ske volumen mål på M.

<u>Opgave 7</u>. Lad G være en Lie-gruppe.

En Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ på G siges at være <u>venstre invariant</u>, hvis L_a er en isometri m.h.t. $(\cdot,\cdot)$ $\forall a \in G$.

Vis, at enhver Lie-gruppe G kan forsynes med en venstre invariant Riemann'sk metrik.

Vis, at den flade Riemann'ske metrik på E^n, den inducerede Riemann'ske metrik på S^1 og den inducerede Riemann'ske metrik på $S^1 \times S^1$ (Torus) er venstre invariante .

Vis, at enhver Lie-gruppe er orienterbar.

Vis, at enhver Lie-gruppe kan orienteres på netop to måder, således at venstre translationerne er orienteringsbevarende diffeomorfier.

Vis, at det Riemann'ske volumen mål på en Lie-gruppe er venstre invariant, hvis gruppen forsynes med en venstre invariant Riemann'sk metrik og orienteres, således at venstre translationerne er orienteringsbevarende.

Opgave 8. Vis, at volumen målene i eksemplerne 10.4 og 10.6 er de Riemann'ske volumen mål på henholdsvis E^n og S^n, når disse udstyres med sædvanlig Riemann'sk metrik og sædvanlig orientering.

Opgave 9. Verificer direkte, at koordinatfremstillingerne for gradient, divergens og Laplace operatoren er uafhængig af valget af koordinater i overlappet mellem 2 kort.

(Dette er naturligvis klart, da vi har givet en koordinatfri beskrivelse af disse operatorer, men det er ingenlunde klart ved en direkte beskuelse af koordinatfremstillingerne).

§ 11. Anvendelser af deling af enheden.

Vi skal i denne paragraf foretage en række typiske anvendelser af deling af enheden. I den anledning minder vi om sætningen om eksistens af deling af enheden på parakompakte differentiable mangfoldigheder.

Sætning 11.1. En differentiabel mangfoldighed M er parakompakt, hvis og kun hvis M er et Hausdorffrum, og der til enhver åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af M, findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af M med samme indexmængde I som $\mathcal{V}$, der forfiner $\mathcal{V}$ og har en associeret differentiabel deling af enheden $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ med $\alpha \in I$.

Et bevis for dette findes i Appendix 3 (Sætning A3.20).

Bemærkning. Når vi i det følgende taler om deling af enheden på en differentiabel mangfoldighed, vil der altid blive ment differentiabel deling af enheden, med mindre andet udtrykkeligt fremhæves.

Eksistens af Riemann'sk metrik.

Vores første anvendelse af deling af enheden bliver konstruktionen af en Riemann'sk metrik på en vilkårlig parakompakt differentiabel mangfoldighed. Sagt i korthed er fremgangsmåden den, at vi konstruerer "lokale Riemann'ske metrikker" overalt på mangfoldigheden og stykker disse sammen ved hjælp af en deling af enheden til en "global Riemann'sk metrik".

Sætning 11.2. På enhver parakompakt differentiabel mangfoldighed M^n findes der en Riemann'sk metrik.

Bevis. M kan overdækkes med åbne mængder, hvorover tangentbundtet $\tau(M)$ er trivielt. Da M er parakompakt, kan vi finde en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, sådan at $\tau(M)|U_\alpha$ er trivielt for ethvert α, og som har en associeret deling af enheden $\{f_\alpha\}$.

Vi betragter nu et fast U_α og konstruerer en Riemann'sk metrik g_α på U_α på følgende måde. Da $\tau(M)|U_\alpha$ er trivielt, findes der n lineært uafhængige tværsnit $X^1, \dots, X^n$ i

$\tau(M)|U_\alpha$. Hvis $p \in U_\alpha$ og $Y_p, Z_p \in T_pM$ kan disse på entydig måde skrives

$$Y_p = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$$

$$Z_p = \sum_{i=1}^{n} b_i X^i,$$

og vi sætter

$$g_\alpha(Y_p, Z_p) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Herved fås klart et indre produkt på T_pM for ethvert $p \in U_\alpha$ (bestemt ved at $X_p^1, \ldots, X_p^n$ er en ortonormal basis for T_pM). For at vise differentiabilitet af g_α betragter vi differentiable vektorfelter Y og Z på en åben mængde $W \subseteq U_\alpha$ og viser at $g_\alpha(Y,Z)\colon W \longrightarrow E^1$ er differentiabel (Sætning 9.3).

Hertil skrives Y og Z på formen

$$Y = \sum_{i=1}^{n} s_i X^i,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} t_i X^i,$$

hvor $s_1, \ldots, s_n$, $t_1, \ldots, t_n$ er differentiable funktioner $W \longrightarrow E^1$. Da er

$$g_\alpha(Y,Z) = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i$$

også differentiabel.

For ethvert α har vi nu en Riemann'sk metrik g_α på U_α, og vi udvider disse til hele M^n ved at sætte $g_\alpha(Y_p, Z_p) = 0$ for $p \in M^n \setminus U_\alpha$, $Y_p \in T_pM$ og $Z_p \in T_pM$. (Dette udvidede g_α er naturligvis ingen Riemann'sk metrik. Udvidelsen foretages blot af tekniske årsager).

Der defineres nu en Riemann'sk metrik g på M ved

$$g = \sum_\alpha f_\alpha g \ .$$

Dette skal forstås på den måde, at vi for $p \in M$ og $Y_p, Z_p \in T_pM$ sætter

$$g(Y_p, Z_p) = \sum_\alpha f_\alpha(p) g_\alpha(Y_p, Z_p),$$

og denne sum har god mening, idet $f_\alpha(p) = 0$ undtagen for endelig mange α. På hver fiber er g en linearkombination af endelig mange symmetriske bilinearformer, og da er g selv en symmetrisk bilinearform på hver fiber. Endvidere er $f_\alpha(p) \geq 0$ for alle α, og $f_\alpha(p) > 0$ for mindst et α, hvoraf nu følger, at g er et indre produkt på hver fiber.

Vi mangler nu blot at bevise, at g er differentiabel. Om ethvert $p \in M$ findes en åben omegn V_p, sådan at $V_p \cap U_\alpha \neq \emptyset$ for kun endelig mange α. Restriktionen af g til V_p er da en endelig sum

$$g|V_p = \sum_{j=1}^{k} f_{\alpha_j}(g_{\alpha_j}|V_p)$$

og man slutter let, at g er differentiabel på V_p. Hermed er bevist, at g er differentiabel, og konstruktionen af en Riemann'sk metrik er gennemført.

Bemærkning. Hvis M er en Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed, er betingelsen om parakompakthed i sætningen ovenfor nødvendig, idet man kan vise, at eksistensen af en Riemann'sk metrik i så fald medfører parakompakthed.

Orientering.

I dette afsnit skal vi se, at en parakompakt differentiabel mangfoldighed er orienterbar, hvis og kun hvis den har et del-atlas af en særlig art, som vi nu skal beskrive.

Definition 11.3. To kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M^n$, $\underline{y} : E \subseteq E^n \longrightarrow M^n$ med koordinater $(u_1, \ldots, u_n)$ og $(v_1, \ldots, v_n)$ på en differentiabel mangfoldighed M^n siges at overlappe positivt, hvis der i ethvert punkt af $\underline{y}^{-1}(\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E))$ gælder

$$\det\left\{\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right\} > 0 .$$

Et del-atlas $\mathcal{P}$ på M siges at være positivt overlappende, dersom hvilke som helst to kort fra $\mathcal{P}$ overlapper positivt.

Fra lemma 1o.9 ved vi, at en orienteret mangfoldighed M^n (d.v.s. en mangfoldighed, hvor hver sammenhængskomponent er orienteret) har et del-atlas bestående af positivt orienterede kort. Om denne situation har vi følgende lemma.

Lemma 11.4. Lad M^n være en orienteret differentiabel mangfoldighed og $\mathcal{P}$ et del-atlas på M^n bestående af positivt orienterede kort. Da er $\mathcal{P}$ positivt overlappende.

Bevis. Lad $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M^n$, $\underline{y} : E \subseteq E^n \longrightarrow M^n$ være to kort fra $\mathcal{P}$ med koordinater $(u_1,\dots,u_n)$ og $(v_1,\dots,v_n)$. Idet

$$\underline{y}_{v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \underline{x}_{u_i} ,$$

og $(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n})$, $(\underline{y}_{v_1},\dots,\underline{y}_{v_n})$ er positive baser i T_pM for ethvert $p \in \underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)$, følger det, at

$$\det\left\{\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right\} > 0 .$$

Altså er $\mathcal{P}$ positivt overlappende.

Af lemmaet følger, at en orienterbar differentiabel mangfoldighed har et positivt overlappende del-atlas. Hvis mangfoldigheden er parakompakt, kan man, som vi nu skal se, også slutte den anden vej.

Sætning 11.5. En parakompakt differentiabel mangfoldighed M^n er orienterbar, hvis og kun hvis den har et positivt overlappende del-atlas.

Bevis. Vi har netop indset at "kun hvis" gælder. Lad os derfor antage, at $\mathcal{P}$ er et positivt overlappende del-atlas, og vi skal da finde en differentialform ω af grad n på M^n, sådan at $\omega_p \neq 0$ for alle $p \in M^n$.

Kortene i $\mathcal{P}$ giver os en åben overdækning af M, og da M er parakompakt, kan denne overdækning forfines til en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med en associeret deling af enheden $\{f_\alpha\}$. Her er U_α indeholdt i billedet af et kort $\underline{x}_\alpha : D_\alpha \subseteq E^n \longrightarrow M^n$ fra $\mathcal{P}$ med koordinater $(u_\alpha^1,\dots,u_\alpha^n)$.

På U_α har vi differentialformen ω_α' af grad n, som udtrykt i koordinaterne $(u_\alpha^1,\dots,u_\alpha^n)$ er

$$du_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge du_\alpha^n \; .$$

For ethvert α defineres en differentialform ω_α af grad n på M ved fastsættelsen

$$\omega_\alpha = \begin{cases} f_\alpha \quad \omega'_\alpha & \text{på } U_\alpha \\ 0 & \text{på } M \setminus U_\alpha \; . \end{cases}$$

At denne er differentiabel følger af, at dens restriktion til U_α er differentiabel, og at den er 0 på $M \setminus st(f_\alpha)$.

Vi sætter nu

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha .$$

Da $\mathcal{U}$ er lokalt endelig, har ethvert punkt $p \in M$ en åben omegn V_p, sådan at alle led i denne sum på nær endelig mange er identisk 0 på V_p. Dette viser, at ω er en veldefineret differentialform af grad n på M.

Nu mangler vi kun at vise, at $\omega_p \neq 0$ for alle $p \in M$. Til $p \in M$ vælger vi α så at $f_\alpha(p) > 0$. Der findes kun endelig mange β, sådan at $p \in U_\beta$. For et sådant β er ω'_β udtrykt i koordinaterne $(u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^n)$

$$\det\left\{\frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}\right\} (du_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge du_\alpha^n)$$

og derfor har vi i punktet p

$$\omega'_\beta \quad (\underline{x}_{u_\alpha^1}, \ldots, \underline{x}_{u_\alpha^n}) = \det\left\{\frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}\right\} > 0 \; ,$$

hvor ulighedstegnet kommer af, at $\underline{x}_\beta$ og $\underline{x}_\alpha$ overlapper positivt.

Idet vi kun summerer over de β, for hvilke $p \in U_\beta$, gælder i punktet p

$$\begin{aligned} \omega(\underline{x}_{u_\alpha^1}, \ldots, \underline{x}_{u_\alpha^n}) &= \sum_\beta f_\beta \; (p) \, \omega'_\beta \quad (\underline{x}_{u_\alpha^1}, \ldots, \underline{x}_{u_\alpha^n}) \\ &= \sum_\beta f_\beta \; (p) \det\left\{\frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}\right\} > 0 \; , \end{aligned}$$

hvor ulighedstegnet følger af, at alle led er ≥ 0, og at leddet med $\beta = \alpha$ er $f_\alpha(p) > 0$. Altså er $\omega_p \neq 0$.

Bemærkning. Hvis vi på den parakompakte differentiable mangfoldighed M^n har et positivt overlappende del-atlas $\mathcal{P}$, har vi i beviset ovenfor konstrueret en differentialform ω af grad n, sådan at

$$\omega(\underline{x}_{u_1},\ldots,\underline{x}_{u_n}) > 0$$

for ethvert kort $\underline{x}$ fra $\mathcal{P}$ (overvej dette). Hvis vi orienterer M^n, sådan at ω er et positivt volumenmål, bliver alle kortene fra $\mathcal{P}$ positivt orienterede, og dette er den eneste orientering af M^n med denne egenskab.

På en orienterbar parakompakt differentiabel mangfoldighed, har man altså mulighed for at fastlægge en orientering ved at kræve, at et givet positivt overlappende del-atlas skal bestå af positivt orienterede kort.

Opgave 1. Vis at en hyperflade $M^n \subseteq E^{n+1}$ er orienterbar, hvis og kun hvis den har et normalfelt Z, sådan at $Z_p \neq 0$ for alle $p \in M^n$.

Opgave 2. Lad M være en differentiabel mangfoldighed, sådan at totalrummet for tangentbundtet TM er parakompakt. Vis at TM er en orienterbar differentiabel mangfoldighed.

Embedding af kompakt differentiabel mangfoldighed.

Vi skal nu se, hvordan deling af enheden kan anvendes til at konstruere en embedding af en kompakt differentiabel mangfoldighed ind i et euclidisk rum.

Sætning 11.6. For enhver kompakt differentiabel mangfoldighed M^n findes en embedding $I : M^n \longrightarrow E^N$ ind i et euclidisk rum af tilstrækkelig høj dimension.

Bevis. Da M er kompakt, kan vi overdække M med endelig mange koordinatomegne $U_1,\ldots,U_s$, som er billeder af kort $\underline{x}_j$ $(j=1,\ldots,s)$. Vi vælger åbne mængder $W_1,\ldots,W_s$, $V_1,\ldots,V_s$, så at $\bigcup V_j = M$ og

$$\overline{V}_j \subseteq W_j \subseteq \overline{W}_j \subseteq U_j$$

(skrænkningssætningen brugt to gange), og differentiable funktioner $f_j : M \longrightarrow E^1$ $(j=1,\ldots,s)$ med følgende egenskaber (Lemma A3.19)

$$f_j(p) = \begin{cases} 1 & \text{for } p \in \bar{V}_j \\ 0 & \text{for } p \in M \setminus W_j \end{cases}$$

Heraf følger

$$st(f_j) \subseteqq U_j .$$

Der defineres nu $s(n+1)$ differentiable funktioner

$$h_j^i : M \longrightarrow E^1 \quad (i=0,1,\dots,n;\ j=1,\dots,s)$$

ved

$$h_j^o(p) = f_j(p)$$

$$h_j^i(p) = \begin{cases} f_j(p)u_j^i(p) & \text{for } p \in U_j \\ 0 & \text{for } p \in M \setminus U_j \end{cases} \qquad (i > 0)$$

hvor $u_j^i(p)$ er den i'te koordinat til $\underline{x}_j^{-1}(p)$.

Vi definerer nu en differentiabel afbildning $I : M^n \longrightarrow E^{s(n+1)}$ ved at lade funktionerne h_j^i være de $s(n+1)$ koordinatfunktioner, og viser, at I er en embedding. Ifølge sætning 3.2o er det nok at vise, at I er en 1-1-tydig immersion.

Først vises, at I er 1-1-tydig. Hvis $I(p) = I(q)$ har vi specielt $f_j(p) = f_j(q)$ for alle j. Da $\bigcup V_j = M$ kan j vælges, så at

$$f_j(p) = f_j(q) = 1.$$

Idet $p \in U_j$ og $q \in U_j$, får vi for $i=1,\dots,n$

$$u_j^i(p) = f_j(p)u_j^i(p) = h_j^i(p)$$
$$= h_j^i(q) = f_j(q)u_j^i(q) = u_j^i(q),$$

hvilket netop betyder, at $\underline{x}^{-1}(p) = \underline{x}^{-1}(q)$, men så er $p = q$.

For at vise, at I er en immersion, må vi betragte et $p \in M^n$ og vise, at $I_* : T_pM \longrightarrow T_{I(p)}E^{s(n+1)}$ er af rang n. Vi vælger j, sådan at $p \in V_j$, og benytter kortet $\underline{x}_j$ omkring p til udregning af Jacobi matricen. I omegnen V_j af p er $f_j(p)$ identisk 1, så på $\underline{x}_j^{-1}(V_j)$ har vi blandt andet følgende n koordinatfunktioner for $I\,\underline{x}_j$

$$h_j^i\,\underline{x}_j(u_j^1,\dots,u_j^n) = u_j^i(\underline{x}_j(u_j^1,\dots,u_j^n)) = u_j^i \qquad (i=1,\dots,n).$$

Jacobi matricen for $I\,\underline{x}_j$ i $\underline{x}_j^{-1}(p)$ indeholder altså en $(n \times n)$-enhedsmatrix og har derfor rang n. Dette viser, at I er en immersion, og sætningen er bevist.

Bemærkning. Ved at udbygge teknikken i beviset ovenfor kan man generalisere Sætning 11.6 til Hausdorff'ske differentiable mangfoldigheder med tællelig basis for topologien. Det har interesse at undersøge, hvor lille dimension N, man kan opnå. Af resultater i denne retning kan nævnes Whitney's fra 1936 om, at enhver n-dimensional Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed med tællelig basis for topologien kan embeddes i E^{2n+1}. I 1944 forbedrede Whitney resultatet til E^{2n}.

Approksimation med differentiable afbildninger.

Vi skal nu beskæftige os med problemet om at approksimere en kontinuert afbildning $f : M \longrightarrow E^k$ af en differentiabel mangfoldighed ind i et euclidisk rum med en differentiabel afbildning. Det vil senere vise sig nyttigt at vide, at hvis f er differentiabel på en lukket delmængde $A \subseteq M$ (definition heraf følger nedenfor), kan f approksimeres med en differentiabel funktion, der er lig med f på A.

Definition 11.7. Hvis A er en lukket delmængde af en differentiabel mangfoldighed M^n, siges en afbildning $f : A \longrightarrow N^k$ af A ind i en differentiabel mangfoldighed N^k at være differentiabel, såfremt der for ethvert $p \in A$ findes en åben omegn V_p af p i M^n og en differentiabel afbildning $f_p : V_p \longrightarrow N^k$, sådan at

$$f_p | V_p \cap A = f | V_p \cap A.$$

Terminologi. Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed og $\delta : M^n \longrightarrow E^1$ en kontinuert funktion, der afbilder ind i de positive reelle tal. Hvis $f, g : M^n \longrightarrow E^k$ er kontinuerte afbildninger, siger vi, at g er en δ-approksimation til f, hvis

$$\| f(p) - g(p) \| \leq \delta(p)$$

for alle $p \in M^n$, hvor $\| \ \|$ er normen stammende fra det sædvanlige indre produkt på E^k.

Vi kan nu formulere approksimationssætningen.

<u>Sætning 11.8.</u> Lad A være en lukket delmængde af en parakompakt differentiabel mangfoldighed M^n, $f : M^n \longrightarrow E^k$ en kontinuert funktion, hvis restriktion til A er differentiabel, og $\delta : M^n \longrightarrow E^1$ en kontinuert strengt positiv reel funktion. Der findes da en differentiabel funktion $h : M^n \longrightarrow E^k$, som er en δ-approksimation til f, og sådan at $h|A = f|A$.

<u>Bevis</u>. Det er nok at betragte tilfældet $k = 1$, idet vi ved at anvende sætningen på hver koordinatfunktion for f for sig, får sætningen i det generelle tilfælde (overvej dette nøjere).

Til ethvert $p \in A$ findes en åben omegn V_p af p og en differentiabel funktion $f_p : V_p \longrightarrow E^k$, sådan at f_p og f stemmer overens på $V_p \cap A$. Vi kan antage, at $\overline{V}_p$ er kompakt, og der findes da et $\delta_p > 0$, der opfylder $\delta_p \leqq \delta(q)$ for alle $q \in \overline{V}_p$. Da f og f_p er kontinuerte, har p en åben omegn $U_p \subseteqq V_p$, sådan at der for alle $q \in U_p$ gælder

$$|f(p) - f(q)| \leqq \tfrac{1}{2}\delta_p ,$$

$$|f_p(p) - f_p(q)| \leqq \tfrac{1}{2}\delta_p .$$

Da $f(p) = f_p(p)$, har vi for $q \in U_p$

$$|f_p(q) - f(q)| \leqq \delta_p \leqq \delta(q) .$$

Til ethvert $p \in M \setminus A$ findes en åben omegn V_p af p, sådan at $\overline{V}_p$ er kompakt, og $V_p \subseteqq M \setminus A$. Vi vælger et $\delta_p > 0$, der opfylder $\delta_p \leqq \delta(q)$ for alle $q \in \overline{V}_p$. Da f er kontinuert, har p en åben omegn $U_p \subseteqq V_p$, sådan at der for alle $q \in U_p$ gælder

$$|f(p) - f(q)| \leqq \delta_p .$$

Sættes $f_p(q) = f(p)$ for alle $q \in U_p$, har vi for $q \in U_p$

$$|f_p(q) - f(q)| \leqq \delta(q) .$$

Overdækningen $\{U_p\}$ af M kan forfines til en lokalt endelig åben overdækning $\{W_p\}$ med samme indexmængde (nemlig M) med en associeret deling af enheden $\{g_p\}$.

Idet vi tænker os f_p sat lig med 0 der, hvor den ikke allerede er defineret, definerer vi funktionen $h : M \longrightarrow E^1$ ved fastsættelsen

$$h(q) = \sum_{p \in M} g_p(q) f_p(q) .$$

Da $\{W_p\}$ er lokalt endelig og $st(g_p) \subseteq W_p$ er dette en veldefineret differentiabel afbildning.

Hvis $q \in A$, er $g_p(q) = 0$ for $p \in M \setminus A$, så vi får

$$\begin{aligned} h(q) &= \sum_{p \in A} g_p(q) f_p(q) = \sum_{p \in A} g_p(q) f(q) \\ &= \sum_{p \in A} g_p(q) f(q) = f(q), \end{aligned}$$

hvilket viser, at $h|A = f|A$.

For et vilkårligt $q \in M$ har vi

$$\begin{aligned} |h(q) - f(q)| &= \Big|\sum_{p \in M} g_p(q) f_p(q) - \sum_{p \in M} g_p(q) f(q)\Big| \\ &\leq \sum_{p \in M} g_p(q) |f_p(q) - f(q)| \\ &\leq \sum_{p \in M} g_p(q)\ \delta(q) \\ &= \delta(q) , \end{aligned}$$

hvilket viser, at h er en δ-approksimation til f. Hermed er sætningen bevist.

Opgave 3. Antag, at A er en lukket delmængde af parakompakt differentiabel mangfoldighed M, og at $f : A \longrightarrow E^k$ er differentiabel.

Vis, at der findes en åben mængde U, sådan at $A \subseteq U \subseteq M$, og en differentiabel funktion $\overline{f} : U \longrightarrow E^k$, der udvider f.

Opgave 4. Lad $\xi = (E, \pi, M)$ være et differentiabelt vektorbundt over en parakompakt differentiabel mangfoldighed M og $A \subseteq M$ en lukket mængde.

Et differentiabelt tværsnit i ξ over A er en differentiabel afbildning $s : A \longrightarrow E$, sådan at $\pi s = 1_A$.

Vis, at ethvert differentiabelt tværsnit s i ξ over A kan udvides til et differentiabelt tværsnit $\overline{s}$ i ξ over M.

<u>Opgave 5</u>. Lad $\xi = (E, \pi, M)$ være et differentiabelt vektorbundt over en kompakt differentiabel mangfoldighed M. Vektorrummet af differentiable tværsnit i ξ (over M) betegnes $\Gamma(\xi)$.

Vis, at der findes et endelig dimensionalt underrum V af $\Gamma(\xi)$, sådan at der for ethvert $y \in E$ findes et tværsnit $s \in V$, for hvilket $s(\pi(y)) = y$.

Vis dernæst, at der for et tilstrækkelig stort tal N findes en bundtafbildning

$$f = (f_E, 1_M) : (M^n \times E^N, \text{proj.}, M) \longrightarrow (E, \pi, M),$$

sådan at f_E afbilder $M^n \times E^N$ <u>på</u> E.

§ 12. Integration på mangfoldigheder. Stokes' sætning.

I denne paragraf vil vi udvikle en integrationsteori for differential former på en parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed i fornødent omfang til at bevise den såkaldte Stokes' sætning. Navnet "Stokes' sætning" er i tidens løb blevet hæftet til meget mere generelle resultater end det oprindelige resultat af Stokes fra ca. 1850. Vi beviser her en moderne udgave af Stokes' sætning, der kan ses som en højere dimensional analogi til differential- og integralregningens hovedsætning. Fra denne sætning udleder man forholdsvis let den klassiske Stokes' sætning og dens følgesvende Green's sætning og divergenssætningen (også kendt som Gauss' sætning).

Integration på E^n.

I dette afsnit repeterer vi kort Riemann integralet på den bedst kendte af alle mangfoldigheder, nemlig E^n. Fremstillingen er tilpasset anvendelserne i det følgende, men indeholder kun kendte ting fra matematik 1 og 2.

Vi skal betragte begrænsede reelle funktioner $f : E^n \longrightarrow E^1$ med kompakt støtte. Hvis f og g er 2 reelle funktioner på E^n, indser man let, at

$$st(f+g) \subseteq st(f) \cup st(g)$$

og

$$st(f \cdot g) \subseteq st(f) \cap st(g).$$

Heraf slutter man, at mængden af reelle funktioner på E^n, der er begrænsede og har kompakt støtte, er en reel algebra. Betegn denne algebra med $B_c(E^n)$.

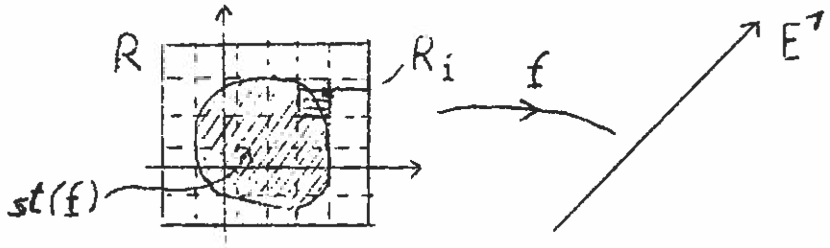
I $B_c(E^n)$ kan man udskille en klasse af funktioner, de såkaldte <u>integrable</u> (eller mere præcist Riemann integrable) funktioner på E^n. Dette kræver lidt forberedelse.

Hvis $f \in B_c(E^n)$ vælger vi et interval

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

i E^n, således at $st(f) \subseteq R$ (her benyttes, at $st(f)$ er kompakt).

En inddeling af hver af intervallerne $[a_i, b_i]$ giver et system af deleflader i R parallelle med koordinathyperplanerne, kaldet et net i R. Svarende til et net N i R får vi en inddeling af R i del-intervaller $R_1,\dots,R_{m(N)}$ af E^n. Hvis $[a_k', b_k']$ er et del-interval af $[a_k, b_k]$ ved inddelingen af $[a_k, b_k]$ $\forall k = 1,\dots,n$ har et typisk del-interval R_i hørende til nettet N formen $R_i = [a_1', b_1'] \times \dots \times [a_n', b_n']$.



Ved volumenet af R_i forstår vi tallet

$$\mathrm{vol}(R_i) = (b_1' - a_1')\cdot\ldots\cdot(b_n' - a_n').$$

Betragt endvidere tallene

$$m_i(f) = \inf f(R_i) \quad \text{og} \quad M_i(f) = \sup f(R_i)$$

for ethvert $i = 1,\dots,m(N)$.

Ved undersummen af f m.h.t. nettet N i R forstår vi nu tallet

$$\underline{S}(N,f) = \sum_{i=1}^{m(N)} m_i(f)\mathrm{vol}(R_i),$$

og ved oversummen af f m.h.t. nettet N i R tallet

$$\overline{S}(N,f) = \sum_{i=1}^{m(N)} M_i(f)\mathrm{vol}(R_i)$$

(her benyttes, at f er begrænset).

Hvis ethvert del-interval svarende til nettet N' i R er indeholdt i et del-interval svarende til nettet N i R, siger vi, at N' er en videreinddeling af N.

Hvis N' er en videreinddeling af N, indser man let, at

$$\underline{S}(N,f) \leq \underline{S}(N',f)$$

og

$$\overline{S}(N',f) \leq \overline{S}(N,f).$$

Ved at vælge en fælles videreinddeling, slutter man heraf, at

$$\underline{S}(N',f) \leq \overline{S}(N'',f)$$

for vilkårlige net N' og N'' i R.

Disse uligheder sikrer existensen af reelle tal

$$\underline{\int}_R f = \sup\{\underline{S}(N,f) \mid N \text{ net i } R\}$$

og

$$\overline{\int}_R f = \inf\{\overline{S}(N,f) \mid N \text{ net i } R\}$$

der opfylder

$$\underline{\int}_R f \leqq \overline{\int}_R f .$$

Tallene $\underline{\int}_R f$ og $\overline{\int}_R f$ afhænger kun tilsyneladende af R. Hvis R og R' er vilkårlige intervaller i E^n, således at

$$\operatorname{st}(f) \subseteqq R \quad \text{og} \quad \operatorname{st}(f) \subseteqq R'$$

kan man nemlig indse, at

$$\underline{\int}_R f = \underline{\int}_{R'} f \quad \text{og} \quad \overline{\int}_R f = \overline{\int}_{R'} f .$$

(Ved at betragte $R \cap R'$, som selv er et interval i E^n, reduceres problemet til det trivielle tilfælde $R \subseteqq R'$).

Hvis $f \in B_c(E^n)$, kan vi så definere det nedre integral af f på E^n, betegnet $\underline{\int}_{E^n} f$, og det øvre integral af f på E^n, betegnet $\overline{\int}_{E^n} f$, som tallene

$$\underline{\int}_{E^n} f = \underline{\int}_R f \quad \text{og} \quad \overline{\int}_{E^n} f = \overline{\int}_R f$$

for et vilkårligt interval R i E^n, så $\operatorname{st}(f) \subseteqq R$.

Vi siger nu, at $f \in B_c(E^n)$ er <u>integrabel</u> på E^n, hvis

$$\underline{\int}_{E^n} f = \overline{\int}_{E^n} f .$$

Hvis f er integrabel på E^n, kaldes den fælles værdi af nedre og øvre integral for integralet af f på E^n og betegnes med $\int_{E^n} f$.

En kontinuert funktion $f : E^n \longrightarrow E^1$ med kompakt støtte bliver automatisk begrænset og tilhører altså $B_c(E^n)$. Hvis

$st(f) \subseteq R$, indser man let, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et net N i R, så

$$\overline{S}(N,f) - \underline{S}(N,f) < \varepsilon$$

(benyt, at f er uniformt kontinuert på R).

Heraf følger, at enhver kontinuert funktion $f : E^n \longrightarrow E^1$ med kompakt støtte er integrabel på E^n.

Alle spørgsmål om integrabilitet i det følgende kan afgøres ved følgende kendte sætning:

Sætning 12.1. En funktion $f \in B_c(E^n)$ er integrabel (præcist: Riemann integrabel) hvis og kun hvis mængden af diskontinuitetspunkter for f har Lebesque-målet 0 i E^n.

Hvis $E^n_+ = \{(u_1,\ldots,u_n) \in E^n | u_n \geq 0\}$ vil vi f.eks. møde funktioner $f \in B_c(E^n)$, således at $f|E^n_+$ er kontinuert på E^n_+, og således, at $f(E^n \setminus E^n_+) = 0$. En sådan funktion f er integrabel på E^n, idet $E^{n-1} = \{(u_1,\ldots,u_n) \in E^n | u_n = 0\}$ har Lebesque-målet 0 i E^n.

Hvis $\mathcal{R}(E^n)$ betegner mængden af integrable funktioner på E^n, ser man let, at

$$f,g \in \mathcal{R}(E^n) \Longrightarrow \begin{cases} f + g \in \mathcal{R}(E^n) \\ f \cdot g \in \mathcal{R}(E^n) \end{cases}$$

$\mathcal{R}(E^n)$ er altså en reel algebra (del-algebra af $B_c(E^n)$).

Man kan endvidere bevise, at

$$\int_{E^n} : \mathcal{R}(E^n) \longrightarrow E^1$$

er en lineær funktional.

Hvis $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$ betegner koordinaterne i E^n, og $f \in \mathcal{R}(E^n)$, vil vi ofte benytte skrivemåden

$$\int_{E^n} f = \int_{E^n} f(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n$$

for integralet af f på E^n.

Det er velkendt, at et integral over E^n kan opløses i en række linieintegraler (integraler over E^1). Hvis alle indgående integraler existerer, gælder der, at

$$\int_{E^n} f(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n$$
$$= \int_{E^1} (\dots \int_{E^1} (\int_{E^1} f(u_1,\dots,u_n)du_1)du_2\dots)du_n .$$

Ovenstående integrationsteori på E^n giver straks en tilsvarende teori på enhver åben delmængde O af E^n.

Hvis O er en åben delmængde af E^n, betegner $B_c(O)$ mængden af begrænsede funktioner $f : O \longrightarrow E^1$ med kompakt støtte i O. Vi siger nu, at en funktion $f \in B_c(O)$ er integrabel på O, hvis den trivielle udvidelse $\tilde{f} : E^n \longrightarrow E^1$ af f med $\tilde{f}(E^n \setminus O) = 0$ er integrabel på E^n. Mængden af integrable funktioner på O er klart en reel algebra. Vi vil betegne denne algebra med $\mathfrak{R}(O)$. Hvis $f \in \mathfrak{R}(O)$ vil vi ved integralet af f over O forstå tallet

$$\int_O f = \int_{E^n} \tilde{f} .$$

Vi vil også her bruge betegnelser som

$$\int_O f = \int_O f(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n .$$

Vi nævner nu til sidst uden bevis transformationssætningen for integraler. Denne sætning spiller en væsentlig rolle i det følgende. Et bevis for sætningen kan f.eks. findes i Rudin: "Real and complex analysis" (Thm. 8.26(e) p. 173), eller Spivak: "Calculus on Manifolds" (Thm. 3-13 p. 67).

Sætning 12.2. Lad $F : O_1 \longrightarrow O_2$ være en diffeomorfi mellem åbne delmængder af E^n. Lad endvidere $J_F : O_1 \longrightarrow E^1$ være den funktion, hvor $J_F(p)$ for $p \in O_1$ er determinanten af jacobiantmatricen (matricen af første ordens partielle afledede) for F i p. Så gælder:

Hvis $f : O_2 \longrightarrow E^1$ er integrabel på O_2, er $(f\circ F)\cdot|J_F|$ integrabel på O_1, og

$$\int_{O_2} f = \int_{O_1} (f\circ F)\cdot|J_F| .$$

Bemærkning. Vi understreger definitionen af J_F : Hvis $(u_1,\dots,u_n) \in O_1$ betegner koordinaterne i O_1 er

$$J_F(p) = \det\left\{\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(p)\right\} \quad \forall p \in O_1 \quad .$$

Vi bemærker endvidere, at ifølge sætningen om inverse funktioner er betingelsen "F er en diffeomorfi" ækvivalent med, at F er differentiabel, 1-1-tydig og har $J_F(p) \neq 0$ $\forall p \in O_1$.

Integration af differential former.

I det følgende er M^n en n-dimensional, parakompakt differentiabel mangfoldighed. M er altså specielt altid et Hausdorff rum.

Vi skal betragte differential former med kompakt støtte.

Definition 12.3. Hvis $\omega \in \mathscr{D}^r(M)$ er en differential form af grad r på M, vil vi ved støtten for ω forstå den lukkede mængde

$$st(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}} \ .$$

Bemærk, at for $f \in \mathscr{D}^o(M)$ stemmer denne definition overens med den tidligere definition af støtten for en funktion.

Mængden af differential former af grad r på M med kompakt støtte vil vi betegne med $\mathscr{D}^r_c(M)$.

Lemma 12.4. Om differential former på M med kompakt støtte gælder:

a) $\omega, \omega' \in \mathscr{D}^r_c(M) \Longrightarrow \omega + \omega' \in \mathscr{D}^r_c(M)$

b) $\omega \in \mathscr{D}^r_c(M)$ og $\omega' \in \mathscr{D}^s_c(M) \Longrightarrow \omega \wedge \omega' \in \mathscr{D}^{r+s}_c(M)$

c) $\omega \in \mathscr{D}^r_c(M) \Longrightarrow d\omega \in \mathscr{D}^{r+1}_c(M)$.

Disse påstande følger af:

a') $st(\omega+\omega') \subseteq st(\omega) \cup st(\omega')$

b') $st(\omega\wedge\omega') \subseteq st(\omega) \cap st(\omega')$

c') $st(d\omega) \subseteq st(\omega)$.

Bevis. At a'), b') og c') medfører a), b) og c), følger af, at en lukket delmængde af et kompakt topologisk rum selv er kompakt.

a') og b') følger let ved at benytte, at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ og $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ for vilkårlige delmængder A og B af M.

Vi beviser nu c'):

Betragt den åbne mængde $U = M \setminus st(\omega)$. Så vil $\omega|U = 0$. Ifølge lemma 8.8 får vi så

$$d\omega|U = d_U(\omega|U) = 0 .$$

Heraf følger, at

$$\{p \in M | (d\omega)_p \neq 0\} \subseteq M \setminus U = st(\omega).$$

Da $st(\omega)$ er lukket, medfører dette, at $st(d\omega) \subseteq st(\omega)$.

Dermed er lemma 12.4 bevist.

Bemærkning. a) medfører, at $\mathcal{D}_c^r(M)$ er et underrum i vektorrummet $\mathcal{D}^r(M)$ $\forall r = 0,1,\dots$. Sammen med b) bevirker dette, at

$$\mathcal{D}_c(M) = \mathcal{D}_c^c(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_c^n(M)$$

er en gradueret del-algebra af den graduerede reelle algebra $\mathcal{D}(M)$. Tages yderligere c) med, ser vi, at indholdet i lemma 12.4 er udtrykt i: $\mathcal{D}_c(M)$ er en differentielt gradueret del-algebra af den differentielt graduerede reelle algebra $\mathcal{D}(M)$.

Opgave 1. Vis, at algebraen $\mathcal{D}_c(M)$ er et ideal i algebraen $\mathcal{D}(M)$.

Exempel 12.5. Betragt E^n med sædvanlige koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$.

En n-form $\omega \in \mathcal{D}_c^n(E^n)$ har så en entydig fremstilling

$$\omega = a\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n ,$$

hvor $a : E^n \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion med kompakt støtte.

Vi definerer så integralet af ω over E^n, betegnet $\int_{E^n}\omega$, ved fastsættelsen:

$$\int_{E^n}\omega = \int_{E^n} a(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n ,$$

hvor det sidste integral er det sædvanlige Riemann integral.

Exempel 12.5 slut !

Ved hjælp af de "lokale" integraler i ovenstående exempel kan man konstruere et integral på en parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed. Vi registrerer dette i følgende existens og entydighedssætning:

Sætning 12.6. Lad M være en n-dimensional parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed. $n \geq 1$

Så findes et entydig bestemt lineær funktional

$$\int_M : \mathcal{D}^n_c(M) \longrightarrow E^1 ,$$

hvor værdien af $\int_M$ på $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ betegnes $\int_M \omega$ og kaldes integralet af ω over M, der opfylder følgende betingelse :

Hvis støtten for $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ er indeholdt i billedet af et positivt orienteret kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$, og $a : D \longrightarrow E^1$ er den entydigt bestemte reelle differentiable funktion, så

$$\omega(\underline{x}(u_1,\ldots,u_n)) = a(u_1,\ldots,u_n)du_1 \wedge \ldots \wedge du_n(u_1,\ldots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\ldots,u_n) \in D$, skal

$$\int_M \omega = \int_D a(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n .$$

Bevis. Da M er parakompakt, kan vi finde en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med $\alpha \in I$, hvor $U_\alpha = \underline{x}_\alpha(D_\alpha)$ for et kort $\underline{x}_\alpha$ på M med koordinater $(u_1^\alpha,\ldots,u_n^\alpha) \in D_\alpha \subseteq E^n$ $\forall \alpha \in I$.

Da M er orienteret, kan vi uden indskrænkning antage, at kortene $\underline{x}_\alpha$ er positivt orienterede (se beviset for lemma 10.9).

Lad endvidere $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ være en deling af enheden associeret med $\mathcal{U}$.

Entydighed af $\int_M$.

Påstand: Hvis $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ vil $st(\omega) \cap U_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange $\alpha \in I$.

Bevis: Da $\mathcal{U}$ er lokalt endelig findes omkring ethvert $p \in st(\omega)$ en åben omegn N_p, så $N_p \cap U_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange $\alpha \in I$. Idet $st(\omega)$ er kompakt, kan den overdækkes med endelig mange åbne mængder af typen N_p. Da hver af disse højst skærer endeligt mange U_α , kan $\mathrm{st}(\omega)$ højst skære endeligt mange U_α , og påstanden er bevist.

Betragt nu $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$. Da

$$\mathrm{st}(f_\alpha \omega) \subseteq \mathrm{st}(f_\alpha) \cap \mathrm{st}(\omega) \subseteq U_\alpha \cap \mathrm{st}(\omega)$$

følger det fra ovenstående påstand, at højst endeligt mange led i summen

$$\omega = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha \omega \qquad \left(\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = 1\right)$$

er forskellig fra nul-formen.

Benyttes så lineariteten af $\int_M$ får vi:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_M f_\alpha \omega .$$

Idet $\mathrm{st}(f_\alpha \omega) \subseteq U_\alpha = \underline{x}_\alpha(D_\alpha)$ giver betingelsen på integralet, at

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_{D_\alpha} a^\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) du_1^\alpha \ldots du_n^\alpha \quad ,$$

hvor $f_\alpha \omega | \underline{x}_\alpha(D_\alpha) = a^\alpha du_1^\alpha \wedge \ldots \wedge du_n^\alpha$ er koordinatfremstillingen af $f_\alpha \omega \quad \forall \alpha \in I$.

Dette beviser, at $\int_M \omega$ kan udtrykkes entydigt som en sum af Riemann integraler.

Heraf følger, at et eventuelt lineært funktional $\int_M$ er entydigt bestemt.

<u>Existens af $\int_M$</u>.

Hvis $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$, og

$$f_\alpha \omega | \underline{x}_\alpha(D_\alpha) = a^\alpha du_1^\alpha \wedge \ldots \wedge du_n^\alpha \qquad \forall \alpha \in I$$

er vi tvunget til definitionen

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_{D_\alpha} a^\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) du_1^\alpha \ldots du_n^\alpha .$$

Det er klart, at vi ved denne definition får et lineært funktional

$$\int_M : \mathcal{D}^n_c(M) \longrightarrow E^1 .$$

Vi skal derfor blot indse, at $\int_M$ opfylder betingelsen i sætningen.

Lad dertil $\underline{x}$ være et positivt orienteret kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$, og antag, at $\mathrm{st}(\omega) \subseteq \underline{x}(D)$ for $\omega \in \mathscr{D}^n_c(M)$.

Pr. definition får vi så:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in I} \int_{D_\alpha} a^\alpha(u_1^\alpha,\ldots,u_n^\alpha)du_1^\alpha\ldots du_n^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \int_{D'_\alpha} a^\alpha(u_1^\alpha,\ldots,u_n^\alpha)du_1^\alpha\ldots du_n^\alpha ,$$

hvor $D'_\alpha = \underline{x}_\alpha^{-1}(\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \underline{x}(D))$.

I sidste lighedstegn har vi benyttet, at

$$\mathrm{st}(f_\alpha\omega) \subseteq \mathrm{st}(f_\alpha) \cap \mathrm{st}(\omega) \subseteq \underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \underline{x}(D) .$$

Hvis vi sætter

$$D(\alpha) = \underline{x}^{-1}(\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \underline{x}(D))$$

og udnytter transformationssætningen (sætning 12.2) på diffeomorfien $\underline{x}_\alpha^{-1}\underline{x} : D(\alpha) \longrightarrow D'_\alpha$, får vi:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in I} \int_{D(\alpha)} a^\alpha \circ \underline{x}_\alpha^{-1} \underline{x}(u_1,\ldots,u_n)\cdot \det\left\{\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u_j}\right\} du_1\ldots du_n.$$

Vi har benyttet, at

$$|J_{\underline{x}_\alpha^{-1}\underline{x}}| = J_{\underline{x}_\alpha^{-1}\underline{x}} = \det\left\{\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u_j}\right\}: \quad D(\alpha) \longrightarrow E^1 .$$

Dette er rigtigt, fordi $\underline{x}_\alpha$ og $\underline{x}$ begge er positivt orienterede kort.

Vi observerer nu, at

$$f_\alpha\omega|\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \underline{x}(D)$$
$$= a^\alpha du_1^\alpha \wedge \ldots \wedge du_n^\alpha$$
$$= (a^\alpha \circ \underline{x}_\alpha^{-1}\underline{x})\cdot \det\left\{\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u_j}\right\} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n .$$

Hvis

$$\omega|\underline{x}(D) = a\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

får vi

$$f_\alpha \omega \mid \underline{x}(D) = (f_\alpha \underline{x}) \cdot a \; du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \; .$$

Af ovenstående følger, at

$$(a^\alpha \circ \underline{x}_\alpha^{-1} \underline{x}) \cdot \det\left\{ \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u_j} \right\} = (f_\alpha \underline{x}) \cdot a \quad \text{på} \quad D(\alpha) \; .$$

Indsættes dette i det sidste udtryk for integralet $\int_M \omega$ fås:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_{D(\alpha)} (f_\alpha \underline{x}) \cdot a = \sum_{\alpha \in I} \int_D (f_\alpha \underline{x}) \cdot a \; .$$

Det sidste lighedstegn skyldes igen, at $\operatorname{st}(f_\alpha \omega) \subseteq \underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \underline{x}(D)$.

Når vi nu benytter, at $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = 1$, får vi så:

$$\int_M \omega = \int_D \Big(\sum_{\in I} f_\alpha \Big) \underline{x} \cdot a$$

$$= \int_D a(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n \; .$$

Dette viser, at betingelsen i sætningen er opfyldt, og vi har dermed påvist existensen af et lineært funktional $\int_M$ som ønsket.

Dette afslutter beviset for sætning 12.6.

Ud fra integralet af differential former kan man definere et integral af reelle differentiable funktioner med kompakt støtte på en orienteret, parakompakt Riemann'sk mangfoldighed.

<u>Definition 12.7</u>. Lad M^n være en orienteret, parakompakt Riemann'sk mangfoldighed med Riemann'sk volumen mål dV.

<u>Integralet</u> af $f \in \mathcal{D}_c^0(M)$ <u>over M</u>, betegnet $\int_M f$, defineres som integralet af $f \cdot dV \in \mathcal{D}_c^n(M)$ over M. Pr. definition har vi altså:

$$\int_M f = \int_M f \cdot dV \; .$$

<u>Bemærkning</u>. Betingelsen parakompakt på M er overflødig, da man kan bevise, at enhver Riemann'sk mangfoldighed er parakompakt. Vi medtager betingelsen, fordi vi ikke har bevist denne sætning.

Integralet i definition 12.7 givet et positivt lineært funktional i følgende forstand:

Sætning 12.8. Lad M være en orienteret, parakompakt Riemann'sk mangfoldighed. Så er

$$\int_M : \mathcal{D}_c^0(M) \longrightarrow E^1$$

et lineært funktional med følgende egenskab:

Hvis $f \geqq 0$ og $f \neq 0$ for $f \in \mathcal{D}_c^0(M)$, er $\int_M f > 0$.

Bevis. Lad dV være det Riemann'ske volumen mål på M. Da tilordningen

$$f \in \mathcal{D}_c^0(M) \rightsquigarrow f \cdot dV \in \mathcal{D}_c^n(M)$$

er lineær, og integralet af differential former er lineær, er det klart, at $\int_M : \mathcal{D}_c^0(M) \longrightarrow E^1$ bliver en lineær funktional.

Lad dernæst $f \in \mathcal{D}_c^0(M)$, hvor $f \geqq 0$ og $f \neq 0$, være givet.

Vælg en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af M med $\alpha \in I$, så $U_\alpha = \underline{x}_\alpha(D_\alpha)$ for et positivt orienteret kort $\underline{x}_\alpha$ med koordinater $(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha) \in D_\alpha \subseteq E^n$ $\forall \alpha \in I$, og lad $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ være en deling af enheden associeret med $\mathcal{U}$.

Da

$$dV|\underline{x}_\alpha(D_\alpha) = \sqrt{G_\alpha}\; du_1^\alpha \wedge \dots \wedge du_n^\alpha ,$$

hvor $G_\alpha > 0$ er determinanten af matricen, der beskriver den Riemann'ske metrik på M over $\underline{x}_\alpha(D_\alpha)$, får vi:

$$\int_M f = \int_M f \cdot dV = \sum_{\alpha \in I} \int_M f_\alpha \cdot f \cdot dV$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \int_{D_\alpha} (f_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G_\alpha})(\underline{x}_\alpha(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha))du_1^\alpha \dots du_n^\alpha .$$

Enhver af de ovenstående Riemann integraler er ikke-negativ, fordi $f_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G_\alpha} \geqq 0$ $\forall \alpha \in I$. Da $f \neq 0$ og $\forall p \in M \; \exists \alpha \in I$: $f_\alpha(p) \neq 0$, må der endvidere findes mindst et $\alpha \in I$, så $f_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G_\alpha} \neq 0$. For et sådant α vil det pågældende integral være > 0, fordi $f_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G_\alpha}$ er kontinuert. Det følger så, at $\int_M f > 0$.

Dette afslutter beviset.

Exempel 12.9. Betragt E^n med sædvanlige koordinater $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, sædvanlig orientering og Riemann'sk metrik.

Det Riemann'ske volumen mål på E^n er så netop

$$dV = du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \quad .$$

Hvis $f \in \mathcal{D}^o_c(E^n)$, er integralet af f over den orienterede, parakompakte Riemann'ske mangfoldighed E^n, som defineret i 12.7, netop det sædvanlige Riemann integral af f over E^n. Altså:

$$\int_{E^n} f = \int_{E^n} f\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$
$$= \int_{E^n} f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n \quad .$$

Exempel 12.9 slut !

Bemærkning. Lad M være en orienteret parakompakt Riemann'sk mangfoldighed, og lad $\mathcal{C}_c(M)$ betegne mængden af kontinuerte reelle funktioner med kompakt støtte på M. Ved ganske den samme fremgangsmåde som i definition 12.7 (subsidiært sætning 12.6) kan man definere et integral $\int_M f$ af $f \in \mathcal{C}_c(M)$. Man får her igen et positivt lineært funktional (sætning 12.8)

$$\int_M : \mathcal{C}_c(M) \longrightarrow E^1 \; .$$

En generel sætning fra mål- og integralteorien (Riesz' Repræsentations sætning) siger nu, at der findes et entydigt bestemt positivt Borel mål μ på M, som repræsenterer $\int_M$, d.v.s. så $\int_M f$ for $f \in \mathcal{C}_c(M)$ er integralet af f m.h.t. μ. Man kan så udvide $\int_M$ fra $\mathcal{C}_c(M)$ til en større klasse af reelle funktioner på M, de såkaldte integrable funktioner på M m.h.t. μ, man kan tale om målelige funktioner på M m.h.t. μ, indføre L^p-rum o.s.v.

Vi skal ikke her komme nærmere ind på dette.

Opgave 2. Lad $F : M_1^n \longrightarrow M_2^n$ være en orienteringsbevarende diffeomorfi mellem orienterede, parakompakte differentiable mangfoldigheder. Vis, at

$$\int_{M_1} F^*(\omega) = \int_{M_2} \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}^n_c(M_2) \; .$$

Opgave 3. Lad M_1^n og M_2^n være orienterede, parakompakte Riemann'ske mangfoldigheder med Riemann'ske volumen mål dV_1 og dV_2 henholdsvis. Lad endvidere $F : M_1 \longrightarrow M_2$ være en orienteringsbevarende isometri. Vis, at

$$\int_{M_1} f \circ F = \int_{M_2} f \qquad \forall f \in \mathscr{D}_c^o(M_2) .$$

Opgave 4. Lad G være en Lie-gruppe. Hvis $a \in G$, og $f : G \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, vil vi ved venstre translationen af f med a forstå den differentiable funktion $l_a(f) = f \circ L_{a^{-1}}$.

Vis, at hvis $f \in \mathscr{D}_c^o(G)$ vil $l_a(f) \in \mathscr{D}_c^o(G)$.

Vis, at der findes et lineært funktional

$$I : \mathscr{D}_c^o(G) \longrightarrow E^1$$

med egenskaberne:

1) $f \in \mathscr{D}_c^o(G)$, $f \geqq 0$, $f \not\equiv 0 \Longrightarrow I(f) > 0$

2) $f \in \mathscr{D}_c^o(G)$, $a \in G \Longrightarrow I(l_a(f)) = I(f)$.

Et sådant venstre invariant((2)), positivt((1)) lineært funktional I kaldes et Haar integral på G.

Områder med regulær rand.

Definition 12.1o. Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed. En lukket, ikke-tom delmængde A af M siges at være et område med regulær rand, hvis ethvert punkt $p \in A$ har en af følgende egenskaber:

1) $p \in \operatorname{int} A$

2) Der findes et kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$, således at $0 \in D$, $\underline{x}(0) = p$ og

$$\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E_+^n$$

hvor $E_+^n = \{(u_1,\dots,u_n) \in E^n | u_n \geqq 0\}$.

Vi bemærker først, at da $\operatorname{int} A$ er en åben delmængde, kan vi til ethvert $p \in \operatorname{int} A$ finde et kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$, så $0 \in D$, $\underline{x}(0) = p$ og $\underline{x}(D) \subseteq \operatorname{int} A$.

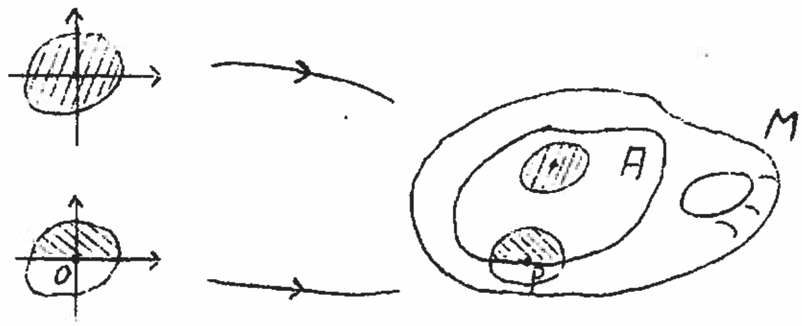


Fig. 24

Da koordinatskift på M foregår ved diffeomorfier (specielt homeomorfier) mellem åbne delmængder af E^n, indser man let, at egenskaberne 1) og 2) gensidigt udelukker hinanden (overvej dette).

Punkter af type 1) kaldes <u>indre punkter</u> i A, og punkter af type 2) <u>randpunkter</u> for A. Dette stemmer overens med de topologiske begreber.

Samlingen af randpunkter for A kaldes <u>randen af A</u> og betegnes med ∂A.

Det er let at se, at der findes områder med regulær rand. Enhver differentiabel mangfoldighed er nemlig et område med regulær rand i sig selv. Her er randen blot tom.

I mange tilfælde kan man let afgøre, at en forelagt delmængde af en differentiabel mangfoldighed er et område med regulær rand heri ved hjælp af følgende lemma:

<u>Lemma 12.11</u>. Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed, og lad $F : M \longrightarrow E^1$ være en differentiabel afbildning.

Hvis $a \in E^1$ opfylder

i) $F^{-1}(\,]-\infty,a[\,) \neq 0$

og såfremt $F^{-1}(a) \neq 0$ yderligere

ii) $rg_p F = 1 \quad \forall p \in F^{-1}(a)$,

så er $M^a = F^{-1}(\,]-\infty,a]\,)$ et område med regulær rand i M, og $\partial M^a = F^{-1}(a)$.

<u>Bevis</u>. Da F er differentiabel (specielt kontinuert), og $]-\infty,a]$ er en lukket delmængde af E^1, er M^a en lukket delmængde af M. På grund af i) er $M^a \neq \emptyset$.

Hvis $F^{-1}(a) = \emptyset$ består M^a udelukkende af indre punkter, fordi $F^{-1}(]-\infty,a[)$ er en åben delmængde af M. I dette tilfælde er M^a derfor klart et område med regulær rand i M.

Antag nu, at $F^{-1}(a) \neq \emptyset$, og betragt $p \in F^{-1}(a)$. Følgende påstand vil vise, at p er et randpunkt for M^a.

Påstand: Der findes et kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$, så $0 \in D$, $\underline{x}(0) = p$ og $F\underline{x}(u_1,\ldots,u_n) = a - u_n$.

Hvis påstanden er rigtig, ser vi, at $\underline{x}$ giver et kort omkring $p \in M^a$ af type 2) i definition 12.1o (overvej dette).

Bevis for påstand: Betragt et kort $\underline{y}$ på M med koordinater i $E \subseteq E^n$, så $0 \in E$ og $\underline{y}(0) = p$. Betragt endvidere diffeomorfien $h : E^1 \longrightarrow E^1$ defineret ved fastsættelsen $h(t) = -t + a \quad \forall t \in E^1$. Da $rg_pF = 1$ er $rg_0(hF\underline{y}) = 1$. Idet $hF\underline{y}(0) = 0$ findes så ifølge sætning 3.14 en diffeomorfi G fra en åben omegn D af $0 \in E^n$ med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$ til en åben omegn af $0 \in E \subseteq E^n$, således at $hF\underline{y}G(u_1,\ldots,u_n) = u_n$. Hvis vi nu betragter kortet $\underline{x} = \underline{y}G$ på M, og benytter definitionen af h, ser vi, at $\underline{x}$ er et kort som ønsket. Dermed er påstanden bevist.

Da $F^{-1}(]-\infty,a[)$ er en åben delmængde af M, følger det så, at M^a er et område med regulær rand i M, og at $\partial M^a = F^{-1}(a)$.

Dermed er lemma 12.11 bevist.

Exempel 12.12. Betragt E^n med sædvanlige koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$.

Enheds-kuglen i E^n defineres som punktmængden:

$$B^n = \{(u_1,\ldots,u_n) \in E^n | u_1^2+\ldots+u_n^2 \leq 1\} .$$

Når $S^{n-1} = \{(u_1,\ldots,u_n) \in E^n | u_1^2+\ldots+u_n^2 = 1\}$ som sædvanlig betegner enheds-sfæren i E^n, ser man let, at B^n er et område med regulær rand i E^n, og at $\partial B^n = S^{n-1}$. Man anvender blot lemma 12.11 på funktionen $F : E^n \longrightarrow E^1$ defineret ved fastsættelsen $F(u_1,\ldots,u_n) = u_1^2+\ldots+u_n^2$.

Exempel 12.12 slut !

Sætning 12.13. Lad M^n være en differentiabel mangfoldighed. Så gælder:

Hvis A er et område med regulær rand i M, er ∂A en $(n-1)$dim. del-mangfoldighed af M.

Hvis M er parakompakt, er ∂A parakompakt, og hvis yderligere M er orienterbar, er ∂A orienterbar.

Bevis. Lad $p \in \partial A$, og lad $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$, så $0 \in D$, $\underline{x}(0) = p$ og $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E^n_+$. Hvis $n=1$, er sætningen triviel, så vi antager, at $n > 1$.

Påstand: $\underline{x}(D \cap E^{n-1}) \subseteq \partial A$, hvor $E^{n-1} \subseteq E^n$ er indlagt som hyperplanen $u_n = 0$.

Bevis: Hvis $q = \underline{x}(u_1',\ldots,u_{n-1}',0)$ er givet, betragter vi den åbne delmængde D' af E^n, der fremkommer ved at parallelforskyde D med vektoren $-(u_1',\ldots,u_{n-1}',0)$. Vi har altså

$$D' = D - (u_1',\ldots,u_{n-1}',0) .$$

Definer så $\underline{x}' : D' \longrightarrow M$ ved fastsættelsen:

$$\underline{x}'(v_1,\ldots,v_n) = \underline{x}(v_1+u_1',\ldots,v_{n-1}+u_{n-1}',v_n)$$

for ethvert $(v_1,\ldots,v_n) \in D'$.

Pr. konstruktion er $\underline{x}'$ nu et kort på M med koordinater $(v_1,\ldots,v_n) \in D'$, således at $0 \in D'$, $\underline{x}'(0) = \underline{x}(u_1',\ldots,u_{n-1}',0) = q$, og således at

$$\underline{x}'^{-1}(\underline{x}'(D') \cap A) = D' \cap E^n_+ \qquad \text{(overvej dette).}$$

Pr. definition er q derfor et randpunkt for A, og påstanden er bevist.

Af påstanden følger, at $\underline{x}|D \cap E^{n-1}$ giver et arvet koordinatsystem på ∂A. Da vi kan overdække ∂A med sådanne koordinatsystemer, følger det, at ∂A er en del-mangfoldighed af M.

Da A er lukket i M, og $\partial A = M \setminus (\operatorname{int} A \cup \complement A)$ er ∂A en lukket delmængde af M. Hvis M er parakompakt, er ∂A derfor også parakompakt (App. 3 opgave 1).

Antag nu, at M er parakompakt og orienterbar.

Vælg en orientering af M. Vi kan så finde et system af positivt orienterede kort $\underline{x} : D \subseteq E^n \longrightarrow M$ på M, så $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E^n_+$, og som overdækker ∂A (sammenlign med lemma 10.9). Lad nu $\underline{x}$ og $\underline{y}$ være 2 kort i dette system med koordinater henholdsvis $(u_1,\ldots,u_n) \in D \subseteq E^n$ og $(v_1,\ldots,v_n) \in E \subseteq E^n$, og antag, at $\underline{x}(D \cap E^{n-1}) \cap \underline{y}(E \cap E^{n-1}) \neq \emptyset$. Vi ønsker at vise, at de arvede kort $\underline{x}|D \cap E^{n-1}$ og $\underline{y}|E \cap E^{n-1}$ på ∂A overlapper positivt. Da ∂A er parakompakt, vil dette bevise, at ∂A er orienterbar (sætning 11.5).

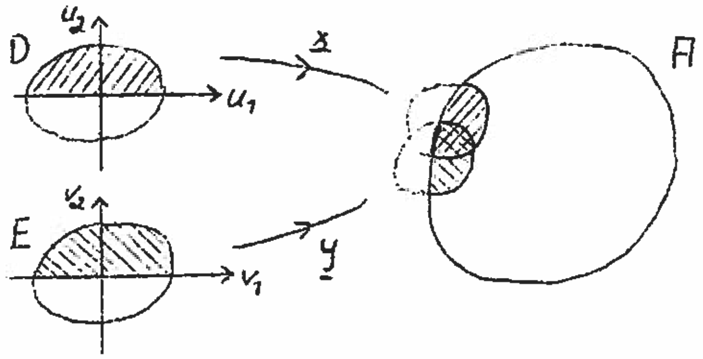


Fig. 25

Vi ønsker altså at vise, at

$$\det\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{i,j=1,\ldots,n-1} > 0 \quad \text{for} \quad u_n = 0 .$$

For $u_n = 0$ er $\dfrac{\partial v_n}{\partial u_1} = \ldots = \dfrac{\partial v_n}{\partial u_{n-1}} = 0$, fordi $\underline{y}^{-1}\underline{x}$ afbilder randpunkter i E^n_+ på randpunkter i E^n_+. Vi bemærker endvidere, at $\dfrac{\partial v_n}{\partial u_n} \geqq 0$ for $u_n = 0$, fordi $v_n \geqq 0$ når $u_n \geqq 0$ (i begge tilfælde beskrives nemlig punkter i A). Overvej disse påstande.

Da kortene $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er positivt orienterede, giver lemma 11.4:

$$\det\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{i,j=1,\ldots,n} > 0 .$$

For $u_n = 0$ har vi så

$$0 < \det\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{i,j=1,\dots,n} = \left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial v_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{\partial v_n}{\partial u_n} \end{array}\right|$$

$$= \det\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{i,j=1,\dots,n-1} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial u_n} .$$

Heraf sluttes dels, at $\frac{\partial v_n}{\partial u_n} > 0$, og dels, hvad vi ønsker at vise, nemlig

$$\det\left\{\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right\}_{i,j=1,\dots,n-1} > 0 .$$

Som nævnt viser dette, at ∂A er orienterbar.

Dette afslutter beviset for sætning 12.13.

Orienterings-konvention. Lad A være et område med regulær rand i en parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed M^n.

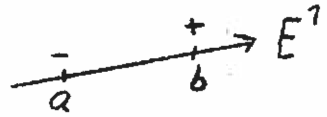
Orienteringen af M fastlægger en orientering af ∂A, den såkaldte inducerede orientering af ∂A, på følgende måde: $(n>1)$

Lad $\underline{x}$ være et kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$, således at $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E^n_+$. Hvis $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ er en positiv n-form over $\underline{x}(D)$ ($\underline{x}$ positivt orienteret kort på M), skal $(-1)^n\, du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$ være en positiv $(n-1)$-form over $\underline{x}(D \cap E^{n-1}) \subseteq \partial A$. Eller ækvivalent: Hvis $\{\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n}\}$ giver en positiv basis i alle tangentrum for M over $\underline{x}(D)$, skal $\{\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n-1}}\}$ være en basis med fortegn $(-1)^n$ i alle tangentrum for ∂A over $\underline{x}(D \cap E^{n-1})$.

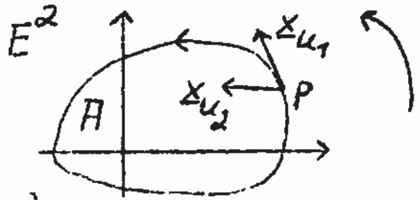
Da kort af typen $\underline{x}$ på M, som beskrevet ovenfor, giver et positivt overlappende atlas af kort $\underline{x}|D \cap E^{n-1}$ på ∂A (bevist i sætning 12.13), viser bemærkningen efter sætning 11.5 (p. 205), at vi virkelig får fastlagt en orientering af ∂A ved ovenstående vedtægt.

Exempel 12.14. I dette exempel belyser vi orienteringskonventionen ved at betragte et område med regulær rand A i E^n for $n = 1,2,3$. Vi benytter her den geometriske fortolkning af standard orienteringen på E^n for $n = 1,2,3$ givet i § 10 opgave 4.

$\underline{E^1}$. Et område med regulær rand i E^1 kan f.eks. være et lukket interval $A = [a,b]$. Vi tillægger her punktet a orienteringen $-$ og punktet b orienteringen $+$. En begrundelse herfor ligger i, at $u_1 \rightsquigarrow a + u_1$ giver et positivt orienteret kort på E^1 og $u_1 \rightsquigarrow b - u_1$ et negativt orienteret kort på E^1. Bemærk endvidere, at $(-1)^1 = -1$.

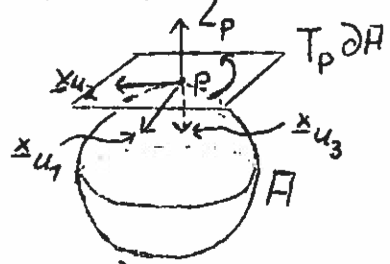


$\underline{E^2}$. ∂A bliver her en kurve i planen. En orientering af ∂A svarer derfor til et valg af positiv gennemløbsretning. Når ∂A gives den inducerede orientering fra E^2, vil en bilist, der gennemkører ∂A i positiv gennemløbsretning, hele tiden have A på venstre hånd.



Da $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}\}$ er en positiv basis i T_pE^2 og $(-1)^2 = 1$, er $\underline{x}_{u_1}$ en positiv basisvektor i $T_p\partial A$.

$\underline{E^3}$. ∂A bliver her en flade i rummet. En orientering af ∂A svarer så til et valg af positiv omløbsretning i hver tangentplan for ∂A. Når ∂A gives den inducerede orientering fra E^3, bliver den positive omløbsretning i en tangentplan for ∂A netop den, der ved "supplering" med den udadrettede normal til ∂A (den normal, der løber ud af A) danner en højre-skrue i rummet.



Da $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}, \underline{x}_{u_3}\}$ er en positiv basis i T_pE^3 og $(-1)^3 = -1$, er $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}\}$ en negativ basis i $T_p\partial A$.

Exempel 12.14 slut !

Vi skal nu se på muligheden for at integrere over et område med regulær rand. Der gælder her følgende existens- og entydighedssætning:

Sætning 12.15. Lad M være en n-dimensional parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed, og lad A være et område med regulær rand i M.

Så findes en entydig bestemt lineær funktional

$$\int_A : \mathcal{D}^n_c(M) \longrightarrow E^1 ,$$

hvor værdien af $\int_A$ på $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ betegnes $\int_A \omega$ og kaldes <u>integralet</u> af ω <u>over A</u>, der opfylder følgende betingelse:

Hvis støtten for $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ er indeholdt i billedet af et positivt orienteret kort $\underline{x}$ på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$, og $a : D \longrightarrow E^1$ er den entydigt bestemte reelle differentiable funktion, så

$$\omega(\underline{x}(u_1,\dots,u_n)) = a(u_1,\dots,u_n)du_1\wedge \dots \wedge du_n(u_1,\dots,u_n)$$

for ethvert $(u_1,\dots,u_n) \in D$, skal

$$\int_A \omega = \int_D (\chi_A \circ \underline{x})\cdot a(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n .$$

Notation. χ_A er den karakteristiske funktion for A, d.v.s.

$$\chi_A(p) = \begin{cases} 1 & \text{for } p \in A \\ 0 & \text{for } p \in M \setminus A \end{cases}$$

Bevis. Hvis vi kan påvise, at funktionerne af typen $(\chi_A \circ \underline{x})\cdot a$ virkelig er Riemann integrable på D, så definitionen af $\int_A \omega$ for $st(\omega) \subseteq \underline{x}(D)$ har mening, behøver vi kun at bemærke, at beviset for sætning 12.6 går uændret over. I stedet for $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ skal vi blot betragte n-formen $\chi_A \cdot \omega$ på M. Forstået ret, vil vi så faktisk have $\int_A \omega = \int_M \chi_A \cdot \omega$.

Med hensyn til integrabiliteten af $(\chi_A \circ \underline{x})\cdot a$ bemærker vi, at der kun er problemer, når $\underline{x}(D) \cap \partial A \neq \emptyset$. Hvis $\underline{x}$ er et kort på M, så $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E^n_+$, ser vi, at eventuelle diskontinuitetspunkter for $(\chi_A \circ \underline{x})\cdot a$ er indeholdt i $D \cap E^{n-1}$, der har Lebesque-mål 0 i E^n. I dette tilfælde er der altså intet problem (sætning 12.1). I det generelle tilfælde benytter vi, at koordinatskiftene på M afbilder mængder med Lebesque-mål 0 i E^n på mængder med Lebesque-mål 0 i E^n til at slutte, at diskontinuitetspunkterne for $(\chi_A \circ \underline{x})\cdot a$ har Lebesque-målet 0 i E^n. Se opgaverne 5 og 6 for nærmere vejledning.

Dette afslutter beviset for sætning 12.15.

Ved beregning af et konkret integral vil det i de færreste tilfælde være muligt at foretage denne ved at splitte integralet op over koordinatomegne ved hjælp af en deling af enheden som i beviset for sætning 12.6. Det kan her være nyttigt at kende følgende sætning:

Sætning 12.16. Lad M^n være en parakompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed, og antag, at $A_1,\dots,A_k$ er områder med regulær rand i M, således at

i) $M = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

og

ii) $\operatorname{int} A_i \cap \operatorname{int} A_j = \emptyset$ for $i \neq j$.

Så er

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}^n_c(M) .$$

Bevis. Pr. definition af integralerne skal vi blot vise, at

$$\int_D a(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n = \sum_{i=1}^{k} \int_D (\chi_{A_i} \circ \underline{x})\cdot a(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n$$

hvor a er koordinatfunktionen for $\omega \in \mathcal{D}^n_c(M)$ med hensyn til et kort $\underline{x}$ på M, så $\operatorname{st}(\omega) \subseteq \underline{x}(D)$.

Da $\underline{x}^{-1}(A_i \cap A_j)$ for $i \neq j$ har Lebesque-mål 0 i E^n (ses ved hjælp af opgave 5), er dette kendt fra mål- og integralteori.

Dermed er sætning 12.16 bevist.

I mange tilfælde er det vanskeligt at "splitte" en mangfoldighed op i områder med regulær rand på hensigtsmæssig vis. Man kan så undersøge muligheden for andre opdelinger af mangfoldigheden, f.eks. i n-dimensionale intervaller.

Definition 12.17. En delmængde R af den differentiable mangfoldighed M^n kaldes et n-dimensionalt interval på M, hvis der findes et kort $\underline{x}$ på M med koordinater i den åbne mængde $D \subseteq E^n$ og et n-dimensionalt interval $R' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ i E^n, således at $R' \subseteq D$ og $\underline{x}(R') = R$.

Hvis R er et n-dimensionalt interval på den parakompakte, orienterede differentiable mangfoldighed M^n findes et entydigt bestemt integral $\int_R : \mathcal{D}^n_c(M) \longrightarrow E^1$ over R fastlagt som i sætning 12.15. Hvis $R_1, \dots, R_k$ er n-dimensionale intervaller på M, så

$$\text{i)} \quad M = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

og

$$\text{ii)} \quad \operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset \quad \text{for} \quad i \neq j$$

gælder også i dette tilfælde:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{R_i} \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}^n_c(M) .$$

Bemærkning. Lad os kalde et system af n-dimensionale intervaller $R_1, \dots, R_k$ på M^n, der opfylder i) og ii), for en opdeling af M i n-dimensionale intervaller. Den tilsvarende engelske glose er en "paving of M". Da et n-dimensionalt interval er kompakt, må en differentiabel mangfoldighed M^n, der tillader en opdeling i n-dimensionale intervaller, nødvendigvis være kompakt. En interessant og dyb sætning af Cairns giver det modsatte udsagn: Enhver kompakt differentiabel mangfoldighed M^n tillader en opdeling i n-dimensionale intervaller.

Vi betragter nu til slut i dette afsnit Riemann'ske mangfoldigheder.

Definition 12.18. Lad M^n være en orienteret, parakompakt Riemann'sk mangfoldighed med Riemann'sk volumen mål dV, og lad A være en område med regulær rand i M.

Integralet af $f \in \mathcal{D}^0_c(M)$ over A, betegnet $\int_A f$, defineres som integralet af $f \cdot dV \in \mathcal{D}^n_c(M)$ over A. Pr. definition har vi altså:

$$\int_A f = \int_A f \cdot dV.$$

Hvis A er kompakt, vil vi endvidere ved volumenet af A, betegnet $\mathrm{vol}(A)$, forstå tallet

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A dV .$$

Bemærkning. Hvis $\underline{x}$ er et positivt orienteret kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$ har det Riemann'ske volumen mål fremstillingen:

$$dV|\underline{x}(D) = \sqrt{G}\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n .$$

Hvis $A \subseteq \underline{x}(D)$, får vi så pr. definition af integralet af $f \in \mathcal{D}^0_c(M)$:

$$\int_A f = \int_{\underline{x}^{-1}(A)} (f \cdot \sqrt{G})(\underline{x}(u_1,\dots,u_n))du_1 \dots du_n .$$

Tilsvarende får vi, hvis A er kompakt og $A \subseteq \underline{x}(D)$:

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{\underline{x}^{-1}(A)} \sqrt{G}\,(\underline{x}(u_1,\dots,u_n))du_1 \dots du_n .$$

Opgave 5. Lad $O_1 \subseteq E^n$ og $O_2 \subseteq E^m$ være åbne delmængder, og antag, at $n \leq m$. Lad endvidere $F : O_1 \longrightarrow O_2$ være en differentiabel afbildning.

Vis, at hvis $X \subseteq O_1$ har Lebesque-mål 0 i E^n, har $F(X) \subseteq O_2$ Lebesque-mål 0 i E^m.

Gennemfør f.eks. beviset i følgende skridt:

1) Vis, at hvis $K \subseteq O_1$ er en kompakt, konveks delmængde af O_1 findes en konstant C, så

$$||F(x) - F(y)|| \leq C \cdot ||x - y|| \qquad \forall x,y \in K .$$

2) Vis, at hvis $X \cap K$ (K som i 1)) har Lebesque-mål 0 i E^n vil $F(X \cap K)$ have Lebesque-mål 0 i E^m.

3) Fuldfør beviset.

Opgave 6. Vis, at alle funktioner, der indgår i bestemmelsen af $\int_A$ i sætning 12.15, er Riemann integrable.

Opgave 7. Lad D være en åben delmængde af E^2, og lad $f\colon D \longrightarrow E^1$ være en differentiabel funktion.

Betragt Monge-fladen M i E^3 med fremstillingen

$$\underline{x}(u_1,u_2) = (u_1,u_2,f(u_1,u_2)) \qquad \forall (u_1,u_2) \in D$$

og induceret Riemann'sk metrik fra E^3.

Hvis A er et kompakt område med regulær rand på M, skal man nu vise, at

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{\underline{x}^{-1}(A)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2}\; du_1 du_2 \,.$$

Opgave 8. Beregn $\mathrm{vol}(S^2)$ (overfladearealet), når S^2 forsynes med den sædvanlige Riemann'ske metrik.

Opgave 9. Antag, at $R > r$. Betragt den flade i E^3 (Torus), der fremkommer ved at dreje cirklen i u_1u_3-planen med radius r og centrum $(R,0,0)$ omkring u_3-aksen. Giv Torus den inducerede Riemann'ske metrik fra E^3. Beregn volumenet (overfladearealet) af Torus.

Stokes' sætning.

Hvis $f : E^1 \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion, og $A = [a,b]$ er et lukket interval på E^1, siger differential- og integralregningens hovedsætning, at

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Når vi bemærker, at $df = f'(t)dt$, og at $\partial A = \partial [a,b]$ består af punktet a med orientering - og punktet b med orientering + (se exempel 12.14), ser vi, at denne formel kan skrives på formen:

$$\int_A df = \int_{\partial A} f \,.$$

Dette resultat skal vi nu generalisere til vilkårlig dimension:

<u>Sætning 12.19</u>. (Stokes' sætning).

Lad M^n være en n-dimensional orienteret, parakompakt differentiabel mangfoldighed, og lad A være et område med regulær rand i M.

Hvis ∂A gives den inducerede orientering fra M, og $i : \partial A \longrightarrow M$ er inklusionsafbildningen, gælder formlen

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} i^*(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M) .$$

<u>Bemærkning</u>. Da $\omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M)$ vil $d\omega \in \mathcal{D}_c^n(M)$ (lemma 12.4) og $i^*(\omega) \in \mathcal{D}_c^{n-1}(\partial A)$. Idet $\dim A = n-1$, er begge integraler derfor veldefinerede.

<u>Bevis</u>. Først følgende påstand:

Der findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af M med $\alpha \in I$, således at $U_\alpha = \underline{x}_\alpha(D_\alpha)$ for et positivt orienteret kort $\underline{x}_\alpha$ på M med koordinater i den åbne mængde $D_\alpha \subseteq E^n$ $\forall \alpha \in I$, og så ethvert af kortene $\underline{x}_\alpha$ har en af følgende egenskaber:

1) $\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \subseteq M \setminus A$

2) $\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \subseteq \operatorname{int} A$

3) $\underline{x}_\alpha^{-1}(\underline{x}_\alpha(D_\alpha) \cap A) = D_\alpha \cap E_+^n$.

Da $M \setminus A$ og $\operatorname{int} A$ er åbne delmængder af M, og da ∂A kan overdækkes med kort af type 3), beviser man let denne påstand ved at benytte, at M er parakompakt.

Lad nu $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med $\alpha \in I$ være en sådan lokalt endelig åben overdækning af M, og lad $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ være en deling af enheden associeret med $\mathcal{U}$.

Det er klart, at $\{U_\alpha \cap \partial A\}$ er en lokalt endelig åben overdækning af ∂A, og at $\{f_\alpha \mid \partial A\}$ er en deling af enheden associeret hermed.

Hvis $\omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M)$, får vi så (se beviset for sætning 12.6):

$$\int_A d\omega = \int_A d\Big(\sum_{\alpha \in I} f_\alpha \omega\Big) = \sum_{\alpha \in I} \int_A d(f_\alpha \omega)$$

og

$$\int_{\partial A} i^*(\omega) = \int_{\partial A} i^*(\sum_{\alpha\in I} f_\alpha \omega) = \sum_{\alpha\in I} \int_{\partial A} i^*(f_\alpha \omega) \; .$$

Af disse udtryk fremgår det (hvorfor ?), at det er tilstrækkeligt at bevise, at

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} i^*(\omega)$$

for $\omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M)$ med $st(\omega) \subseteq \underline{x}(D)$, hvor $\underline{x}$ er et positivt orienteret kort på M med koordinater $(u_1,\dots,u_n) \in D \subseteq E^n$, der har en af følgende egenskaber:

1) $\underline{x}(D) \subseteq M \setminus A$

2) $\underline{x}(D) \subseteq \operatorname{int} A$

3) $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E_+^n$.

Vi behandler nu hver af de 3 tilfælde.

1) Da $st(d\omega) \subseteq st(\omega) \subseteq M \setminus A$ er begge integraler 0 i dette tilfælde, og der er intet at bevise.

2) Da $\omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M)$, findes reelle funktioner $a_1,\dots,a_n : D \longrightarrow E^1$, således at

$$\omega | \underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_n \; .$$

Ved at benytte de sædvanlige regler for det ydre differential samt anti-kommutativiteten af $\wedge$, får vi:

$$d\omega | \underline{x}(D) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \wedge \dots \wedge du_n \; .$$

Da $st(d\omega) \subseteq st(\omega) \subseteq \underline{x}(D) \subseteq \operatorname{int} A$, og $\underline{x}$ er et positivt orienteret kort på M, får vi så pr. konstruktion af integralet:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_n \; .$$

Udvid nu funktionerne $a_i : D \longrightarrow E^1$ til $\tilde{a}_i : E^n \longrightarrow E^1$ ved fastsættelsen $\tilde{a}_i(E^n \setminus D) = 0$. Da $st(a_i) \subseteq D$, er disse udvidelser trivielt differentiable, og

$$\int_A d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{E^n} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_n \; .$$

Integrerer vi i den i'te summand først med hensyn til u_i, får vi:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int \Big(\int_{E^1} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_i} du_i \Big) du_1 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \ .$$

Hvis b er et reelt tal, så $\underline{x}^{-1}(st(\omega)) \subseteq [-b,b] \times \dots$ $\dots \times [-b,b]$, ser vi, at

$$\int_{E^1} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_i} du_i = \int_{-b}^{b} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_i} du_i$$

$$= \tilde{a}_i(\dots,b,\dots) - \tilde{a}_i(\dots,-b,\dots)$$

$$= 0 - 0 = 0 \ .$$

Heraf følger, at $\int_A d\omega = 0$.

Idet $st(\omega) \subseteq \underline{x}(D) \subseteq \operatorname{int} A$ er det klart, at også $\int_{\partial A} i^*(\omega) = 0$ i dette tilfælde.

Dette beviser formlen i tilfælde 2).

3) Vi beskriver $\omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M)$ med $st(\omega) \subseteq \underline{x}(D)$ i kortet $\underline{x}$ som i tilfælde 2).

Da $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E_+^n$, får vi nu:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_D (\chi_A \circ \underline{x}) \cdot \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{D \cap E_+^n} \frac{\partial a_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_n \ .$$

Indfører vi de trivielle udvidelser $\tilde{a}_i : E^n \longrightarrow E^1$ af a_i som før, får vi så:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_+^n} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_i} du_1 \dots du_n \ .$$

Integrerer vi nu igen først efter u_i i den i'te summand, ser vi som før, at alle summander pånær den n'te bliver 0. Vi får altså:

$$\int_A d\omega = \int_{E_+^n} \frac{\partial \tilde{a}_n}{\partial u_n} du_1 \dots du_n$$

$$= \int_{E^{n-1}} \Big(\int_0^{\infty} \frac{\partial \tilde{a}_n}{\partial u_n} du_n \Big) du_1 \dots du_{n-1} \ .$$

Da $\tilde{a}_n$ er 0 for u_n stor, følger heraf:

$$\int_A d\omega = -\int_{E^{n-1}} \tilde{a}_n(u_1,\dots,u_{n-1},0)du_1\dots du_{n-1} .$$

Betragt dernæst $\int_{\partial A} i^*(\omega)$. Da $i^*(du_n) = 0$, får vi:

$$i^*(\omega)|\underline{x}(D\cap E^{n-1}) = (-1)^{n-1} a_n du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1} .$$

Ifølge orienterings-konventionen er $(-1)^n du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$ en positiv $(n-1)$-form på ∂A over $\underline{x}(D\cap E^{n-1})$. Da $st(i^*(\omega)) \subseteq \underline{x}(D\cap E^{n-1})$, får vi så pr. konstruktion af integralet:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} i^*(\omega) &= \int_{\underline{x}(D\cap E^{n-1})} (-a_n)(-1)^n du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}\\ &= -\int_{D\cap E^{n-1}} a_n(u_1,\dots,u_{n-1},0)du_1\dots du_{n-1}\\ &= -\int_{E^{n-1}} \tilde{a}_n(u_1,\dots,u_{n-1},0)du_1\dots du_{n-1} .\end{aligned}$$

Af de udledte formler følger nu straks, at

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} i^*(\omega)$$

i tilfælde 3).

Dette afslutter beviset for Stokes' sætning.

Da enhver differentiabel mangfoldighed M er et område med regulær rand i sig selv, og $\partial M = \emptyset$, får vi straks følgende korollar til Stokes' sætning:

Korollar 12.20. Lad M^n være en orienteret, parakompakt differentiabel mangfoldighed. Så gælder:

$$\int_M d\omega = 0 \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}_c^{n-1}(M) .$$

Korollar 12.21. (Green's sætning).

Lad D være en åben delmængde af E^2, og lad $f_1, f_2 : D \longrightarrow E^1$ være differentiable funktioner. Lad endvidere A være et kompakt område med regulær rand i E^2, således at $A \subseteq D$.

Idet $(u_1,u_2) \in E^2$ betegner de sædvanlige koordinater på E^2, gælder så:

$$\int_{\partial A} f_1\, du_1 + f_2\, du_2 = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) du_1 du_2 \; .$$

Bevis. Betragt differential formen $\omega = f_1\, du_1 + f_2\, du_2$ på D.

Da A er kompakt, kan vi finde en differentiabel funktion $\varphi : D \longrightarrow E^1$, således at $\varphi = 1$ på en omegn af A, og så $st(\varphi)$ er kompakt (lemma A3.19).

Idet vi kun skal operere på A, kan vi derfor uden indskrænkning antage, at $st(\omega)$ er kompakt (betragt i modsat fald $\varphi . \omega$).

Da

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) du_1 \wedge du_2$$

følger Green's sætning nu umiddelbart fra sætning 12.19.

Næste sætning er en umiddelbar generalisation af den klassiske Divergens-sætning, også kendt som Gauss' sætning.

Sætning 12.22. (Divergens-sætningen).

Lad M^n være en orienteret, parakompakt Riemann'sk mangfoldighed, og lad A være et område med regulær rand i M. Lad endvidere Z være det udadrettede enheds-normalfelt til ∂A i M, og giv ∂A den inducerede Riemann'ske metrik og orientering fra M.

Hvis X er et vektorfelt med kompakt støtte på M, gælder så:

$$\int_A \operatorname{div} X = \int_{\partial A} (X, Z) \; .$$

Bemærkning. Det udadrettede enhedsnormalfelt Z til ∂A er fastlagt således:

For $p \in \partial A$ er $Z_p \in T_pM$ den entydigt bestemte tangentvektor til M, som er normal til ∂A i $p \in \partial A$, har længde 1, og kan repræsenteres ved en kurve $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$, så $\alpha(0) = p$, $\alpha(t) \in A$ for $t \leq 0$ og $\alpha(t) \in M \setminus A$ for $t > 0$. (Tegn illustrerende figur).

Bevis. Lad dV og $dV_{\partial A}$ være de Riemann'ske volumen mål på henholdsvis M og ∂A.

Pr. definition af integralet af en funktion (definition 12.18) har vi:

$$\int_A \operatorname{div} X = \int_A \operatorname{div} X \, dV$$

og

$$\int_{\partial A} (X,Z) = \int_{\partial A} (X,Z)\, dV_{\partial A} .$$

$\operatorname{div} X$ er defineret ved følgende ligning (p. 192):

$$\operatorname{div} X \, dV = (-1)^{n-1} d(1^{-1} \circ X)$$
$$= d((-1)^{n-1} 1^{-1} \circ X) .$$

Idet vi søger at nå frem til at kunne anvende Stokes' sætning, undersøger vi nu

$$i^*((-1)^{n-1} 1^{-1} \circ X) ,$$

hvor $i : \partial A \longrightarrow M$ er inklusionsafbildningen.

Lad dertil $\underline{x}$ være et positivt orienteret kort på M med koordinater $(u_1, \ldots, u_n) \in D \subseteq E^n$, således at $\underline{x}^{-1}(\underline{x}(D) \cap A) = D \cap E^n_+$. Så giver $\underline{x}|D \cap E^{n-1}$ et arvet kort på ∂A. Hvis

$$X = \sum_{i=1}^{n} t^i \, \underline{x}_{u_i}$$

har vi tidligere vist (p. 193), at

$$1^{-1} \circ X = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \, t^i \sqrt{G} \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \ldots \wedge du_n .$$

Da $i^*(du_n) = 0$, får vi heraf:

$$i^*((-1)^{n-1} 1^{-1} \circ X) = (-1)^{n-1} \, t^n \sqrt{G} \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

over $\underline{x}(D \cap E^{n-1})$.

Vi prøver nu at udlede et tilsvarende udtryk for $(X,Z)\,dV_{\partial A}$.

Da $(-1)^n \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}$ er en positiv $(n-1)$-form på ∂A pr. konvention, og Z er det udadrettede enhedsnormalfelt til ∂A, gælder:

$$dV_{\partial A} (\underline{x}_{u_1}, \ldots, \underline{x}_{u_{n-1}})$$
$$= (-1)^{n-1} \, dV(\underline{x}_{u_1}, \ldots, \underline{x}_{u_{n-1}}, Z)$$

(overvej dette; bemærk, at $\underline{x}_{u_n}$ "peger ind" i A).

Så får vi:

$$(X,Z)dV_{\partial A}(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n-1}})$$

$$= t^n(\underline{x}_{u_n},Z)(-1)^{n-1}dV(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n-1}},Z)$$

$$= (-1)^{n-1}t^n\, dV(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n-1}},(\underline{x}_{u_n},Z)Z)\ .$$

Vi har herunder benyttet, at $(\underline{x}_{u_i},Z) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,n-1$, da Z er normal til ∂A.

Idet

$$\underline{x}_{u_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a^i\, \underline{x}_{u_i} + (\underline{x}_{u_n},Z)Z$$

og dV er alternerende, får vi nu videre:

$$(X,Z)dV_{\partial A}(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_{n-1}})$$

$$= (-1)^{n-1}\, t^n\, dV(\underline{x}_{u_1},\dots,\underline{x}_{u_n})$$

$$= (-1)^{n-1}\, t^n \sqrt{G}\ .$$

Når vi dernæst bemærker, at en $(n-1)$-form på ∂A er entydigt bestemt ved sin værdi på $n-1$ lineært uafhængige tangentvektorfelter, følger heraf:

$$(X,Z)dV_{\partial A} = (-1)^{n-1}\, t^n \sqrt{G}\ du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$$

over $\underline{x}(D \cap E^{n-1})$.

Ved en sammenligning af de udledte formler, får vi nu straks:

$$i^*((-1)^{n-1}\iota^{-1}\circ X) = (X,Z)dV_{\partial A}\ .$$

Stokes' sætning tillader så følgende udregning:

$$\int_A \operatorname{div} X = \int_A \operatorname{div} X\, dV = \int_A d((-1)^{n-1}\iota^{-1}\circ X)$$

$$= \int_{\partial A} i^*((-1)^{n-1}\iota^{-1}\circ X) = \int_{\partial A} (X,Z)dV_{\partial A}$$

$$= \int_{\partial A} (X,Z)\ .$$

Dermed er Divergens-sætningen bevist.

Vi stiler nu mod at bevise den klassiske Stokes' sætning.

Konvention. Lad M^n være en orienteret del-mangfoldighed af E^{n+1}. Ved det positive enheds-normalfelt Z til M i E^{n+1}, forstås feltet fastlagt på følgende måde:

For $p \in M$ er $Z_p \in T_pE^{n+1}$ den entydigt bestemte tangentvektor til E^n, der har længde 1, og supplerer en positiv basis $\{X_p^1,\dots,X_p^n\}$ i T_pM til en positiv basis $\{X_p^1,\dots,X_p^n,Z_p\}$ i T_pE^{n+1}.

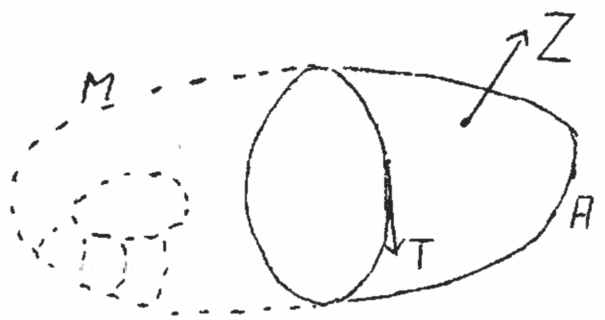
Sætning 12.23. (klassiske Stokes' sætning).

Lad M være en orienteret flade i E^3, og lad Z være det positive enheds-normalfelt til M i E^3. Lad endvidere A være et område med regulær rand i M, og lad T være det positivt orienterede enheds-tangentfelt til ∂A, når ∂A gives den inducerede orientering fra M.

Hvis X er et vektorfelt med kompakt støtte på E^3, gælder så:

$$\int_A (\operatorname{rot} X, Z) = \int_{\partial A} (X,T) .$$

Bemærkning. $(\cdot,\cdot)$ er her den sædvanlige Riemann'ske metrik på E^3



Bevis. Lad dV, dV_M og $dV_{\partial A}$ betegne de Riemann'ske volumen mål på henholdsvis E^3, M og ∂A.

Pr. definition har vi så:

$$\int_A (\operatorname{rot} X, Z) = \int_A (\operatorname{rot} X, Z)\, dV_M$$

$\operatorname{rot} X$ er defineret ved følgende ligning (p. 197):

$$\operatorname{rot} X = 1 \circ d(m \circ X)$$

hvoraf fås:

$$1^{-1} \circ \operatorname{rot} X = d(m \circ X).$$

Hvis $I : M \longrightarrow E^3$ er inklusionsafbildningen, betragter vi nu 1-formen $I^*(m \circ X)$ på M.

Idet d_M betegner det ydre differential på M, får vi:

$$\begin{aligned} d_M(I^*(m \circ X)) &= I^*(d(m \circ X)) \\ &= I^*(1^{-1} \circ \operatorname{rot} X) . \end{aligned}$$

Påstand 1. $I^*(1^{-1} \circ \operatorname{rot} X) = (\operatorname{rot} X, Z) dV_M$.

Bevis. Lad $\underline{x}$ være et kort på E^3 med koordinater $(u_1,u_2,u_3) \in D \subseteq E^3$, således at $\underline{x}|D \cap E^2$ er et kort på M.

Vi kan uden indskrænkning antage, at $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}, Z\}$ giver positive baser i tangentrummene for E^3 over ${}^1\underline{x}(D \cap E^2)$.

Så får vi:

$$\begin{aligned} &(\operatorname{rot} X, Z) dV_M(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}) \\ &= (\operatorname{rot} X, Z) dV(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}, Z) \\ &= (1^{-1} \circ \operatorname{rot} X \wedge m \circ Z)(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}, Z) . \end{aligned}$$

I sidste lighedstegn har vi benyttet lemma 10.13. Idet

$$m \circ Z(Z) = (Z,Z) = 1$$

og

$$m \circ Z(\underline{x}_{u_1}) = m \circ Z(\underline{x}_{u_2}) = 0 ,$$

får vi så ved at udnytte formlen for virkningen af et $\wedge$-produkt på vektorfelter:

$$\begin{aligned} &(\operatorname{rot} X, Z) dV_M(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}) \\ &= \tfrac{1}{2}(1^{-1} \circ \operatorname{rot} X(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}) - 1^{-1} \circ \operatorname{rot} X(\underline{x}_{u_2}, \underline{x}_{u_1})) \\ &= 1^{-1} \circ \operatorname{rot} X(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}) \\ &= I^*(1^{-1} \circ \operatorname{rot} X)(\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}) . \end{aligned}$$

Da 2-former på M er entydigt bestemt ved værdien på et par af lineært uafhængige tangentfelter til M, viser ovenstående, at

$$(\mathrm{rot}\,X, Z)dV_M = I^*(1^{-1}\circ \mathrm{rot}\,X)\ .$$

Dermed er påstand 1 bevist.

Hvis $i : \partial A \longrightarrow M$ betegner inklusionsafbildningen, ønsker vi dernæst at vise:

Påstand 2. $i^*(I^*(m \circ X)) = (X,T)dV_{\partial A}$.

Bevis. Da T er den positive enheds-tangentvektor til kurven ∂A, er $dV_{\partial A}(T) = 1$. Vi får derfor:

$$\begin{aligned} & i^*(I^*(m \circ X))(T) \\ &= m \circ X(T) = (X,T) \\ &= (X,T)dV_{\partial A}(T)\ . \end{aligned}$$

Dette beviser påstand 2 (hvorfor ?).

I følgende afsluttende udregning benytter vi påstandene 1 og 2 samt Stokes' sætning:

$$\begin{aligned} \int_A (\mathrm{rot}\,X, Z) &= \int_A (\mathrm{rot}\,X, Z)dV_M \\ &= \int_A I^*(1^{-1}\circ \mathrm{rot}\,X) \\ &= \int_A d_M(I^*(m \circ X)) \\ &= \int_{\partial A} i^*(I^*(m \circ X)) \\ &= \int_{\partial A} (X,T)dV_{\partial A} \\ &= \int_{\partial A} (X,T)\ . \end{aligned}$$

Dermed er sætning 12.23 bevist.

Opgave 10. Lad D være en åben delmængde af E^2. Identificer E^2 med den komplexe plan, og lad $f : D \longrightarrow E^2$ være en holomorf afbildning. Antag endvidere, at A er et kompakt område med regulær rand i E^2, så $A \subseteq D$. Vis nu, at

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 0.$$

Dette er Cauchy's integralsætning for et område med regulær rand.

Opgave 11. Lad A være et område med regulær rand i E^3, så

$$A \subseteqq \left\{(u_1,u_2,u_3) \in E^3 \mid u_3 \leqq 0\right\} .$$

Man kan tænke på A som et legeme nedsænket i en vædske i halvrummet $u_3 \leqq 0$. Antag, at denne vædske har vægtfylden ρ, og lad $X = \rho\, u_3 \underline{x}_{u_3}$ for $u_3 \leqq 0$ være det nedadrettede tryk i vædsken. Hvis Z er den udadrettede normal til legemet A, defineres opdriften på A som

$$\int_{\partial A} (X,Z)\,dV_{\partial A} .$$

Vis Archimedes' lov.

§13. Topologiske anvendelser af Stokes' sætning

I denne paragraf vil vi ved hjælp af Stokes' sætning først bevise Brouwer's fixpunkt sætning og dernæst, at der ikke findes noget differentiabelt vektorfelt på en lige dimensional kugleflade, der er forskellig fra nul i alle punkter af kuglefladen.

Vi vil først bevise Brouwer's fixpunkt sætning. Det drejer sig om følgende sætning:

Sætning 13.1. Lad B^n betegne enheds-kuglen i E^n. Så har enhver kontinuert afbildning $F: B^n \longrightarrow B^n$ mindst et fixpunkt.

Vi forbereder beviset for denne sætning i to lemmaer.

Lemma 13.2. Lad A og B være lukkede delmængder af det topologiske rum X, således at $X = A \cup B$. Lad endvidere $f: A \longrightarrow Y$ og $g: B \longrightarrow Y$ være kontinuerte afbildninger ind i det topologiske rum Y, der stemmer overens på deres fælles definitionsområde, dvs. så $f|A \cap B = g|A \cap B$.

Så er afbildningen $h: X \longrightarrow Y$ defineret ved fastsættelsen $h|A = f$ og $h|B = g$ også kontinuert.

Bevis. Lad $C \subseteq Y$ være en vilkårlig lukket delmængde af Y. Hvis vi kan vise, at $h^{-1}(C)$ er en lukket delmængde af X, er beviset ført.

Det er klart, at
$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Da f er kontinuert, er $f^{-1}(C)$ en lukket delmængde af A. Idet A er lukket i X, følger heraf, at $f^{-1}(C)$ er lukket i X. På tilsvarende måde ser vi, at $g^{-1}(C)$ er lukket i X. Disse observationer viser, at $h^{-1}(C)$ er en lukket delmængde af X, og beviset er ført.

<u>Lemma 13.3</u>. (Det væsentlige punkt).

Lad som sædvanlig B^n og S^{n-1} betegne henholdsvis enheds-kuglen og enheds-sfæren i E^n. Så gælder:

Der findes ingen kontinuert afbildning $f:B^n \to S^{n-1}$, således at $f|S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$.

<u>Bevis</u>. Antag, at der findes en kontinuert afbildning $f:B^n \to S^{n-1}$, så $f|S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$. Idet $u = (u_1,\dots,u_n) \in E^n$ betegner et punkt i E^n, og $\|\cdot\|$ er den sædvanlige norm i E^n, betragter vi afbildningen

$$g:E^n \setminus \operatorname{int} B^n \longrightarrow S^{n-1}$$

defineret ved fastsættelsen

$$g(u) = \frac{u}{\|u\|} \quad \forall u \in E^n \setminus \operatorname{int} B^n$$

Det er klart, at g er kontinuert. Da yderligere $(E^n \setminus \operatorname{int} B^n) \cap B^n = S^{n-1}$ og $g|S^{n-1} = 1_{S^{n-1}} = f|S^{n-1}$, viser lemma 13.2, at afbildningen

$$h:E^n \to S^{n-1}$$

defineret ved fastsættelsen $h|B^n = f$ og $h|E^n \setminus \operatorname{int} B^n = g$ er kontinuert.

Da afbildningen

$$u \in E^n \setminus \{0\} \rightsquigarrow \frac{u}{\|u\|} \in S^{n-1}$$

er differentiabel og stemmer overens med h på den lukkede mængde $E^n \setminus \operatorname{int} B^n$, er det klart, at h er differentiabel på $E^n \setminus \operatorname{int} B^n$ (definition 11.7).

Via inklusionen $S^{n-1} \subseteq E^n$ kan vi betragte h som en afbildning ind i E^n.

Approximationssætningen (sætning 11.8) viser nu, at vi kan finde en differentiabel funktion $H:E^n \to E^n$, således at $H|E^n \setminus \operatorname{int} B^n = h$, og så

$$\|H(u) - h(u)\| < \tfrac{1}{2} \quad \forall u \in E^n$$

Idet $h(u) \in S^{n-1}$ $\forall u \in E^n$, er det klart, at $H(u) \in E^n \setminus \{0\}$ $\forall u \in E^n$. Heraf følger, at afbildningen

$$G: E^n \to S^{n-1}$$

defineret ved fastsættelsen

$$G(u) = \frac{H(u)}{\|H(u)\|} \quad \forall u \in E^n$$

også er differentiabel.

Idet

$$H \mid S^{n-1} = h \mid S^{n-1} = f \mid S^{n-1} = 1_{S^{n-1}},$$

følger det, at $G \mid S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$.

Vi kan registrere dette i følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[r, "G"] & S^{n-1} \\ S^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "1_{S^{n-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

hvor $i: S^{n-1} \to E^n$ er inklusionsafbildningen.

Betragt nu det Riemann'ske volumen mål $dV \in \mathcal{D}^{n-1}(S^{n-1})$ på S^{n-1}.

Fra Stokes' sætning følger:

$$\int_{B^n} d(G^*(dV)) = \int_{S^{n-1}} i^*(G^*(dV))$$

Da $d(dV) = 0$, får vi:

$$d(G^*(dV)) = G^*(d(dV)) = 0.$$

Fra det kommutative diagram får vi:

$$i^*(G^*(dV)) = (1_{S^{n-1}})^*(dV) = dV$$

Af ovenstående følger nu, at $\int_{S^{n-1}} dV = 0$, hvilket er i modstrid med sætning 12.8.

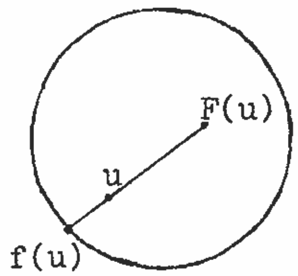
Vor oprindelige antagelse om existens af en kontinuert afbildning $f: B^n \to S^{n-1}$, således at $f \mid S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$, må derfor forkastes, og lemmaet er bevist.

Bevis for sætning 13.1. Antag, at der findes en kontinuert afbildning $F: B^n \to B^n$ uden fixpunkter.

For $u \in B^n$ lader vi nu $f(u) \in S^{n-1}$ være det entydigt bestemte punkt på linien gennem u og $F(u)$, der er nærmest u (linien er velbestemt, da $F(u) \neq u$).

Vi får herved defineret en afbildning $f: B^n \to S^{n-1}$. Pr. konstruktion er det klart, at $f(u) = u \ \forall u \in S^{n-1}$, dvs.

$$f \mid S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$$



Af geometriske årsager er det klart, af f er kontinuert. Dette kan også ses direkte af følgende udtryk for f:

$$f(u) = F(u) + t \cdot (u - F(u)),$$

hvor $t > 0$ er entydig bestemt af den kamuflerede anden-gradsligning:

$$\| F(u) + t \cdot (u - F(u)) \| = \| f(u) \| = 1$$

Vi har dermed ud fra F konstrueret en kontinuert afbildning $f: B^n \to S^{n-1}$, så $f \mid S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$. Da dette er i modstrid med lemma 13.3, må vor oprindelige antagelse om existens af en kontinuert afbildning $F: B^n \to B^n$ uden fixpunkter forkastes.

Enhver kontinuert afbildning $F: B^n \to B^n$ har derfor mindst et fixpunkt, hvilket skulle bevises.

Vi vil nu betragte problemer vedrørende existens af intetsteds nul differentiable vektorfelter på kugleflader.

I den forbindelse får vi brug for begrebet glat homotopi.

Definition 13.4. Lad M og N være differentiable mangfoldigheder. To differentiable funktioner $f_0, f_1: M \to N$ kaldes glat homotope, hvis der findes en differentiabel funktion $F: M \times E^1 \to N$, således at

i) $\forall p \in M \ \forall t \leqq 0$: $F(p,t) = f_0(p)$
ii) $\forall p \in M \ \forall t \geqq 1$: $F(p,t) = f_1(p)$

F kaldes en glat homotopi mellem f_0 og f_1.

Bemærkning. Hvis vi for ethvert $t \in E^1$ definerer afbildningen $f_t : M \longrightarrow N$ ved fastsættelsen

$$\forall p \in M: f_t(p) = F(p,t)$$

ser man let, at f_t er differentiabel, da F er differentiabel, og at $f_t = f_0$ for $t \leqq 0$ og $f_t = f_1$ for $t \geqq 1$. f_t giver således en 1-parameter skare af differentiable afbildninger, der i tidsrummet $t \in [0,1]$ fører f_0 over i f_1.

Følgende sætning er fundamental for glat homotopi:

Sætning 13.5. Lad M^n og N^n være kompakte, orienterede differentiable mangfoldigheder af samme dimension.

Hvis $f_0, f_1 : M \longrightarrow N$ er glat homotope, differentiable afbildninger, gælder så

$$\int_M f_0{}^*(\omega) = \int_M f_1{}^*(\omega)$$

for enhver n-form ω på N.

Bevis. Inden selve beviset undersøger vi først produktmangfoldigheden $M \times E^1$.

Lad $P_M : M \times E^1 \longrightarrow M$ og $P_{E^1} : M \times E^1 \longrightarrow E^1$ være de kanoniske projektioner. Hvis Ω_M er et positivt volumen mål på M, og E^1 har standard orienteringen bestemt af formen dt, hvor $t \in E^1$ er parameteren på E^1, kan man let indse, at

$$\Omega_{M \times E^1} = P_M{}^*(\Omega_M) \wedge P_{E^1}{}^*(dt)$$

bliver et volumen mål på $M \times E^1$. Det er endvidere let at indse, at $\Omega_{M \times E^1}$ bestemmer en veldefineret orientering af $M \times E^1$.

Det er klart, at $M \times [0,1]$ er et område med regulær rand i $M \times E^1$. Randen $\partial(M \times [0,1])$ for $M \times [0,1]$ falder i 2 disjunkte stykker $M \times \{0\}$ og $M \times \{1\}$. Når $\partial(M \times [0,1])$ gives den inducerede orientering fra $M \times E^1$, kan man indse, at orienteringerne på $M \times \{0\}$ og $M \times \{1\}$ bliver i ét tilfælde den samme som orienteringen på M og i det andet den modsatte.

Vi kan nu gå over til beviset for sætningen.

Lad $F: M \times E^1 \longrightarrow N$ være en glat homotopi mellem f_0 og f_1, og lad ω være en vilkårlig n-form på N. Idet vi sætter $A = M \times [0,1]$, får vi så ved hjælp af Stokes' sætning:

$$\int_A d\,F^*(\omega) = \int_{\partial A} i^*(F^*(\omega))$$

Da $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$, fordi $d\omega = 0$ (ω er en n-form på N^n), får vi så

$$\int_{\partial A} i^*(F^*(\omega)) = 0$$

Idet $i_0, i_1 : M \longrightarrow \partial A = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ er defineret ved:

$$\forall\, p \in M: \quad i_0(p) = (p,0) \quad \text{og} \quad i_1(p) = (p,1)$$

følger heraf, når vi benytter bemærkningerne om orienteringerne på $M \times \{0\}$ og $M \times \{1\}$ i forhold til M, at

$$\pm\left[\int_M i_0^*(i^*(F^*(\omega))) - \int_M i_1^*(i^*(F^*(\omega)))\right] = 0$$

Da $f_0 = F \circ i \circ i_0$ og $f_1 = F \circ i \circ i_1$ får vi heraf

$$\pm\left[\int_M f_0^*(\omega) - \int_M f_1^*(\omega)\right] = 0 ,$$

hvoraf straks følger

$$\int_M f_0^*(\omega) = \int_M f_1^*(\omega) ,$$

hvilket skulle bevises.

Lemma 13.6. Hvis n er lige, er den antipodiske afbildning A på S^n og identiteten 1_{S^n} på S^n ikke glat homotope.

Bevis. Betragt på S^n n-formen Ω defineret i exempel 10.6. Ω er netop det Riemann'ske volumen mål på S^n.

Antag, at A og 1_{S^n} er glat homotope. Ifølge sætning 13.5 får vi så:

$$\int_{S^n} 1_{S^n}^*(\Omega) = \int_{S^n} A^*(\Omega)$$

Når vi benytter, at $A^*(\Omega) = (-1)^{n+1}\Omega$ (exempel 10.6) følger heraf, at

$$\int_{S^n} \Omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \Omega$$

Da $\int_{S^n} \Omega > 0$, fordi Ω er det Riemann'ske volumen mål på S^n, har vi en modstrid for n lige.

Dermed er lemmaet bevist.

Vi kan nu bevise den ønskede sætning.

<u>Sætning 13.7</u>. Hvis n er lige, findes der ikke et differentiabelt vektorfelt X på S^n, således at $X_p \neq 0$ for ethvert $p \in S^n$.

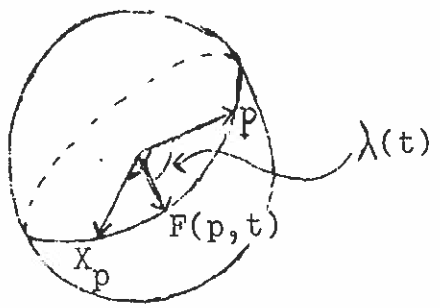
<u>Bevis</u>. Antag, at X er et differentiabelt vektorfelt på S^n, således at $X_p \neq 0$ for ethvert $p \in S^n$. Vi kan uden indskrænkning antage, at X er et enheds-vektorfelt, i modsat fald normaliser det.

I det følgende vil vi parallelforskyde vektoren X_p, så den får fodpunkt $0 \in E^{n+1}$. X_p repræsenterer derved et punkt på S^n.

Lad nu $\lambda: E^1 \to E^1$ være en differentiabel funktion, således at $\lambda(t) = 0$ for $t \leq 0$ og $\lambda(t) = \pi$ for $t \geq 1$, og definer dernæst $F: S^n \times E^1 \to S^n$ ved fastsættelsen:

$$\forall p \in S^n \quad \forall t \in E^1: F(p,t) = \cos\lambda(t) \cdot p + \sin\lambda(t) \cdot X_p,$$

hvor summen er sædvanlig vektor addition i E^{n+1}.



Det er let at verificere, at F er en glat homotopi mellem 1_{S^n} og A. Da n er lige, har vi derfor en modstrid med lemma 13.6.

Dermed er sætningen bevist.

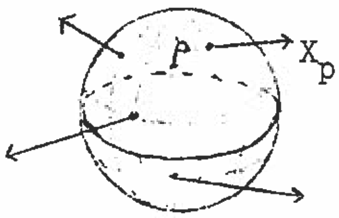
Vi får nu straks følgende korollar til sætningerne 6.24. og 13.7.

Korollar 13.8. For n ulige kan E^n ikke forsynes med en multiplikation, ved hvilken det bliver en reel divisions algebra.

Specielt kan E^3 altså ikke forsynes med en multiplikation uden nul-divisorer.

Vi kan give en ækvivalent formulering af sætning 13.7.

Ved et differentiabelt felt af vektorer i E^{n+1} på S^n forstår vi en differentiabel afbildning $X: S^n \longrightarrow E^{n+1}$. X_p betegner felt vektoren knyttet til $p \in S^n$.



Sætning 13.7 er nu klart ækvivalent med

Sætning 13.7'. Hvis n er lige, og X er et differentiabelt felt af vektorer i E^{n+1} på S^n, findes der mindst et punkt $p \in S^n$, hvor X_p er normal til S^n.

For $n = 2$ viser sætning 13.7', at der altid vil være mindst en pig, der stritter på et (idealiseret) pindsvin.

Sætning 13.7 viser for $n = 2$ f.eks., at en fysiker ikke kan skabe et elektrisk felt på en kugleflade, sådan at enhver feltvektor er tangent til kuglefladen og forskellig fra nulvektoren, og således at feltvektorerne varierer differentiabelt hen over kuglefladen.

Bemærkning. Ved at bruge approximationssætningen (sætning 11.8) kan man let vise, at sætningerne 13.7 og 13.7' også gælder, når feltet X blot er kontinuert.

Til sidst vil vi vise, at hvis n er ulige, findes der et differentiabelt vektorfelt X på S^n, således at $X_p \neq 0$ for ethvert $p \in S^n$.

Antag, at $n+1 = 2k$ og lad $(u_1, \dots, u_{2k}) \in E^{n+1}$ være koordinaterne i E^{n+1}.

For $p = (u_1, \dots, u_{2k}) \in S^n$ sætter vi

$$X_p = (-u_2, u_1, \dots, -u_{2k}, u_{2k-1}) .$$

Da $(p, X_p) = 0$ og $X_p \neq 0$ for ethvert $p \in S^n$ ser vi, at X er et differentiabelt vektorfelt på S^n som ønsket.

Opgaver.

Opgave 1. Gennemfør manglende detaljer i sætning 13.5.

Opgave 2. Lad a og b være vilkårlige reelle tal. Konstruer en differentiabel afbildning $\lambda : E^1 \to E^1$, således at $\lambda(t) = a$ for $t \leqq 0$ og $\lambda(t) = b$ for $t \geqq 1$.

Opgave 3. Lad M og N være vilkårlige differentiable mangfoldigheder. Vis, at glat homotopi er en ækvivalensrelation i mængden af differentiable afbildninger $f : M \to N$.

Opgave 4. En differentiabel afbildning $F : M \to N$ kaldes en glat homotopi ækvivalens, hvis der findes en differentiabel afbildning $G : N \to M$, således at $G \circ F \sim 1_M$ ($\sim$ = glat homotope) og $F \circ G \sim 1_N$. M og N siges at være af samme glatte homotopitype, hvis der findes en glat homotopi ækvivalens $F : M \to N$.

Vis, at E^n har samme glatte homotopitype som et punkt (en 0-dimensional differentiabel mangfoldighed).

Vis, at S^n og S^m har samme glatte homotopitype, hvis og kun hvis $n = m$.

Opgave 5. Lad $f : S^n \to S^n$ være en vilkårlig differentiabel (kontinuert er nok) afbildning. Vis, at hvis n er lige, findes der mindst et punkt $p \in S^n$, så $f(p) = p$ eller $f(p) = -p$.

Opgave 6. Lad X være et vilkårligt topologisk rum homeomorf med B^n. Vis, at enhver kontinuert afbildning $F: X \to X$ har mindst et fixpunkt.

Opgave 7. Lad M^n være en n-dimensional orienteret, parakompakt differentiabel mangfoldighed, og lad N^{n-1} være en $(n-1)$ - dimensional del-mangfoldighed af M. Antag endvidere, at N udgør randen på et kompakt område med regulær rand i M. Lad $I: N \to M$ være inklusionsafbildningen og lad 1_N være den identiske afbildning på N.

Vis, at der ikke findes en differentiabel afbildning $F: M \to N$, der udvider identiteten på N, dvs. så $1_N = F \circ I$

§14. De Rham cohomologi og afbildningsgrad.

Lad M^n være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Definition 14.1. Betragt $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$.

ω siges at være en lukket r-form på M, hvis $d\omega = 0$.

ω siges at være en exact r-form på M, hvis der findes en $(r-1)$ - form $\omega' \in \mathcal{D}^{r-1}(M)$, således at $\omega = d\omega'$.

Eksempel 14.2. Betragt E^3 med koordinater $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$. Lad

$$\omega = f_1 du_1 + f_2 du_2 + f_3 du_3$$

være en 1-form på E^3. Da

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3}\right) du_2 \wedge du_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_1}\right) du_3 \wedge du_1$$
$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) du_1 \wedge du_2$$

ser vi, at ω er lukket, hvis og kun hvis rotationen af vektorfunktionen $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ er 0.

Det er endvidere klart, at ω er exact, hvis og kun hvis der findes en differentiabel funktion $f: E^3 \longrightarrow E^1$, således at

$$\underline{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3}\right) .$$

Det fremgår heraf, at definition 14.1. er en umiddelbar generalisation af kendte begreber fra matematik 1. Betydningen af lukkede og exacte 1-former i fysikken i forbindelse med f.eks. konservative kraftfelter er velkendt.

Exempel 14.2. slut!

Betragt nu for $r \geq 0$ diagrammet

$$\mathcal{D}^{r-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^r(M) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^{r+1}(M),$$

hvor de lineære afbildninger d er restriktionerne af det ydre differential $d: \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ til $\mathcal{D}^{r-1}(M)$ og $\mathcal{D}^r(M)$. For $r = 0$ skal $\mathcal{D}^{-1}(M)$ fortolkes som 0-vektorrummet.

Da d er lineær, får vi 2 underrum i $\mathcal{D}^r(M)$, nemlig

$$Z^r(M) = \{ \omega \in \mathcal{D}^r(M) \mid d\omega = 0 \}$$

og

$$B^r(M) = \{ \omega \in \mathcal{D}^r(M) \mid \exists \omega' \in \mathcal{D}^{r-1}(M) : \omega = d\omega' \} \quad .$$

Det fremgår af definition 14.1, at $Z^r(M)$ netop består af de lukkede r-former på M og $B^r(M)$ af de exacte r-former på M.

Notation. I det følgende står $Z^r(M)$ og $B^r(M)$ for henholdsvis vektorrummet af lukkede og vektorrummet af exacte r-former på M.

Sætning 14.3. Enhver exact r-form på M er lukket, eller ækvivalent : $B^r(M)$ er et underrum af $Z^r(M)$ $\forall r \geq 0$.

Bevis. $d(d\omega') = 0 \ \forall \omega' \in \mathcal{D}^{r-1}(M)$ (lemma 8.9). Bevis slut!

Sætning 14.3 indbyder til følgende spørgsmål for ethvert helt tal $r \geq 1$:

Spørgsmål 14.4. Er enhver lukket r-form på M exact ?

Dette spørgsmål må i de fleste tilfælde besvares benægtende, og kun for meget specielle mangfoldigheder kan spørgsmålet besvares bekræftende for alle $r \geq 1$.

Vi kan opstille et mål for "afvigelsen" fra et bekræftende svar til spørgsmål 14.4. Da $B^r(M)$ er et underrum i $Z^r(M)$ (sætning 14.3), kan vi danne kvotient-vektorrummet

$$H^r(M) = Z^r(M) / B^r(M) \quad \forall r \geq 0.$$

Det er nu klart, at $H^r(M) = 0$ giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at enhver lukket r-form på M er exact.

$H^r(M)$ kaldes for den r-te <u>De Rham cohomologi gruppe</u> af M.

Bemærkning. Betydningen af ovenstående formulering ligger i, at vektorrummene $H^r(M)$ kan beregnes ved andre metoder end differential former. Dette skyldes en sætning af De Rham, hvis formulering og bevis hører hjemme i den algebraiske topologi.

Som en fascinerende ting viser denne sætning bl.a., at vektorrummene $H^r(M)$ ikke afhænger af den differentiable struktur på M, selv om denne indgår kraftigt i definitionen, men kun af M som topologisk rum. Vi kan ikke her komme nærmere ind på disse interessante problemstillinger.

Hvis $F: M \longrightarrow N$ er en vilkårlig differentiabel afbildning, kan vi for ethvert $r \geqq 0$ betragte den inducerede lineære afbildning

$$F^*: \mathcal{D}^r(N) \longrightarrow \mathcal{D}^r(M)$$

Da F^* kommuterer med det ydre differential (sætning 8.13), følger det umiddelbart, at

$$F^*(Z^r(N)) \subseteqq Z^r(M)$$

og

$$F^*(B^r(N)) \subseteqq B^r(M)$$

Der findes derfor en entydig bestemt lineær afbildning

$$H^r(F): H^r(N) \longrightarrow H^r(M)$$

således at $H^r(F)\,(\mathrm{cls}(\omega)) = \mathrm{cls}(F^*(\omega))$ for enhver lukket r-form $\omega \in Z^r(N)$.

<u>Sætning 14.5</u>. Hvis $F: M \longrightarrow N$ er en vilkårlig differentiabel afbildning, får vi for ethvert $r \geqq 0$ en induceret lineær afbildning

$$H^r(F): H^r(N) \longrightarrow H^r(M)$$

$H^r(\cdot)$ bliver herved en contravariant funktor fra kategorien af differentiable mangfoldigheder til kategorien af reelle vektorrum.

<u>Bevis</u>. $H^r(F)$ er konstrueret ovenfor. At $H^r(\cdot)$ herved bliver en contravariant funktor som beskrevet følger af, at F^* er en contravariant funktur (sætning 8.14). Bevis slut!

I det følgende skal vi se, hvordan man i visse dimensioner kan beregne De Rham cohomologi grupperne.

Sætning 14.6. Lad M^n være en vilkårlig n-dimensional differentiabel mangfoldighed.

Hvis $r > n$ gælder altid $H^r(M) = 0$.

Hvis M er sammenhængende, er $H^o(M) \simeq \mathbb{R}$ (isomorfi som reelle vektorrum), hvor $\mathbb{R}$ betegner de reelle tals legeme.

Bevis. Da $\mathcal{D}^r(M^n) = 0$ for $r > n$ følger det straks, at $H^r(M^n) = 0$ for $r > n$.

Idet $B^o(M) = 0$ har vi:

$$H^o(M) = Z^o(M)$$

En 0-form, dvs. en differentiabel funktion $f: M \longrightarrow E^1$, er lukket, hvis og kun hvis differentialet $df = 0$.

Når M er sammenhængende, er det let at indse, at $df = 0$, hvis og kun hvis f er konstant (§7, opgave 8). Da vektorrummet af konstante funktioner på M (her som vi har set $Z^o(M)$) klart er isomorf med $\mathbb{R}$, er beviset ført.

Idet vi forsætter vor beregning af cohomologi grupper, bebetragter vi nu igen spørgsmål 14.4.

Poincaré's lemma omtaler en række mangfoldigheder for hvilke spørgsmål 14.4. kan besvares bekræftende for alle $r \geq 1$. Først beskriver vi disse mangfoldigheder.

Definition 14.7. En åben delmængde D af E^n siges at være stjerneformet m.h.t. $u_o \in D$, hvis linien i E^n fra u_o til $u \in D$ helt forløber i D $\forall u \in D$.

Exempler. E^n m.h.t. et vilkårligt punkt. Enhver åben kugle i E^n m.h.t. sit centrum. Følgende figur er et exempel i planen:

Sætning 14.8. (Poincaré's lemma).

Lad D være en åben delmængde af E^n, som er stjerneformet m.h.t. $0 \in D \subseteq E^n$.

Så er enhver lukket r-form på D exact for $r \geq 1$ (ækvivalent: $H^r(D) = 0 \quad \forall r \geq 1$).

Bevis. Vi vil føre beviset ved for ethvert $r \geq 1$ at konstruere en lineær afbildning

$$h_{r-1}: \mathscr{D}^r(D) \longrightarrow \mathscr{D}^{r-1}(D),$$

således at

$$d \circ h_{r-1} + h_r \circ d = 1_{\mathscr{D}^r(D)} \qquad \forall r \geq 1.$$

Påstand. Hvis vi kan finde lineære afbildninger h_{r-1} og h_r, der tilfredsstiller ovenstående identitet, er enhver lukket r-form på D exact for $r \geq 1$.

Bevis. Antag, at ω er en lukket r-form på D for $r \geq 1$. Da $d\omega = 0$, får vi:

$$\begin{aligned}\omega &= d(h_{r-1}(\omega)) + h_r(d\omega)\\ &= d(h_{r-1}(\omega)).\end{aligned}$$

Dette viser, at ω er exact, og påstanden er bevist.

Konstruktion af h_{r-1}.

Lad $(u_1, \ldots, u_n) \in D \subseteq E^n$ betegne koordinaterne i D.

Da h_{r-1} skal være lineær, er det tilstrækkeligt at angive værdien af h_{r-1} på et system af frembringere for $\mathscr{D}^r(D)$. Vi behøver derfor kun at angive $h_{r-1}(\omega)$ for ω på formen

$$\omega = f\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r},$$

hvor $f: D \longrightarrow E^1$ er en differentiabel funktion. Definitionen udstrækkes så til hele $\mathscr{D}^r(D)$ ved linearitet.

Til r-formen $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ lader vi nu svare en (r-1)-form $\mu \in \mathcal{D}^{r-1}(D)$, hvor $\mu(u)$ for $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$ er defineret ved fastsættelsen:

$$\begin{aligned}\mu(u) = {} & u_{i_1}\, du_{i_2} \wedge du_{i_3} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \\ & -u_{i_2}\, du_{i_1} \wedge du_{i_3} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \\ & \vdots \\ & (-1)^{r-1} u_{i_r}\, du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \ldots \wedge du_{i_{r-1}}\end{aligned}$$

Vi definerer dernæst $h_{r-1}(\omega) \in \mathcal{D}^{r-1}(D)$ ved fastsættelsen:

$$h_{r-1}(\omega)\,(u) = \left(\int_0^1 t^{r-1} f(t\cdot u)dt\right)\mu(u)$$

for ethvert $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$.

$t\cdot u$ er her sædvanlig skalær multiplikation af vektoren u med skalaren t. Da D er stjerneformet m.h.t. $0 \in D$, ser vi, at $t\cdot u \in D$ $\forall t \in [0,1]$, således at $f(t\cdot u)$ har mening.

Afbildningen h_r defineres analogt i dimension $r+1$.

Kontrol af formlen $d \circ h_{r-1} + h_r \circ d = 1_{\mathcal{D}^r(D)}$.

Da alle afbildninger i formlen er lineære, behøver vi kun at kontrollere den på r-formerne

$$\omega = f\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}.$$

For $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$ får vi nu:

$$\begin{aligned} & d(h_{r-1}(\omega))(u) \\ = {} & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\int_0^1 t^{r-1} f(t\cdot u)dt\right)du_j \wedge \mu(u) \\ & + \left(\int_0^1 t^{r-1} f(t\cdot u)dt\right)d\mu(u) \\ = {} & \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^{r-1} \frac{\partial}{\partial u_j} f(t\cdot u)dt\right)du_j \wedge \mu(u) \\ & + \left(\int_0^1 t^{r-1} f(t\cdot u)dt\right)(r\cdot du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r})(u).\end{aligned}$$

I det sidste lighedstegn har vi brugt, at

$$d\mu = r\cdot du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$$

(kontroller dette).

Ved at betragte den sammensatte funktion

$$u \in D \curvearrowright t\cdot u \in D \curvearrowright f(tu) \in E^1$$

ser vi ved hjælp af kædereglen, at

$$\frac{\partial}{\partial u_j} f(t\cdot u) = \frac{\partial f}{\partial u_j}(t\cdot u)\cdot t \ .$$

Vi får så:

$$d(h_{r-1}(\omega))(u)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^r \frac{\partial f}{\partial u_j}(t\cdot u)dt\right)du_j \wedge \mu(u)$$

$$+ r\cdot\left(\int_0^1 t^{r-1} f(t\cdot u)dt\right)du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}(u) \ .$$

Vi beregner dernæst $h_r(d\omega)(u)$:

$$h_r(d\omega)(u)$$

$$= h_r\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(u)du_j\wedge du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^r \frac{\partial f}{\partial u_j}(t\cdot u)dt\right)\left[u_j\, du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r} - du_j\wedge\mu(u)\right].$$

Vi har i ovenstående blot afspillet definitionen af h_r. Overvej, at $[\ldots - \ldots]$ er "μ" hørende til $(r+1)$-formen $du_j\wedge du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$.

Ved addition af de udledte formler får vi:

$$(d\circ h_{r-1} + h_r\circ d)(\omega)(u)$$

$$= \left(\int_0^1\left\{ r\cdot t^{n-1} f(t\cdot u) + t^r\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}(t\cdot u)u_j\right\}dt\right)\cdot$$

$$du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r} \ .$$

Benytter vi nu kædereglen på den sammensatte afbildning

$$t \in E^1 \curvearrowright t\cdot u \in D \curvearrowright f(t\cdot u) \in E^1$$

ser vi, at

$$\frac{d}{dt} f(t\cdot u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(t\cdot u)u_j \; .$$

Det følger så, at

$$(d \circ h_{r-1} + h_r \circ d)(\omega)(u)$$

$$= \left(\int_0^1 \left\{ r\cdot t^{r-1} f(t\cdot u) + t^r \frac{d}{dt} f(t\cdot u) \right\} dt\right) \cdot du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ t^r f(t\cdot u) \right\} dt\right) du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$$

$$= f(u) du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r} = \omega(u) \; .$$

Dette viser, at

$$\omega = (d \circ h_{r-1} + h_r \circ d)(\omega) \; .$$

Dermed er den omspurgte formel bevist.
Dette afslutter beviset for Poincaré's lemma.

Bemærkning. Hvis $\omega \in \mathscr{D}^r(D)$ er en lukket r-form på D for $r \geq 1$, har vi i beviset for Poincaré's lemma explicit fundet en $(r-1)$-form på D, nemlig $h_{r-1}(\omega) \in \mathscr{D}^{r-1}(D)$, således at $\omega = d(h_{r-1}(\omega))$. Dette kan være nyttigt at vide i konkrete situationer.

Opgave 1. Lad D være en åben delmængde af E^n, som er stjerneformet m.h.t. $0 \in D \subseteq E^n$.

Lad ω være en lukket r-form på D for $r \geq 1$, og lad ω_0' være en $(r-1)$-form på D, så $\omega = d\omega_0'$.

$r = 1$. Vis, at $\omega' = \omega_0' +$ konstant er samtlige 0-former på D, så $\omega = d\omega'$.

$r > 1$. Vis, at $\omega' = \omega_0' + d\omega''$ for $\omega'' \in \mathscr{D}^{r-2}(D)$ er samtlige $(r-1)$-former på D, så $\omega = d\omega'$.

Opgave 2. Lad $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ være de sædvanlige koordinater på E^3.

Betragt følgende system af sammenhørende partielle differential ligninger:

$$\frac{\partial R}{\partial u_2} - \frac{\partial Q}{\partial u_3} = u_1$$

$$\frac{\partial P}{\partial u_3} - \frac{\partial R}{\partial u_1} = u_2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} - \frac{\partial P}{\partial u_2} = -2u_3 \quad ,$$

hvor $P, Q, R: E^3 \to E^1$ er differentiable afbildninger.

Vis, at systemet har en løsning og find dernæst samtlige løsninger.

Hint. Betragt 1-formen

$$\omega' = P\,du_1 + Q\,du_2 + R\,du_3$$

og 2-formen

$$\omega = A\,du_2 \wedge du_3 + B\,du_3 \wedge du_1 + C\,du_1 \wedge du_2$$

på E^3.

Vis, at ω er lukket, hvis og kun hvis

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} + \frac{\partial B}{\partial u_2} + \frac{\partial C}{\partial u_3} = 0$$

Bestemt dernæst $d\omega'$. Løs opgaven.

Vi ønsker nu at beregne $H^n(M^n)$, for en kompakt, sammenhængende orienteret differentiabel mangfoldighed.

Dette kræver en teknisk forberedelse. Lad K^n være følgende lukkede n-kubus i E^n :

$$K^n = \{(u_1, \ldots, u_n) \in E^n \mid |u_i| \leq 1 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

Lad endvidere $a: E^1 \to E^1$ være en reel funktion af en reel variabel, således at

i) $\forall t \in E^1 : a(t) \geqq 0$

ii) $st(a) \subseteqq K^1 = [-1,1]$

iii) $\int_{E^1} a = 1$.

Definer dernæst en n-form Ω_{E^n} på E^n ved fastsættelsen:

$$\Omega_{E^n}(u_1, \ldots, u_n) = a(u_1) \cdot \ldots \cdot a(u_n)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Det er nu klart, at

$$st(\Omega_{E^n}) \subseteqq K^n$$

og at

$$\int_{E^n} \Omega_{E^n} = 1$$

Fra lemma 12.4 følger umiddelbart, at mængden af former på E^n med støtte inden for K^n udgør en differentielt gradueret del-algebra af $\mathscr{D}(E^n)$.

Lemma 14.9. Der findes en lineær afbildning I_{n-1} fra vektorrummet af n-former på E^n med støtte i K^n til vektorrummet af (n-1)-former på E^n med støtte i K^n, således at

$$d(I_{n-1}(\omega)) = \omega - \left(\int_{E^n} \omega\right) \Omega_{E^n}$$

for enhver n-form ω på E^n med støtte i K^n.

Bemærk, at $st(I_{n-1}(\omega)) \subseteqq K^n$.

Bevis. Lad ω være en vilkårlig n-form på E^n med støtte i K^n.

Som bekendt findes der en entydig bestemt differentiabel funktion $f: E^n \longrightarrow E^1$, således at

$$\omega(u_1, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Beviset forløber ved induktion.

<u>n = 1</u>. Definer

$$I_o(\omega)(u_1) = \int_{-\infty}^{u_1}\left\{f(t) - a(t)\cdot\left(\int_{E^1}\omega\right)\right\} dt$$

Da både a og f har støtte inden for K^1 og $\int_{E^1} a = 1$, ser man let, at $st(I_o(\omega)) \subseteqq K^1$.

Det er endvidere klart, at

$$(d\,I_o(\omega))(u_1) = \left\{f(u_1) - a(u_1)\cdot\left(\int_{E^1}\omega\right)\right\} du_1$$

$$= \omega(u_1) - \left(\int_{E^1}\omega\right)\Omega_{E^1}(u_1)$$

for ethvert $u_1 \in E^1$. Dvs.

$$d\,I_o(\omega) = \omega - \left(\int_{E^1}\omega\right)\Omega_{E^1},$$

hvilket skulle vises. Det er klart, at I_o således konstrueret er lineær.

<u>n = 2</u>. Betragt for ethvert $u_2 \in E^1$ 1-formen ω_{u_2} på E^1 defineret ved fastsættelsen:

$$\forall u_1 \in E^1 : \omega_{u_2}(u_1) = f(u_1,u_2)\,du_1$$

Da $st(\omega_{u_2}) \subseteqq K^1$, kan vi danne 0-formen $I_o(\omega_{u_2})$ på E^1. Der gælder så

$$st(I_o(\omega_{u_2})) \subseteqq K^1 .$$

Idet $p: E^2 \longrightarrow E^1$ betegner den naturlige projektion, definerer vi nu $I_1(\omega)$ ved fastsættelsen:

$$I_1(\omega)(u_1,u_2) = p^*(I_o(\omega_{u_2}))\,(u_1,u_2)\wedge du_2$$

$$- \left(\int_{-\infty}^{u_2}\left\{\int_{E^1}\omega_t - a(t)\cdot\left(\int_{E^2}\omega\right)\right\} dt\right)a(u_1)\,du_1$$

Da

i) $\operatorname{st}(I_o(\omega_{u_2})) \subseteqq K^1 \qquad \forall u_2 \in E^1$

ii) $I_o(\omega_{u_2}) = 0$ for $|u_2|>1$, idet $\omega_{u_2} = 0$ for $|u_2|>1$ og I_o er lineær.

iii) $\int_{-\infty}^{u_2} \{\int_{E^1} \omega_t\} dt = \int_{E^2} \omega$ for $u_2 \geqq 1$

iv) $\int_{E^1} a = 1$

indser man let, at

$$\operatorname{st}(I_1(\omega)) \subseteqq K^2.$$

En lille overvejelse viser endvidere, at $(dI_1(\omega))(u_1,u_2)$

$$= p^*(dI_o(\omega_{u_2}))\,(u_1,u_2) \wedge du_2$$

$$- (\int_{E^1} \omega_{u_2} - a(u_2)\cdot(\int_{E^2}\omega\,))\, du_2 \wedge a(u_1)du_1$$

$$= p^*(\omega_{u_2} - (\int_{E^1} \omega_{u_2})\Omega_{E^1})(u_1,u_2) \wedge du_2$$

$$+ (\int_{E^1} \omega_{u_2})\, a(u_1)\, du_1 \wedge du_2 - (\int_{E^2}\omega\,)\Omega_{E^2}(u_1,u_2)$$

$$= \omega(u_1,u_2) - (\int_{E^2}\omega\,)\Omega_{E^2}\,(u_1,u_2).$$

Vi ser altså, at

$$dI_1(\omega) = \omega - (\int_{E^2}\omega)\,\Omega_{E^2}$$

hvilket skulle bevises. Det er endvidere klart, at I_1 således defineret er lineær.

Induktionsskridt. Antag, at I_{n-2} er konstrueret.
Vi har stadig

$$\omega(u_1, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

For ethvert $u_n \in E^1$ definerer vi (n-1)-formen ω_{u_n} på E^{n-1} ved fastsættelsen:

$$\omega_{u_n}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

for ethvert $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in E^{n-1}$.

Da $st(\omega_{u_n}) \subseteqq K^{n-1}$ kan vi danne (n-2)-formen $I_{n-2}(\omega_{u_n})$ på E^{n-1}.

Der gælder så

$$st(I_{n-2}(\omega_{u_n})) \subseteqq K^{n-1} \quad .$$

Idet $p: E^n \to E^{n-1}$ betegner den naturlige projektion definerer vi nu $I_{n-1}(\omega)$ ved fastsættelsen:

$$I_{n-1}(\omega)(u_1, \ldots, u_n)$$

$$= p^*(I_{n-2}(\omega_{u_n}))(u_1, \ldots, u_n) \wedge du_n$$

$$+ (-1)^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{u_n} \left\{ \int_{E^{n-1}} \omega_t - a(t) \cdot \left(\int_{E^n} \omega\right) \right\} dt\right) a(u_1) \ldots a(u_{n-1})$$

$$\cdot du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

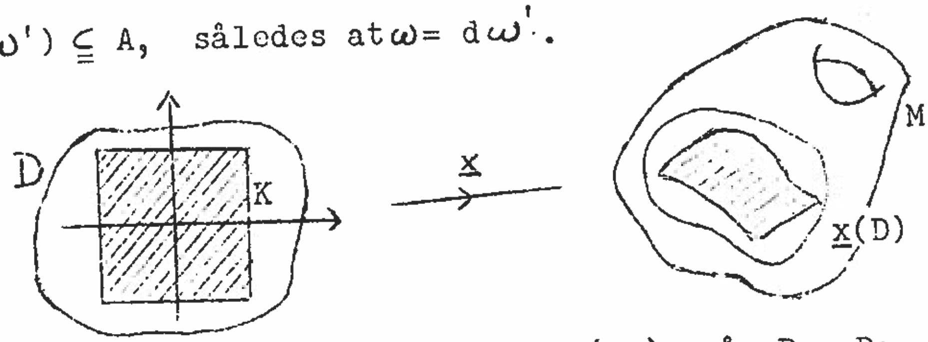
Man verificerer nu som for $n = 2$, at $st(I_{n-1}(\omega)) \subseteqq K^n$, og at

$$d\, I_{n-1}(\omega) = \omega - \left(\int_{E^n} \omega\right) \Omega_{E^n}$$

Det fremgår endvidere, at I_{n-1} er lineær.
Dermed er beviset ført.

Lemma 14.10. Lad M^n være en parakompakt orienteret differentiabel mangfoldighed, og lad A være en kompakt delmængde af M. Antag, at der findes et kort $\underline{x}$ på M med koordinater i $D \subseteqq E^n$, således at $K^n \subset D$ og således at $A = \underline{x}(K^n)$.
Så gælder:

Hvis ω er en n-form på M, således at $st(\omega) \subseteqq A$ og $\int_M \omega = 0$, findes der en (n-1)-form ω' på M med st$(\omega') \subseteq A$, således at $\omega = d\omega'$.



Bevis. Betragt n-formen $\underline{x}^*(\omega)$ på D. Da st$(\underline{x}^*(\omega)) \subseteq K^n \subset D$, kan vi definere en differential form ω^* på E^n ved fastsættelsen:

$$\omega^* | D = \underline{x}^*(\omega)$$

$$\omega^* | E^n \setminus D = 0$$

Idet $\int_M \omega = 0$, får vi pr. definition af integralet, at $\int_{E^n} \omega^* = 0$.

Ifølge lemma 14.9 findes der så en (n-1) form $(\omega')^*$ på E^n, således at st$((\omega')^*) \subseteq K^n$ og således at $\omega^* = d((\omega')^*)$.

Da $\underline{x}: D \longrightarrow \underline{x}(D)$ er en diffeomorfi, findes nu en entydig bestemt (n-1)-form ω' på M, således at st$(\omega') \subseteq A$, og således at $\underline{x}^*(\omega') = (\omega')^* | D$.

Så får vi:

$$\underline{x}^*(\omega) = d(\underline{x}^*(\omega')) = \underline{x}^*(d\omega')$$

hvoraf følger, at $\omega = d\omega'$. Hermed er beviset ført

Det væsentlige skridt i udregningen af $H^n(M^n)$ er indeholdt i følgende sætning, der også har interesse i sig selv.

Sætning 14.11. Lad M^n være en sammenhængende, kompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed. Så gælder:

En n-form ω på M er exact, hvis og kun hvis $\int_M \omega = 0$.

Bevis. Antag først, at ω er en exact n-form på M. Der existerer så en (n-1)-form ω' på M, således at $\omega = d\omega'$. Fra Stokes' sætning følger nu straks:

$$\int_M \omega = \int_M d\omega' = \int_{\partial M} \omega' = \int_{\emptyset} \omega' = 0,$$

hvilket skulle bevises.

Antag nu omvendt, at ω er en n-form på M med $\int_M \omega = 0$.

Da M er kompakt, kan vi finde en endelig overdækning $V_o, V_1, \ldots, V_k$ af M med åbne mængder, således at der for ethvert $i = 0, 1, \ldots, k$ findes en åben mængde U_i i M med følgende egenskaber:

i) $V_i \subset U_i$

ii) $U_i = \underline{\underline{x}}_i(D)$ for et positivt orienteret kort $\underline{\underline{x}}_i$ på M med koordinater i den åbne mængde $D \subseteq E^n$.

iii) $K^n = \{(u_1, \ldots, u_n) \in E^n \mid |u_i| < 1\} \subset D$

iv) $V_i = \underline{\underline{x}}_i\,(\operatorname{int} K^n)$.

Lad $\mathcal{F} = \{f_o, f_1, \ldots, f_k\}$ være en deling af enheden associeret med overdækningen $\mathcal{V} = \{V_o, V_1, \ldots, V_k\}$.

Vælg nu en n-form Ω_o på M, således at

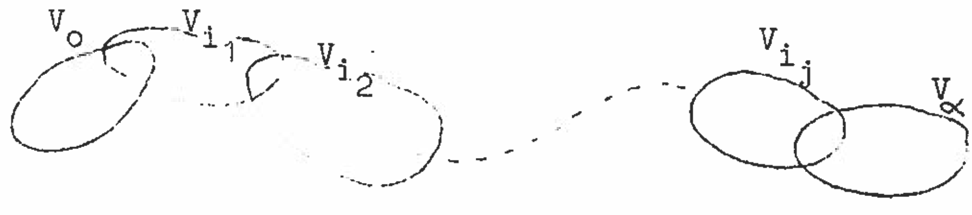
$$\operatorname{st}(\Omega_o) \subset V_o \quad \text{og} \quad \int_M \Omega_o = 1.$$

Påstand. For hvert $\alpha = 0, 1, \ldots, k$ findes en reel skalar c_α og en $(n-1)$-form ω_α på M, således at

$$f_\alpha \omega = d\omega_\alpha + c_\alpha \Omega_o$$

Bevis for påstand. Da M er sammenhængende, kan vi finde mængder $V_{i_1}, \ldots, V_{i_j}$ i overdækningen $\mathcal{V}$, således at

$$V_o \cap V_{i_1} \neq \emptyset, \quad V_{i_1} \cap V_{i_2} \neq \emptyset, \quad \ldots, V_{i_j} \cap V_\alpha \neq \emptyset$$



Vælg nu n-former $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_j}, \Omega_\alpha$ på M, således at

$$\mathrm{st}(\Omega_{i_1}) \subset V_o \cap V_{i_1} \quad \text{og} \quad \int_M \Omega_{i_1} = 1$$

$$\mathrm{st}(\Omega_{i_2}) \subset V_{i_1} \cap V_{i_2} \quad \text{og} \quad \int_M \Omega_{i_2} = 1$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{st}(\Omega_{i_j}) \subset V_{i_{j-1}} \cap V_{i_j} \quad \text{og} \quad \int_M \Omega_{i_j} = 1$$

$$\mathrm{st}(\Omega_\alpha) \subset V_{i_j} \cap V_\alpha \quad \text{og} \quad \int_M \Omega_\alpha = 1$$

Betragt så formen $\Omega_{i_1} - \Omega_o$ på M. Vi ser, at

$$\mathrm{st}(\Omega_{i_1} - \Omega_o) \subseteq \mathrm{st}(\Omega_{i_1}) \cup \mathrm{st}(\Omega_o) \subset V_o$$

og

$$\int_M (\Omega_{i_1} - \Omega_o) = 0 .$$

Fra lemma 14.10 følger så, at der findes en $(n-1)$-form $\tilde{\omega}_o$ på M, således at

$$\Omega_{i_1} - \Omega_o = d\tilde{\omega}_o .$$

Betragt dernæst formen $\Omega_{i_2} - \Omega_{i_1}$ på M. Vi finder her, at

$$\mathrm{st}(\Omega_{i_2} - \Omega_{i_1}) \subset V_{i_1} \quad \text{og} \quad \int_M (\Omega_{i_2} - \Omega_{i_1}) = 0 .$$

Lemma 14.10 giver nu igen existensen af en $(n-1)$-form $\tilde{\omega}_{i_1}$ på M, således at

$$\Omega_{i_2} - \Omega_{i_1} = d\tilde{\omega}_{i_1}$$

På denne måde bestemmer vi nu $(n-1)$-former $\tilde{\omega}_o, \tilde{\omega}_{i_1}, \ldots, \tilde{\omega}_{i_j}$ på M, hvor til sidst

$$\Omega_\alpha - \Omega_{i_j} = d\tilde{\omega}_{i_j}$$

Betragt nu endelig formen $f_\alpha \omega - c_\alpha \Omega_\alpha$, hvor $c_\alpha = \int_M f_\alpha \omega$.
Da

$$st(f_\alpha \omega - c_\alpha \Omega_\alpha) \subset V_\alpha$$

og

$$\int_M (f_\alpha \omega - c_\alpha \Omega_\alpha) = 0$$

findes der ifølge lemma 14.10 en (n-1)-form $\tilde{\omega}_\alpha$ på M, således at

$$f_\alpha \omega - c_\alpha \Omega_\alpha = d\tilde{\omega}_\alpha .$$

Ved addition af alle de udledte formler finder vi nu:

$$f_\alpha \omega - c_\alpha \Omega_0 = d(\tilde{\omega}_\alpha + c_\alpha \tilde{\omega}_{i_j} + \dots + c_\alpha \tilde{\omega}_0) .$$

Sættes $\omega_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha + c_\alpha \tilde{\omega}_{i_j} + \dots + c_\alpha \tilde{\omega}_0$, får vi nu netop den søgte formel

$$f_\alpha \omega = d\omega_\alpha + c_\alpha \Omega_0 .$$

Dette beviser påstanden.

Da $\mathcal{F}$ er en deling af enheden får vi nu:

$$\omega = \sum_{\alpha=0}^{k} f_\alpha \omega = d\left(\sum_{\alpha=0}^{k} \omega_\alpha\right) + \left(\sum_{\alpha=0}^{k} c_\alpha\right)\Omega_0 .$$

Sætter vi $\omega' = \sum_{\alpha=0}^{k} \omega_\alpha$ og $c = \sum_{\alpha=0}^{k} c_\alpha$, reduceres denne ligning til

$$\omega = d\omega' + c \cdot \Omega_0 .$$

Ved integration af denne ligning og udnyttelse af Stokes' sætning får vi:

$$\int_M \omega = \int_M d\omega' + c \cdot \int_M \Omega_0 = c .$$

Da $\int_M \omega = 0$, får vi altså $c = 0$ og derfor $\omega = d\omega'$. Dette viser, at ω er exact.

Dermed er sætning 14.11 bevist.

Den ønskede sætning følger nu let.

Sætning 14.12. Lad M^n være en sammenhængende, kompakt, orienteret differentiabel mangfoldighed, og lad $c_M : \mathcal{D}^n(M) \to H^n(M)$ være den lineære afbildning, som afbilder en n-form på sin cohomologiklasse. Lad endvidere $\mathbb{R}$ være de reelle tals legeme. Så gælder:

Der findes en entydig bestemt isomorfi

$$\mathcal{J}_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$$

mellem reelle vektorrum, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^n(M) \arrow[d, "c_M"'] \arrow[dr, "\int_M"] & \\
H^n(M) \arrow[r, dashed, "\mathcal{J}_M"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Specielt gælder altså: $H^n(M) \cong \mathbb{R}$.

Bevis. Idet $\mathcal{D}^n(M^n) = Z^n(M)$ har vi

$$H^n(M) = \mathcal{D}^n(M)/B^n(M)$$

Da $\int_M$ er 0 på $B^n(M)$ ifølge Stokes' sætning, findes der en entydig bestemt lineær afbildning $\mathcal{J}_M$, så det omspurgte diagram kommuterer.

Der findes en n-form ω på M, således at $\int_M \omega = 1$. Da $\mathcal{J}_M$ er lineær, viser dette, at $\mathcal{J}_M$ er på.

Antag dernæst, at $\mathcal{J}_M(c_M(\omega)) = 0$ for en n-form ω på M. Da $\int_M \omega = 0$, følger så fra sætning 14.11, at ω er exact. Derfor er $c_M(\omega) = 0 \in H^n(M)$. Da $\mathcal{J}_M$ er lineær, viser dette, at $\mathcal{J}_M$ er 1-1-tydig.

Vi har dermed indset, at $\mathcal{J}_M$ er en isomorfi, og beviset er ført.

I det følgende har vi brug for at vide, at en differentiabel afbildning $F: M^n \to N^n$ altid har en regulær værdi. Dertil bemærker vi først, at behandlingen af regulære punkter og værdier i "Indledning til differentialgeometri og differentialtopologi", §6 ikke benytter, at mangfoldighederne ligger i euklidiske rum. Teorien her går derfor uændret over til vilkårlige differentiable mangfoldigheder.

Existens af regulære værdier sikres gennem følgende sætning:

Sætning 14.13. Lad $F: M^n \to N^n$ være en vilkårlig differentiabel afbildning. Så gælder:

Mængden af regulære værdier for F udgør en overalt tæt delmængde af N.

Denne sætning skyldes A.B. Brown (1935). Den fås nu som et korollar til en mere generel sætning af A. Sard (1942), der fortæller, at mængden af kritiske værdier for F har mål nul på N (mål nul kan let defineres). Sard's sætning spiller en væsentlig rolle i differentialtopologien. Vi vil ikke bevise den her, selvom det ikke er uoverstigeligt vanskeligt. Forskellige beviser kan findes i f.eks. Sternberg: "Lectures on Differential Geometry" og Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint".

Vi kan nu bevise følgende sætning:

Sætning 14.14. Lad M^n og N^n være sammenhængende, kompakte, orienterede differentiable mangfoldigheder, og lad $F: M^n \to N^n$ være en vilkårlig differentiabel afbildning.

Så findes et helt tal $\deg(F)$, kaldet <u>afbildningsgraden for F</u>, således at

$$\int_M F^*(\omega) = \deg(F) \cdot \int_N \omega$$

for enhver n-form ω på N.

Hvis $F(M) \neq N$ (dvs. F afbilder ikke på) er $\deg(F) = 0$.

Hvis $q \in N$ er en vilkårlig regulær værdi for F med $F^{-1}(q) \neq \emptyset$ er

$$\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \operatorname{sign}(F_{*p}),$$

hvor $\operatorname{sign}(F_{*p})$ er $+1$, hvis isomorfien $F_{*p}: T_p M \longrightarrow T_q N$ bevarer orientering og -1, hvis F_{*p} vender orientering.

Bevis. Da M^n og N^n er sammenhængende, kompakte og orienterede, får vi ifølge sætning 14.12 følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^n(N) \arrow[rrr, "F^*"] \arrow[dr, "c_N"] \arrow[dd, "\int_N"'] & & & \mathcal{D}^n(M) \arrow[dl, "c_M"'] \arrow[dd, "\int_M"] \\
& H^n(N) \arrow[r, "H^n(F)"'] \arrow[dl, "\mathcal{I}_N"] & H^n(M) \arrow[dr, "\mathcal{I}_M"'] & \\
\mathbb{R} \arrow[rrr, dashed, "\cdot\, \deg(F)"'] & & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{I}_N$ og $\mathcal{I}_M$ er isomorfier, findes der netop én lineær afbildning $\mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$, som gør diagrammet kommutativt. Denne lineære afbildning må nødvendigvis være multiplikation med et reelt tal $\deg(F)$. Da det store "rektangel" kommuterer, får vi så netop

$$\int_M F^*(\omega) = \deg(F) \cdot \int_N \omega$$

for en vilkårlig n-form $\omega \in \mathcal{D}^n(N)$.

Vi vil nu verificere, at $\deg(F)$ er et helt tal.

Antag først, at $F(M) \neq N$. Da M er kompakt og F er kontinuert, bliver $N \setminus F(M)$ så en ikke-tom åben delmængde af N. Vi kan derfor finde en n-form ω på N, således at

$$\operatorname{st}(\omega) \subset N \setminus F(M) \quad \text{og} \quad \int_N \omega \neq 0$$

Da $F^*(\omega) = 0$, finder vi så

$$0 = \int_M F^*(\omega) = \deg(F) \cdot \int_N \omega$$

Dette viser, at $\deg(F) = 0$ og altså specielt et helt tal.

Antag dernæst, at $F(M) = N$, og lad $q \in N$ være en vilkårlig regulær værdi for F (existens sætning 14.13).

Lad $p_1, \ldots, p_k$ være de endelig mange regulære punkter i $F^{-1}(q)$ ("indledningen" lemma 6.2).

Ved samme fremgangsmåde som i beviset for lemma 6.4 ("indledningen") kan vi finde en åben omegn V af $q \in N$ og for hvert $i = 1, \ldots, k$ en åben omegn U_i af $p_i \in M$, således at

i) $U_1, \ldots, U_k, V$ er sammenhængende.

ii) $U_i \cap U_j = \emptyset$ for $i \neq j$.

iii) $F | U_i : U_i \to V$ er en diffeomorfi for ethvert $i = 1, \ldots, k$.

iv) $F^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$.

Lad nu ω være en n-form på N, således at

$$st(\omega) \subset V \quad \text{og} \quad \int_N \omega \neq 0$$

P.gr.a. iv) vil

$$st(F^*(\omega)) \subset F^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad .$$

Så får vi p.gr.a. ii)

$$\int_M F^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} (F^*(\omega) | U_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} (F | U_i)^*(\omega)$$

Da U_i er sammenhængende (i)) er diffeomorfien $F | U_i : U_i \to V$ orienteringsbevarende, hvis og kun hvis $F_{*p_i} : T_{p_i} M \to T_q N$ er orienteringsbevarende. Fra opgave 2, side 224 følger så:

$$\int_{U_i} (F|U_i)^*(\omega) = \text{sign}\,(F_{*p_i}) \cdot \int_V \omega | V$$

$$= \text{sign}\,(F_{*p_i}) \cdot \int_N \omega$$

I den sidste omskrivning bruger vi blot, at $st(\omega) \subset V$.
Så får vi:

$$\int_M F^*(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign}(F_{*p_i})\right) \cdot \int_N \omega$$

Da $\int_N \omega \neq 0$, viser denne ligning, at

$$\deg(F) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign}(F_{*p_i})$$

$$= \sum_{p \in F^{-1}(q)} \operatorname{sign}(F_{*p_i}) .$$

Dette viser både at $\deg(F)$ er et helt tal og den søgte formel.

Dermed er sætning 14.14 bevist.

Bemærkning. Afbildningsgrad af en afbildning blev defineret af Brouwer 1911. Efter Brouwer har begrebet f.eks. gennem H. Hopf's arbejder haft stor betydning for udviklingen af topologien.

Af formlen for $\deg(F)$ i sætning 14.14 ser vi, at afbildningsgraden tæller, hvor mange gange billedet af $F: M \longrightarrow N$ overdækker N positivt minus antallet af gange billedet af F overdækker N negativt.

Sætning 14.15. Lad M^n og N^n være sammenhængende, kompakte, orienterede differentiable mangfoldigheder.

Hvis $F,G : M^n \longrightarrow N^n$ er glat homotope afbildninger, da er $\deg(F) = \deg(G)$.

Bevis. Ifølge sætning 13.5 gælder, at

$$\int_M F^*(\omega) = \int_M G^*(\omega)$$

for en vilkårlig n-form ω på N. Ved at vælge ω så $\int_N \omega \neq 0$ følger så straks, at $\deg(F) = \deg(G)$.

Bemærkning. I 1926 viste Hopf, at for $N^n = S^n$ gælder også den omvendte sætning, dvs. hvis $\deg(F) = \deg(G)$ for $F, G: M^n \longrightarrow S^n$, da er F og G glat homotope. Differentiable afbildninger $F: M^n \to S^n$ er således op til glat homotopi bestemt af afbildningsgraden.

Sætning 14.6. Lad M^n, N^n og L^n være sammenhængende, kompakte, orienterede differentiable mangfoldigheder.

Hvis $F: M^n \longrightarrow N^n$ og $G: N^n \longrightarrow L^n$ er vilkårlige differentiable afbildninger, gælder formlen:

$$\deg(G \circ F) = \deg(G) \cdot \deg(F) .$$

Hvis $F: M^n \longrightarrow N^n$ er en orienteringsbevarende diffeomorfi, er $\deg(F) = 1$.

Hvis $F: M^n \longrightarrow N^n$ er en orienteringsvendende diffeomorfi, er $\deg(F) = -1$.

Bevis: Overlades til læseren.

Hvis $A: S^n \longrightarrow S^n$ er den antipodiske afbildning, bemærker vi, at

$$\deg(A) = (-1)^{n+1} .$$

Vi vil nu til slut skitsere en enkelt anvendelse af afbildningsgrad. Vi skal her betragte n-dimensionale del-mangfoldigheder af E^{n+1}, såkaldte hyperflader i E^{n+1}.

Lad M^n være en orienteret hyperflade i E^{n+1}. Til enhver sådan hyperflade er der knyttet en differentiabel afbildning

$$G_M: M^n \longrightarrow S^n$$

den såkaldte Gauss afbildning (engelsk: Gauss map eller sphere map). Definitionen af G_M forløber således:

For ethvert $p \in M$ betragter vi den positive enhedsnormal Z_p til M i $p \in M$, dvs. den entydigt bestemte tangentvektor $Z_p \in T_p E^{n+1}$, således at

i) $(Z_p, X_p)_p = 0$ for enhver tangentvektor $X_p \in T_p M$

ii) $(Z_p, Z_p)_p = 1$

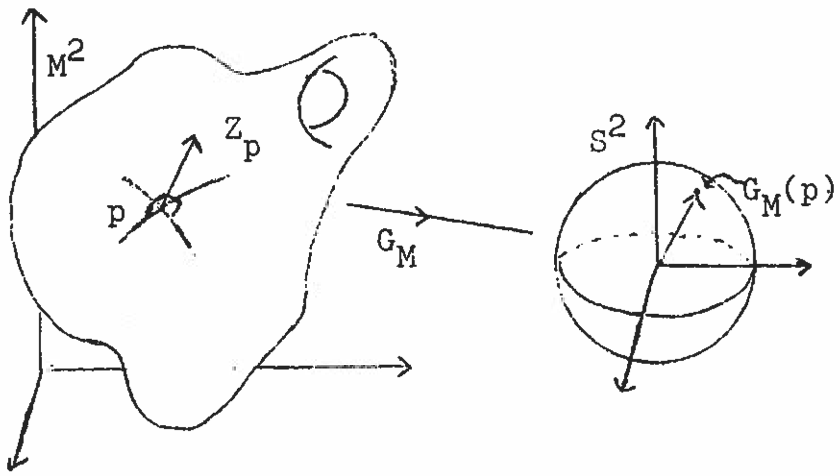
iii) Hvis $\{X_p^1, \ldots, X_p^n\}$ er en positiv basis for $T_p M$, da er $\{X_p^1, \ldots, X_p^n, Z_p\}$ en positiv basis for $T_p E^{n+1}$.

Man kan let indse, at der herved defineres et differentiabelt normalfelt Z på M med værdi Z_p i $p \in M$. Antag, at Z er beskrevet ved de differentiable funktioner $z_1, \ldots, z_{n+1}: M \longrightarrow E^1$, dvs.

$$\forall p \in M: Z_p = (z_1(p), \ldots, z_{n+1}(p))_p$$

$G_M: M^n \longrightarrow S^n$ er nu den differentiable afbildning fastlagt ved

$$\forall p \in M: G_M(p) = (z_1(p), \ldots, z_{n+1}(p))$$



I den algebraiske topologi findes en topologisk invariant, som til enhver mangfoldighed M knytter et helt tal $\chi(M)$ kaldet Euler karakteristikken af M.

At $\chi(M)$ er en topologisk invariant betyder, at $\chi(M) = \chi(M')$, hvis M og M' er homeomorfe.

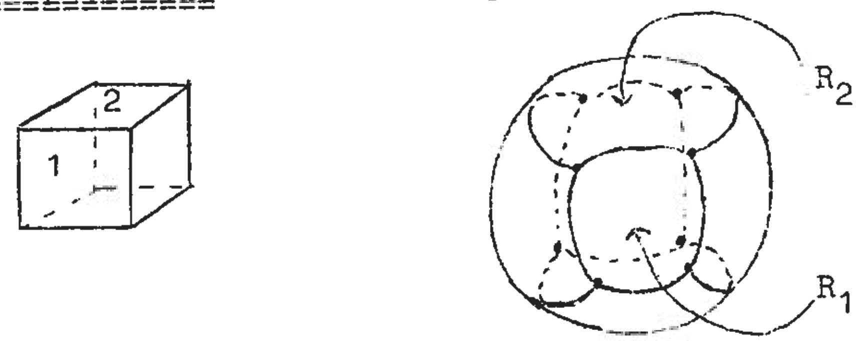
Hvis M^n er kompakt, og $R_1, \ldots, R_k$ er en opdeling af M^n i n-dimensionale intervaller kan $\chi(M)$ bestemmes som

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(M) ,$$

hvor

$c_i(M)$ = antallet af i-dimensionale sideflader i $R_1, \ldots, R_k$.

Exempel 14.17. Her er en opdeling af S^2 :



I denne opdeling af S^2 ser vi, at $c_o(S^2) = 8$, $c_1(M) = 12$, og $c_2(M) = 6$. Så får vi

$$\chi(S^2) = c_o(M) - c_1(M) + c_2(M) = 2 .$$

Exempel slut!

Hvis M^n er en sammenhængende, kompakt, orienteret hyperflade i E^{n+1} kan man for <u>n lige</u> bevise, at

$$\chi(M) = 2 \cdot \deg(G_M) .$$

Hvis dV_{S^n} er det Riemann'ske volumen mål på S^n følger så fra sætning 14.14, at for <u>n lige</u> gælder:

$$\chi(M) = \frac{2}{\mathrm{vol}(S^n)} \cdot \int_M G_M^*(dV_{S^n})$$

For $n = 2$ specielt:

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M G_M^*(dV_{S^2}) .$$

I differentialgeometrien indfører man en funktion $K: M \longrightarrow E^1$, kaldet <u>Gaussisk krumning</u>. Hvis dV_M betegner det Riemann'ske volumen mål på M, kan K defineres ved fastsættelsen:

$$G_M^* (dV_{S^n}) = K \cdot dV_M \quad .$$

For lige-dimensionale sammenhængende, kompakte orienterede hyperflader i E^{n+1} får vi så:

$$\chi(M) = \frac{2}{\mathrm{vol}(S^n)} \cdot \int_M K \, dV_M \quad .$$

Integralet af den Gaussiske krumning er således pånær en konstant netop Euler karakteristikken.

Dette er et special tilfælde af en berømt sætning, den såkaldte <u>generaliserede Gauss-Bonnet sætning</u>.

For flader i E^3 blev sætningen bevist af Bonnet i 1848. For vilkårlige lige-dimensionale sammenhængende, kompakte orienterede Riemann'ske mangfoldigheder blev sætningen uafhængigt bevist af Allendoerfer og Fenchel i 1940.

For flere anvendelser kan henvises til:

Milnor: Topology from the differentiable viewpoint.
Hicks: Notes on Differential Geometry.
Sternberg: Lectures on Differential Geometry.

<u>Opgaver</u>

<u>Opgave 3</u>. Konstruer en differentiabel afbildning $a: E^1 \longrightarrow E^1$, således at $a(t) \geqq 0$ for ethvert $t \in E^1$, $st(a) \subseteqq [-1, 1]$ og $\int_{E^1} a = 1$.

<u>Opgave 4</u>. Beregn alle De Rham cohomologi grupperne for Torus $T = S^1 \times S^1$.

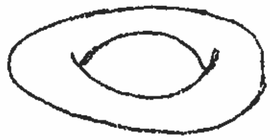
Opgaverne 5, 6 og 7 er forbundne.

Opgave 5. Lad M^n være en sammenhængende, kompakt orienteret hyperflade i E^{n+1}, og antag, at der findes et differentiabelt vektorfelt X på M, således at $X_p \neq 0$ for ethvert $p \in M$.

Vis, at $\deg(G_M) = 0$, hvis n er lige.

Opgave 6. Lad $\mathcal{H}(S^2,h)$ være kuglefladen S^2 med h hanke. Vi sætter $\mathcal{H}(S^2,0) = S^2$. For $h \geqq 1$ fremkommer $\mathcal{H}(S^2,h)$ ved at lave h "huller" i S^2 som vist i følgende figurer:

$\mathcal{H}(S^2,1)$ = Torus :



$\mathcal{H}(S^2,2)$:

Angiv for $h \geqq 1$ $2h$ differentiable afbildninger $S^1 \to \mathcal{H}(S^2,h)$ der ikke er parvis glat homotope.

Antyd et bevis for, at $\mathcal{H}(S^2,h)$ ikke er diffeomorf med $\mathcal{H}(S^2,h')$ for $h \neq h'$.

Vis ved at benytte formlen $\chi(M) = 2 \cdot \deg(G_M)$, at

$$\chi(\mathcal{H}(S^2,h)) = 2 \cdot (1-h) .$$

Opgave 7. Vis følgende sætning:

Torus er den eneste sammenhængende, kompakte orienterede flade i E^3, hvorpå der findes et differentiabelt vektorfelt uden nulvektorer.

Det er tilladt at bruge følgende sætning uden bevis:

Enhver sammenhængende, kompakt orienteret 2-dimensional differentiabel mangfoldighed er diffeomorf med $\mathcal{H}(S^2,h)$ for et eller andet h. (h kaldes mangfoldighedens genus).

Et differentialtopologisk bevis for den citerede sætning kan findes i Wallace: "Differential Topology".

<u>Opgave 8</u>. Betragt E^3 med sædvanlige koordinater $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$.

Lad M være enhedscirklen i $u_1 u_3$ - planen og lad $N(r)$ være cirklen i $u_1 u_2$ - planen med centrum $(r,0,0)$ og radius 1. Definer for alle r forskellig fra $-2,0,2$ en afbildning

$$l: M \times N(r) \to S^2$$

ved fastsættelsen:

$$\forall x \in M \quad \forall y \in N(r): \; l(x,y) = \frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

Beregn $\deg(l)$ for alle r forskellig fra $-2,0,2$.

$\deg(l)$ er det såkaldte <u>linking number</u> for M og $N(r)$.

Linking number kan defineres tilsvarende for sammenhængende, kompakte orienterede disjunkte del-mangfoldigheder M^n og N^m i E^k, hvor $n+m = k-1$.

/ey

Forelæsninger over

DIFFERENTIALGEOMETRI

og

DIFFERENTIALTOPOLOGI

Appendix 1,2 og 3.

Vagn Lundsgaard Hansen

December 1968

December 1970

FORORD

Disse noter er beregnet til undervisning i fagområdet matematik 3 under det naturvidenskabelige fakultet ved Århus Universitet. Matematik 3 følges på matematik linien i andet studieår og på matematik-fysik linien i tredie studieår. Forudsætningerne er grundlæggende kurser i matematisk analyse og lineær algebra.

Der foreligger ialt 4 hefter:

Indledning til differentialgeometri og differentialtopologi.
Differentiable Mangfoldigheder I
Differentiable Mangfoldigheder II
Appendix 1,2 og 3

Vagn Lundsgaard Hansen

Appendix 1, 2 og 3

Indhold:

Appendix 1: Kategoribegrebet

i) Kategorier .... A 1.1

ii) Funktorer .... A 1.4

Appendix 2: Multilineær algebra

i) Multilineære afbildninger .... A 2.1

ii) Tensor produkt af vektorrum .... A 2.4

iii) Tensorer .... A 2.15

iv) Tensor algebraer .... A 2.24

v) Ydre potenser og Grassmann algebraer .... A 2.32

Appendix 3: Topologi

i) Adskillelses axiomer i topologien. Urysohn's lemma .... A 3.1

ii) Parakompakte rum .... A 3.8

iii) Deling af enheden .... A 3.15

Indholdsfortegnelse til samtlige hefter Reg.1

Stikordsregister til samtlige hefter Reg.3

Appendix 1.

Kategorier.

Begrebet kategori omfatter de fælles træk ved visse systemer af objekter og afbildninger mellem disse. Betragt f.eks. mængder og sædvanlige afbildninger, topologiske rum og kontinuerte afbildninger, differentiable mangfoldighder og differentiable afbildninger, vektorrum og lineære afbildninger, Lie-grupper og Lie-gruppe homomorfier. Fælles for disse systemer er, at visse afbildninger kan sammensættes, og at den associative regel gælder for sammensætning af afbildninger. Endvidere har ethvert objekt en identisk afbildning på sig selv.

Når vi bemærker, at man i en vilkårlig kategori kalder en afbildning for en morfi, skulle følgende definition være begrundet:

Definition A 1.1. En kategori $\mathfrak{A}$ består af:

a. En klasse af objekter A, B, C,...

b. For ethvert ordnet par af objekter A og B en mængde af morfier Hom (A, B) med elementer f, g, h,... . For $f \in \text{Hom}(A, B)$ bruges skrivemåden $f: A \to B$.

c. For enhver trippel af objekter A, B og C en sammensætning af morfier givet ved en afbildning

$$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C).$$

Hvis $f \in \text{Hom}(A, B)$ og $g \in \text{Hom}(B, C)$ bruges betegnelsen $g \circ f$ for sammensætningen af f og g.

$\mathfrak{A}$ kaldes en kategori, hvis systemet af objekter og morfier i a, b og c tilfredsstiller:

Kat. 1. $\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(A', B') = \emptyset$ medmindre $A=A'$ og $B=B'$.

Kat. 2. (Identiteter) For ethvert objekt A findes en morfi $1_A \in \text{Hom}(A, A)$, således at $f \circ 1_A = f$ og $1_A \circ g = g$, når sammensætning er mulig, d.v.s. når $f: A \to B$ og $g: C \to A$.

Kat. 3. (Associativitet) Hvis $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$ og $h \in \text{Hom}(C, D)$ gælder, at $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Opgave 1. Vis, at identiteterne i Kat. 2 er entydig bestemt.

Definition A 1.2. En morfi $f: A \to B$ i en kategori $\mathfrak{A}$ kaldes en ækvivalens i $\mathfrak{A}$, hvis der findes en morfi $g: B \to A$ i $\mathfrak{A}$, således at $g \circ f = 1_A$ og $f \circ g = 1_B$.

Definition A 1.3. Hvis $f: A \longrightarrow B$ og $g: B \longrightarrow A$ er morfier i en kategori $\mathfrak{A}$, og $g \circ f = 1_A$, kaldes g en venstre invers til f, og f en højre invers til g. g kaldes en to-sidet invers til f, hvis $g \circ f = 1_A$ og $f \circ g = 1_B$.

Bemærkning. En ækvivalens er altså en morfi, der har en to-sidet invers.

Lemma A 1.4. Hvis en morfi $f: A \longrightarrow B$ i kategorien $\mathfrak{A}$ har både en højre og en venstre invers, er disse ens, og f er en ækvivalens.

Bemærkning. Af lemma A 1.4 følger specielt, at en ækvivalens $f: A \longrightarrow B$ har en entydig bestemt to-sidet invers. Denne morfi betegnes ofte f^{-1}.

Opgave 2. Bevis lemma A 1.4.

Når man skal angive en kategori, skal man specificere objekter, morfier og sammensætningsreglen. Hvis det er klart, hvad sammensætningen skal være, nævnes denne ikke explicit.

I mange sammenhænge er det klart, hvilke morfier der naturligt hører sammen med en given klasse af objekter. F.eks. hører kontinuerte afbildninger naturligt sammen med topologiske rum, og lineære afbildninger sammen med vektorrum. I sådanne tilfælde benævner man ofte kategorien v.hj.a. dens objekter. F.eks. er kategorien af topologiske rum den kategori, hvis objekter er alle topologiske rum, og hvis morfier er alle kontinuerte afbildninger (Præcist: Hvis A og B er topologiske rum, er Hom(A, B) mængden af kontinuerte afbildninger fra A til B).

Exempler.

1) Kategorien af mængder Morfier: sædvanlige afbildninger.

2) Kategorien af topologiske rum Morfier: kontinuerte afbildninger.

3) Kategorien af vektorrum over et legeme k Morfier: lineære afbildninger.

4) Kategorien af grupper Morfier: gruppe homomorfier.

5) Kategorien af differentiable mangfoldigheder Morfier: differentiable afbildninger

6) Kategorien af Lie-grupper Morfier: Lie gruppe homomorfier.

7) Kategorien af Lie-algebraer over et legeme k

Morfier: Lie-algebra homomorfier.

Opgave 3. Vis, at alle ovenstående exempler virkelig er kategorier. Hvad er ækvivalenserne i de enkelte kategorier?

I andre sammenhænge kan man være interesseret i at indskrænke eller udvide den naturligt forekommende klasse af morfier. F.eks. kan man betragte klassen af mængder med injektive afbildninger som morfier, eller klassen af differentiable mangfoldigheder med kontinuerte afbildninger som morfier. I sådanne tilfælde benævner man ofte kategorien ved at fremhæve både objekter og morfier.

Exempler.

8) Kategorien af mængder og injektive afbildninger
Tilsvarende med surjektive og bijektive afbildninger.

9) Kategorien af differentiable mangfoldigheder og kontinuerte afbildninger.

10) Kategorien af metriske rum og uniformt kontinuerte afbildninger.

11) Kategorien af topologiske rum og åbne afbildninger.

Hvis man kun havde brugt betegnelsen "kategorien af metriske rum" i 10), kunne man med fuld ret hævde, at isometriske afbildninger var de relevante morfier.

Exemplerne 1) - 11) kan ikke overraske. Vi giver nu nogle exempler på kategorier, som måske ikke er umiddelbart indlysende.

Exempel 12. Lad X være en partielt ordnet mængde (ordning $\leq$). Der findes en kategori, hvis objekter er elementerne i X, og hvor $\mathrm{Hom}(x, x')$ består af det ordnede par (x, x') hvis $x \leq x'$, og $\mathrm{Hom}(x, x') = \emptyset$ hvis $x \not\leq x'$.

Exempel 13. En monoid er en mængde S med en associativ multiplikation og et neutralt element $e \in S$ ved denne multiplikation.

S kan opfattes som en kategori med ét objekt, nemlig S, og $\mathrm{Hom}(S, S)$ lig med mængden af elementer i S. Sammensætning af morfier er multiplikation som elementer i S.

Exempel 14. Lad $\mathfrak{A}$ være en vilkårlig kategori. Kategorien af morfier i $\mathfrak{A}$ har som objekter morfier $f: A \longrightarrow B$ i $\mathfrak{A}$. Hvis $f: A \longrightarrow B$

og $f': A' \longrightarrow B'$ er morfier i $\mathcal{A}$, skal en morfi i "kategorien af morfier i $\mathcal{A}$" fra objektet f til objektet f' være et par af morfier $g: A \longrightarrow A'$ og $h: B \longrightarrow B'$ i $\mathcal{A}$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Opgave 4. Vis, at eksemplerne 12, 13 og 14 virkelig beskriver kategorier.

Hvilke ækvivalenser har kategorien i eksempel 12?

Hvad er ækvivalenserne i kategorien i eksempel 13?

Hvordan kunne man definere en gruppe?

Funktorer.

En funktor er en afbildning fra én kategori til en anden. Som sådan må den nødvendigvis bestå af en "objektfunktion" og en "morfifunktion".

Definition A 1.5. Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være kategorier.
En covariant funktor $T: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ består af:

a. En funktion, som til ethvert objekt A i $\mathcal{A}$ knytter et objekt $T(A)$ i $\mathcal{B}$.

b. En funktion, som til enhver morfi $f: A \longrightarrow B$ i $\mathcal{A}$ bestemmer en morfi $T(f): T(A) \longrightarrow T(B)$ i $\mathcal{B}$.

T kaldes en covariant funktor, hvis funktionerne i a og b tilfredsstiller:

Fun. 1. For ethvert objekt A i $\mathcal{A}$ gælder, at $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

Fun. 2. Hvis $f: A \longrightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er morfier i $\mathcal{A}$ gælder, at $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Tilsvarende kan vi definere en contravariant funktor.

Definition A 1.6. Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være kategorier.
En contravariant funktor $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ består af:

a. En funktion, som til ethvert objekt A i $\mathcal{A}$ knytter et objekt $T(A)$ i $\mathcal{B}$.

b. En funktion som til enhver morfi $f: A \longrightarrow B$ i $\mathcal{A}$ knytter en morfi $T(f): T(B) \longrightarrow T(A)$ i $\mathcal{L}$ (pilen er vendt).

T kaldes en contravariant funktor, hvis funktionerne i a og b tilfredsstiller:

Fun.1. For ethvert objekt A i $\mathcal{A}$ gælder, at $T(1_A)=1_{T(A)}$

Fun.2. Hvis $f: A \longrightarrow B$ og $g: B \longrightarrow C$ er morfier i $\mathcal{A}$ gælder, at $T(g \circ f)=T(f) \circ T(g)$.

I exemplerne 15 og 16 er $\mathcal{A}$ en vilkårlig kategori, og $\mathcal{M}$ er kategorien af mængder.

Exempel 15. Hvis vi betragter et fast objekt A i $\mathcal{A}$, kan vi definere en covariant funktor

$$H_A: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$$

Et vilkårligt objekt B i $\mathcal{A}$ afbildes i

$$H_A(B) = \mathrm{Hom}\,(A, B).$$

Til en vilkårlig morfi $f: B \rightarrow C$ i $\mathcal{A}$ knytter vi morfien

$$H_A(f): H_A(B) \longrightarrow H_A(C),$$

defineret ved fastsættelsen

$$H_A(f)(g) = f \circ g$$

for enhver morfi $g: A \longrightarrow B$ i $H_A(B)$.

Det er let at indse, at Fun.1 og Fun.2 i definition A 1.5 er opfyldt. H_A er derfor en covariant funktor.

Exempel 16. Hvis vi betragter et fast objekt B i $\mathcal{A}$, kan vi definere en contravariant funktor

$$H^B: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M} .$$

Et vilkårligt objekt A i $\mathcal{A}$ afbildes i $H^B(A)= \mathrm{Hom}(A, B)$.

Til en vilkårlig morfi $f: A \longrightarrow C$ i $\mathcal{A}$ knytter vi morfien

$$H^B(f): H^B(C) \longrightarrow H^B(A),$$

defineret ved fastsættelsen

$$H^B(f)(g) = g \circ f$$

for enhver morfi $g: C \rightarrow B$ i $H^B(C)$.

Det er let at indse, at Fun.1 og Fun.2 i definition A 1.6 er opfyldt. H^B er derfor en contravariant funktor.

Exempel 17. Hvis vi i exempel 16 sætter $\mathcal{A}$ lig kategorien af vektorrum over et legeme k, bliver Hom (A, B) mængden af lineære afbildninger fra et vektorrum A til et vektorrum B.

Hom (A, B) bliver ved addition af funktionsværdier selv et vektorrum over k.

Hvis $f: A \to C$ er en lineær afbildning, er det let at indse, at

$$H^B(f): H^B(C) \to H^B(A)$$

bliver en lineær afbildning.

H^B bliver derved en contravariant funktor af kategorien af vektorrum over k på sig selv.

Hvis vi sætter B=k opfattet som vektorrum over k, bliver

$$H^k(A) = A^*,$$

hvor A* betegner det duale vektorrum til A.

Vi har dermed set, at dannelse af dualt vektorrum er en contravariant funktor af kategorien af vektorrum over k på sig selv.

Exempel 18. Der findes en covariant funktor fra kategorien af Lie-grupper til kategorien af reelle Lie-algebraer. (Funktoren L i opgaver 8, § 5).

Exempel 19. Tangentbundt konstruktionen som funktor (§5).

Opgave 5. Udfyld detaljer i exemplerne 15-19.

Følgende sætning giver et fælles bevis for, at isomorfe vektorrum har isomorfe duale vektorrum, at isomorfe integritetsområder har isomorfe kvotientlegemer, at isomorfe Lie-grupper har isomorfe Lie-algebraer (Opgaverne 1 og 8 i § 5), at diffeomorfe mangfoldigheder har ækvivalente tangentbundter etc.

Sætning A 1.7. Lad T være en funktor (covariant eller contravariant) fra kategorien $\mathcal{A}$ til kategorien $\mathcal{L}$. Så gælder, at T afbilder ækvivalenser i $\mathcal{A}$ på ækvivalenser i $\mathcal{L}$.

Bevis. Lad $f: A \to B$ være en ækvivalens i $\mathcal{A}$ med invers $g: B \to A$. Der gælder altså:

$$g \circ f = 1_A \qquad \text{og } f \circ g = 1_B$$

Hvis T er covariant fås heraf:

$$T(g) \circ T(f) = 1_{T(A)} \qquad \text{og } T(f) \circ T(g) = 1_{T(B)}.$$

Hvis T er contravariant fås:

$$T(f) \circ T(g) = 1_{T(A)} \qquad \text{og } T(g) \circ T(f) = 1_{T(B)}.$$

Begge disse udsagn viser, at T(f) er en ækvivalens i $\mathcal{L}$.

Appendix 2.

Dette appendix omhandler elementer af multilineær algebra, som er nødvendige for konstruktionen af tensorer og differentialformer på en differentiabel mangfoldighed. Hovedtemaet er konstruktion af tensor algebraen og Grassmann algebraen for et endeligt dimensionalt vektorrum.

1. Multilineære afbildninger.

Lad $V_1, \ldots, V_r$ og W være vektorrum over legemet k.

Definition A 2.1. En afbildning

$$F : V_1 x \ldots x V_r \longrightarrow W$$

kaldes multilineær, hvis det for ethvert $i=1,\ldots,r$ gælder, at

$$F(v_1,\ldots,av'_i+bv''_i,\ldots,v_r) = aF(v_1,\ldots;v'_i,\ldots,v_r)$$
$$+bF(v_1,\ldots,v''_i,\ldots,v_r)$$

for alle sæt af vektorer i $V_1,\ldots,V_r$ og $\forall a, b \in k$.

Man siger ofte kort, at F er lineær i hvert argument.

Mængden af multilineære afbildninger fra $V_1,\ldots,V_r$ til W betegner vi med $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r; W)$

$\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r; W)$ er selv et vektorrum over k med addition og multiplikation med skalar fra k fastlagt ved

$$(F_1 + F_2)(v_1,\ldots,v_r) = F_1(v_1,\ldots,v_r) + F_2(v_1,\ldots,v_r)$$

$$(aF)(v_1,\ldots,v_r) = aF(v_1,\ldots,v_r).$$

Når $r = 1$ og $V_1 = V$ er $\mathcal{L}(V;W)$ altså blot vektorrummet af lineære afbildninger fra V til W. For $r=2$ er $\mathcal{L}(V_1,V_2;W)$ vektorrummet af bilineære afbildninger fra $V_1 \times V_2$ til W. Teorien for bilineære afbildninger kan umiddelbart generaliseres til multilineære afbildninger. I det følgende vil vi derfor ofte for overs igtens skyld kun gennemføre beviser i tilfældet bilineære afbildninger. Det anbefales læseren at udføre beviserne for multilineære afbildninger som øvelse.

Hvis $V_1 = \ldots = V_r = V$ og $W = k$ kalder man multilineære afbildninger fra $V x \ldots x V$ (r faktorer) til k for r-lineære former på V.

Sætning A 2.2. Lad $\{e^i_1, \ldots, e^i_{n_i}\}$ være en basis i V_i for $i=1,\ldots,r$.

Hvis $w_{i_1\ldots i_r} \in W$ er givet for $i_1=1,\ldots,n_1;\ldots;i_r=1,\ldots,n_r$ findes en entydig bestemt multilineær afbildning $F \in \mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;W)$, således at

$$F(e^1_{i_1},\ldots,e^r_{i_r}) = w_{i_1\ldots i_r}$$

Kort: En multilineær afbildning er entydig bestemt ved sine værdier på alle r-sæt af basisvektorer.

Bevis. $r = 2$

Lad $F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$

For $v_1 = \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1^{i_1} e^1_{i_1} \in V_1$ og $v_2 = \sum_{i_2=1}^{n_2} a_2^{i_2} e^2_{i_2} \in V_2$

finder vi, når bilineariteten af F benyttes:

$$F(v_1,v_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} F(e^1_{i_1}, e^2_{i_2}).$$

Heraf ser vi, at F's værdi på ethvert par af vektorer $(v_1,v_2) \in V_1 \times V_2$ er fastlagt ved værdierne $w_{i_1 i_2} = F(e^1_{i_1}, e^2_{i_2})$. Der findes altså højst en bilineær afbildning F, som antager disse værdier på par af basisvektorer.

Hvis vektorerne $w_{i_1 i_2} \in W$ er givet, ser vi, at vi er tvunget til at definere F ved fastsættelsen

$$F(v_1,v_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} w_{i_1 i_2}.$$

Man konstaterer let, at F bliver en bilineær afbildning (gør det), og at

$$F(e^1_{i_1}, e^2_{i_2}) = w_{i_1 i_2}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning A 2.3. Hvis $\dim V_i = n_i$ for $i=1,\ldots,r$ og $\dim W = n$ er

$$\dim \mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r; W) = n_1 \cdots n_r \cdot n$$

Bevis. $r = 2$

Lad $\{e^1{}_1,\ldots e^1{}_{n_1}\}$, $\{e^2{}_1,\ldots,e^2{}_{n_2}\}$ og $\{e_1,\ldots,e_n\}$ være baser for henholdsvis V_1, V_2 og W.

Lad $F_{i_1i_2;i}$ for $i_1=1,\ldots,n_1$; $i_2=1,\ldots,n_2$ og $i=1,\ldots,n$ være de entydigt bestemte bilineære afbildninger fra $V_1\times V_2$ til W defineret ved fastsættelsen

$$F_{i_1i_2;i}(e^1{}_{j_1}, e^2{}_{j_2}) = \delta_{i_1j_1}\,\delta_{i_2j_2}\cdot e_i$$

Hvis $F_1,\ldots F_n$ betegner komponentfunktionerne for $F\in\mathcal{L}(V_1,V_2;W)$ m.h.t. basen $\{e_1,\ldots,e_n\}$ i W, indser man, at

$$F=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n} F_i(e^1_{i_1}, e^2_{i_2})\; F_{i_1i_2;i}.$$

Det må understreges, at en simpel analyse af problemet leder til denne formel (Gennemfør dette).

De $n_1\cdot n_2\cdot n$ bilineære afbildninger $F_{i_1i_2;i}$ frembringer altså $\mathcal{L}(V_1, V_2;W)$.

At de er lineært uafhængige, indser vi således. Antag, at

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n} a^{i_1i_2;i}\, F_{i_1i_2;i} = 0 \quad \text{i } \mathcal{L}(V_1,V_2;W).$$

Anvendes denne ligning på parret af vektorer $(e^1_{i_1}, e^2_{i_2})$ får vi

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i_1i_2;i}\, e_i = 0.$$

Da $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er en basis i W, følger heraf, at $a^{i_1i_2;i} = 0$.

Vi har dermed indset, at $\{F_{i_1i_2;i}\}$ er en basis i $\mathcal{L}(V_1, V_2;W)$.

Dette beviser sætningen.

Opgave 1. Lad $V_1,V_2,\ldots,V_r$ $(r \geq 3)$ og W være vektorrum over k. Vis, at

$$\mathcal{L}(V_1,V_2,\ldots,V_r;W) \cong \mathcal{L}(V_1;\mathcal{L}(V_2,\ldots,V_r;W))$$

2. Tensor produkt af vektorrum.

Lad $V_1,\dots,V_r$ være vektorrum over legemet k.

Betragt følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{U} \arrow[d, "\bar{F}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

hvor φ og F er multilineære afbildninger ind i vektorrummene U og W over k, og $\bar{F}$ er en lineær afbildning.

<u>Definition A2.4.</u> Parret (U,φ) kaldes for et <u>tensor produkt</u> af vektorrummene $V_1,\dots,V_r$, hvis der til en vilkårlig multilineær afbildning $F\colon V_1\times\dots\times V_r \longrightarrow W$ findes en entydig bestemt lineær afbildning $\bar{F}\colon U \longrightarrow W$, således at ovenstående diagram kommuterer, d.v.s. så $F = \bar{F}\varphi$.

Et tensor produkt (U,φ) af vektorrummene $V_1,\dots,V_r$ giver således en entydig forbindelse mellem multilineære afbildninger på $V_1\times\dots\times V_r$ og lineære afbildninger på U. Præcist har vi:

<u>Lemma A 2.5.</u> Hvis (U,φ) er et tensor produkt af $V_1,\dots,V_r$, giver afbildningen $F \curvearrowright \bar{F}$ em isomorfi af $\mathcal{L}(V_1,\dots,V_r;W)$ på $\mathcal{L}(U;W)$ for ethvert vektorrum W.

<u>Bevis</u>: Overlades til læseren.

Det er naturligt, hvis læseren på nuværende tidspunkt er skeptisk m.h.t. existensen af tensor produkter.

Inden vi sikrer os, at der existerer et tensor produkt af $V_1,\dots,V_r$, viser vi først, at det i alt væsentligt er entydig bestemt.

Lemma A 2.6. Hvis (U, φ) og (U', φ') er 2 tensor produkter af $V_1, \ldots, V_r$, findes der en entydig bestemt isomorfi $\lambda : U \longrightarrow U'$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "\lambda"] \\
V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"'] & U'
\end{tikzcd}$$

Bevis. Da (U, φ) er et tensor produkt af $V_1, \ldots, V_r$ og φ' er en multilineær afbildning findes en entydig bestemt lineær afbildning $\lambda : U \longrightarrow U'$ så $\lambda \varphi = \varphi'$.

Udnyttes at (U', φ') er et tensor produkt, og at φ er en multilineær afbildning, fås en entydig bestemt lineær afbildning $\mu : U' \longrightarrow U$ så $\mu \varphi' = \varphi$.

λ og μ indgår i følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "\lambda"] \\
V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U' \arrow[d, "\mu"] \\
 & U
\end{tikzcd}$$

Vi ser, at $(\mu \lambda) \varphi = \varphi$. Da (U, φ) er et tensor produkt, og φ er en multilineær afbildning, slutter vi fra ligningerne $(\mu \lambda) \varphi = \varphi$ og $1_U \varphi = \varphi$, at $\mu \lambda = 1_U$, idet faktorisering af multilineære afbildninger gennem φ er entydig.

Tilsvarende ses, at $\lambda \mu = 1_{U'}$. Så følger det, at λ er en isomorfi.

Dermed er lemma A 2.6 bevist.

Hvis (U, φ) er et tensor produkt af vektorrummene $V_1, \ldots, V_r$ bruger man betegnelsen

$$U = V_1 \otimes \ldots \otimes V_r .$$

For et element $\varphi(v_1,\ldots,v_r)$ i billedet af φ bruges tilsvarende betegnelsen

$$\varphi(v_1,\ldots,v_r) = v_1\otimes\ldots\otimes v_r.$$

Da φ er multilineær, er $v_1\otimes\ldots\otimes v_r$ lineær i hvert argument, altså

$$v_1\otimes\ldots\otimes(v_i'+v_i'')\otimes\ldots\otimes v_r = v_1\otimes\ldots\otimes v_i'\otimes\ldots\otimes v_r + v_1\otimes\ldots\otimes v_i''\otimes\ldots\otimes v_r$$

og

$$v_1\otimes\ldots\otimes a\, v_i\otimes\ldots\otimes v_r = a(v_1\otimes\ldots\otimes v_i\otimes\ldots\otimes v_r)$$

Vi vil nu konstruere et tensor produkt af vektorrummene $V_1,\ldots,V_r$ over k.

<u>Konstruktion</u>: Vi betragter tilfældet $r = 2$.

Først danner vi det frie vektorrum $M(V_1,V_2)$ over $V_1\times V_2$ med skalarlegeme k.

Pr. definition består $M(V_1,V_2)$ af alle formelle summer

$$\sum f(v_1,v_2)\ v_1\times v_2$$

over elementerne $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$ med koefficienter $f(v_1,v_2)\in k$, således at $f(v_1,v_2) \neq 0 \in k$ for højst endelig mange par $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$.

To formelle summer regnes kun for ens, hvis alle koefficienter er ens.

Ovenstående summer kan identificeres med afbildninger

$$f: V_1\times V_2 \longrightarrow k,$$

således at $f(v_1,v_2)\neq 0\in k$ for højst endelig mange par $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$.

Forbindelsen mellem de formelle summer og ovenstående afbildninger er klar: En formel sum anfører jo blot alle funktionsværdierne $f(v_1,v_2)$ for en funktion f.

I stedet for formelle summer kunne vi altså betragte afbildninger som ovenfor. Vi opretholder $\sum$-notationen, fordi den er mere suggestiv.

Vi gør nu $M(V_1,V_2)$ til et vektorrum ved følgende definitioner: addition:

$$\sum f(v_1,v_2)v_1 \times v_2 + \sum g(v_1,v_2)v_1 \times v_2 = \sum (f(v_1,v_2)+g(v_1,v_2))v_1 \times v_2$$

multiplikation med skalar:

$$a \cdot \sum f(v_1,v_2)v_1 \times v_2 = \sum (a \cdot f(v_1,v_2))v_1 \times v_2$$

Man efterviser let, at $M(V_1,V_2)$ ved disse definitioner bliver et vektorrum over k.

I de formelle summer anfører man ofte kun de led, der har koefficient forskellig fra $0 \in k$.

Med denne vedtægt har vi en kanonisk 1-1-tydig afbildning

$$\psi : V_1 \times V_2 \longrightarrow M(V_1,V_2)$$

defineret ved fastsættelsen

$$\psi(v_1,v_2) = 1\ v_1 \times v_2 ,$$

hvor $1 \in k$ er et-elementet i k.

ψ er ikke bilineær. Afvigelsen fra bilinearitet af ψ måles af følgende elementer i $M(V_1,V_2)$:

(i) $\psi(a\,v_1' + b\,v_1'', v_2) - a\psi(v_1',v_2) - b\,\psi(v_1'',v_2)$

(ii) $\psi(v_1, a\,v_2' + b\,v_2'') - a\,\psi(v_1,v_2') - b\psi(v_1,v_2'')$

for alle sæt af vektorer og alle $a,b \in k$.

Lad nu $R(V_1,V_2)$ være det underrum af $M(V_1,V_2)$, der er frembragt af alle elementerne af type (i) og (ii). $R(V_1,V_2)$ består altså af alle endelige linearkombinationer i $M(V_1,V_2)$ af elementerne af type (i) eller (ii).

Vi kan nu betragte kvotient vektorrummet

$$U = M(V_1,V_2) \big/ R(V_1,V_2)$$

Lad endvidere

$$p: M(V_1,V_2) \longrightarrow U$$

være projektionen af et element i $M(V_1,V_2)$ på sin sideklasse i U. Vektorrumsstrukturen på U er netop defineret, så p bliver en lineær afbildning.

Hvis vi nu sætter $\varphi = p\psi$ bliver

$$\varphi: V_1 \times V_2 \longrightarrow U$$

en bilineær afbildning. Da elementerne af type (i) eller (ii) tilhører $R(V_1,V_2)$, og p er lineær, følger dette umiddelbart.

Vi vil nu vise, at parret (U,φ) er et tensor produkt af V_1 og V_2.

Betragt derfor en vilkårlig bilineær afbildning

$$F: V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

ind i et vektorrum W.

Da elementerne $\psi(v_1,v_2)$ er en basis for $M(V_1,V_2)$, findes en entydig bestemt lineær afbildning $\tilde{F}$, så følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "F"'] & M(V_1,V_2) \arrow[d, "\tilde{F}"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

Da F er bilineær, antager $\tilde{F}$ værdien $0 \in W$ på elementerne af type (i) og (ii). Der findes derfor en entydig bestemt lineær afbildning $\bar{F}$, så følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "F"'] & M(V_1,V_2) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\tilde{F}"] & U \arrow[dl, "\bar{F}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

(Overvej dette.)

Der findes altså en lineær afbildning $\bar{F}: U \longrightarrow W$, således at $F = \bar{F}\varphi$. Da elementerne $\varphi(v_1,v_2)$ frembringer U, findes der højst en lineær afbildning $\bar{F}$ med denne egenskab.

Dermed har vi vist, at (U,φ) er et tensor produkt af V_1 og V_2. Dette afslutter vores konstruktion.

Hvis $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ er et tensor produkt af vektorrummene $V_1,\ldots,V_r$ følger det fra konstruktionen, at vektorerne $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ frembringer $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$.

<u>Sætning A 2.7.</u> Hvis $\{e_1^i,\ldots,e_{n_i}^i\}$ er en basis for V_i for $i = 1,\ldots,r$, er

$$\left\{ e_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{i_r}^r \mid i_1 = 1,\ldots,n_1;\ldots;i_r = 1,\ldots,n_r \right\}$$

en basis for $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$.

Specielt ser vi altså, at

$$\dim(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r) = \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_r .$$

<u>Bevis.</u> $r = 2$

Som allerede bemærket er $V_1 \otimes V_2$ frembragt af vektorerne $v_1 \otimes v_2$.

Hvis

$$v_1 = \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1^{i_1} e_{i_1}^1 \quad \text{og} \quad v_2 = \sum_{i_2=1}^{n_2} a_2^{i_2} e_{i_2}^2$$

får vi, når bilineariteten af $\otimes$ benyttes:

$$v_1 \otimes v_2 = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2 .$$

Heraf fremgår det, at elementerne $e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2$ frembringer $V_1 \otimes V_2$.

Vi skal nu vise, at $\{e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2\}$ er lineært uafhængige i $V_1 \otimes V_2$.

Vi betragter dertil for ethvert sæt af index i_1 og i_2 følgende afbildning

$$F_{i_1 i_2} : V_1 \times V_2 \to k$$

defineret ved fastsættelsen

$$F_{i_1 i_2}(v_1, v_2) = a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} ,$$

hvor $a_1^{i_1}$ og $a_2^{i_2}$ er komponenterne for henholdsvis v_1 og v_2 efter $e_{i_1}^1$ og $e_{i_2}^2$.

Det er let at indse, at $F_{i_1 i_2}$ er bilineær. Der findes derfor en lineær afbildning

$$\bar{F}_{i_1 i_2} : V_1 \otimes V_2 \to k ,$$

således at $\bar{F}_{i_1 i_2}(v_1 \otimes v_2) = a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2}$.

Antag nu, at

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} c^{i_1 i_2} e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2 = 0 \qquad \text{i } V_1 \otimes V_2 .$$

Anvendes den lineære afbildning $\bar{F}_{i_1 i_2}$ på denne ligning, får vi $c^{i_1 i_2} = 0$.

Dette beviser sætning A 2.7.

Sætning A 2.8. Lad V_1 og V_2 være vektorrum over k. Der findes en kanonisk isomorfi $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$, som afbilder $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ på $v_2 \otimes v_1 \in V_2 \otimes V_1$.

Bevis. Afbildningen

$$V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$$

defineret ved fastsættelsen

$$(v_1, v_2) \rightsquigarrow v_2 \otimes v_1$$

er bilineær.

Der findes derfor en lineær afbildning $V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$, som afbilder $v_1 \otimes v_2$ på $v_2 \otimes v_1$.

Tilsvarende ser vi, at der existerer en lineær afbildning $V_2 \otimes V_1 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$, som afbilder $v_2 \otimes v_1$ på $v_1 \otimes v_2$.

Da disse afbildninger klart er gensidigt inverse, er sætningen bevist.

Sætning A 2.9. Lad V_1, V_2 og V_3 være vektorrum over k. Der findes en kanonisk isomorfi $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, som afbilder $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ på $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$. Tilsvarende findes en kanonisk isomorfi $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, som afbilder $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ på $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$.

Bevis. Problemet består igen i at vise, at der findes en lineær afbildning som foreskrevet. Her beviser vi dette således. Betragt for fastholdt $v_3 \in V_3$ afbildningen

$$\alpha_{v_3} : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

defineret ved fastsættelsen

$$\alpha_{v_3}(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 .$$

Da α_{v_3} er bilineær findes en lineær afbildning

$$\bar{\alpha}_{v_3}: V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3,$$

således at $\bar{\alpha}_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$

Samlingen af lineære afbildninger $\bar{\alpha}_{v_3}$ for $v_3 \in V_3$ giver en bilineær afbildning

$$\bar{\alpha}: (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

defineret ved fastsættelsen

$$\bar{\alpha}(v_1 \otimes v_2, v_3) = \bar{\alpha}_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

Da $\bar{\alpha}$ er bilineær, får vi en lineær afbildning

$$\bar{\bar{\alpha}}: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3,$$

således at $\bar{\bar{\alpha}}((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$

Idet afbildningen

$$V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

som afbilder (v_1, v_2, v_3) på $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$, klart er multilineær, findes en lineær afbildning

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

som afbilder $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ på $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$

Da denne afbildning trivielt er invers til $\bar{\bar{\alpha}}$, er sætningen bevist.

Sætningerne A 2.8 og A 2.9 viser, at tensor produkt af vektorrum erhenholdsvis kommutativ og associativ op til kanonisk isomorfi. Næste sætning viser, at vi har et neutralt element op til kanonisk isomorfi.

Sætning A 2.10. Lad V være et vektorrum over k. Der findes kanoniske isomorfier $k \otimes V \cong V$ og $V \otimes k \cong V$, som afbilder henholdsvis $a \otimes v$ på $a \cdot v$ og $v \otimes a$ på $v \cdot a$.

Bevis. Der findes en lineær afbildning $\alpha : k \otimes V \longrightarrow V$, således at $\alpha(a \otimes v) = a \cdot v$. (Hvorfor?).

Det er endvidere let at indse, at afbildningen $\beta : V \longrightarrow k \otimes V$, defineret ved fastsættelsen $\beta(v) = 1 \otimes v$, er lineær.

Da $\beta\alpha\ (a \otimes v) = \beta(a \cdot v) = 1 \otimes a \cdot v = a(1 \otimes v) = a \otimes v$ for ethvert $a \in k$ og ethvert $v \in V$, slutter vi, at $\beta\alpha$ er identiteten på $k \otimes V$.

Idet man let indser, at $\alpha\beta$ er identiteten på V, følger så, at α er en isomorfi.

Dette beviser sætningens første udsagn. Andet udsagn bevises tilsvarende.

Vi vil nu undersøge tensor produktets funktorielle egenskaber.

Sætning A 2.11. Lad $F_i : V_i \longrightarrow W_i$ være lineære afbildninger for $i = 1,\ldots,r$.

Der findes en entydig bestemt lineær afbildning

$$F_1 \otimes \ldots \otimes F_r : V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_r,$$

således at

$$F_1 \otimes \ldots \otimes F_r(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = F_1(v_1) \otimes \ldots \otimes F_r(v_r)$$

for ethvert sæt af vektorer $v_1,\ldots,v_r$.

Bevis. $F_1 \otimes \ldots \otimes F_r$ er den entydigt bestemte lineære afbildning, der gør følgende diagram kommutativt

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "F_1 \times \ldots \times F_r"'] & V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \arrow[d, "F_1 \otimes \ldots \otimes F_r"] \\
W_1 \times \ldots \times W_r \arrow[r, "\varphi'"'] & W_1 \otimes \ldots \otimes W_r
\end{tikzcd}$$

φ og φ' er her de multilineære afbildninger hørende til et tensor produkt. Da afbildningen $\varphi'(F_1\times \dots \times F_r)$ er multilineær, kan den netop entydigt faktoriseres gennem φ. Herved fremkommer $F_1\otimes\dots\otimes F_r$. Kommutativiteten af diagrammet giver netop egenskaben

$$F_1\otimes\dots\otimes F_r(v_1\otimes\dots\otimes v_r) = F_1(v_1)\otimes\dots\otimes F_r(v_r).$$

Hvis $F_i: V_i \longrightarrow W_i$ og $G_i: W_i \longrightarrow U_i$ er lineære afbildninger for $i = 1,\dots,r$, indser man let, at

$$(G_1\otimes\dots\otimes G_r)(F_1\otimes\dots\otimes F_r) = (G_1F_1)\otimes\dots\otimes(G_rF_r)$$

og

$$1_{V_1}\otimes\dots\otimes 1_{V_r} = 1_{V_1\otimes\dots\otimes V_r}.$$

Opgave 2. Beskriv en kategori således at dannelse af r-fold tensor produkt er en covariant funktor fra denne kategori til kategorien af vektorrum over legemet k.

3. Tensorer.

I det følgende betegner V et n-dimensionalt vektorrum over legemet k med tilsvarende dualt vektorrum V^*.

Vektorer i V og V^* vil vi betegne med henholdsvis v og v^*. Værdien af et lineært funktional v^* på en vektor v angives ved $\langle v, v^* \rangle$. Derved får man som bekendt en bilineær afbildning

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \longrightarrow k.$$

Nu til definitionen af tensorer.

Betragt vektorrummet

$$T^r_s(V) = V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$$

der indeholder faktoren V r gange og faktoren V^* s gange.

$T^r_s(V)$ kaldes <u>tensor rummet af type (r,s) over V</u>, eller <u>tensor rummet af contravariant grad r og covariant grad s over V</u>.

Et element $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \ldots \otimes v^{*s} \in T^r_s(V)$ kaldes tilsvarende for en <u>tensor af type (r,s)</u> eller en <u>tensor af contravariant grad r og covariant grad s.</u>

I de specielle tilfælde $r = 0$ eller $s = 0$ bruger vi betegnelserne

$$T^*_s(V) = T^0_s(V) \quad \text{og} \quad T^r_*(V) = T^r_0(V)$$

$T^*_s(V)$ omtales som <u>det covariante tensor rum af grad s over V</u>. Tilsvarende omtales $T^r_*(V)$ som <u>det contravariante tensor rum af grad r over V</u>. For de tilhørende tensorer bruges henholdsvis betegnelserne <u>covariant tensor af grad s</u> og <u>contravariant tensor af grad r</u>.

Vi observerer at

$$T^*_1(V) = V^* \quad \text{og} \quad T^1_*(V) = V.$$

Elementerne i V og V^* omtales derfor ofte henholdsvis som <u>de contravariante vektorer</u> og <u>de covariante vektorer</u>.

Da tensor produktet er associativt, følger det, at

$$T^r_s(V) = T^r_*(V) \otimes T^*_s(V)$$

(lighedstegnet står her for en kanonisk isomorfi).

Hvis både $r \neq 0$ og $s \neq 0$ omtaler man ofte vektorerne i $T^r_s(V)$ som <u>blandede tensorer</u> (mixed tensors) på V.

P.gr.a. kommutativitet op til kanonisk isomorfi (sætning A 2.8) vil vi f.eks. bruge identifikationen:

$$T^2_3(V) = V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V.$$

Hvis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er en basis i V, og $\{e^{*1},\ldots,e^{*n}\}$ er den duale basis i V^*, bliver tensorerne

$$e_{i_1} \otimes\ldots\otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes\ldots\otimes e^{*j_s},$$

hvor alle index kan variere fra 1 til n, en basis i $T^r_s(V)$. (Sætning A 2.7.)

En tensor $T \in T^r_s(V)$ har derfor en entydig fremstilling

$$T = \sum\ldots\sum t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\, e_{i_1} \otimes\ldots\otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes\ldots\otimes e^{*j_s},$$

hvor der summeres over alle forekommende index.

Skalarerne $t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ kaldes tensorens <u>komponenter</u> m.h.t. basen $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

Transformations-egenskaberne ved en tensors komponenter under skift af basis i V, er interessant derved, at de giver forbindelsen med den klassiske definition af en tensor.

Antag derfor, at $\{e_1,\ldots,e_n\}$ og $\{f_1,\ldots,f_n\}$ er 2 baser i V.

Matricerne for basisskrift er bestemt af

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \, f_i \quad \text{og} \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} b_j^i \, e_i$$

for $j = 1,\ldots,n$.

Matricen $\{a_j^i\}$, hvor a_j^i er elementet i i'te række og j'te søjle, er matricen for den identiske afbildning af V på V fra V med basis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ til V med basis $\{f_1,\ldots,f_n\}$. Da matricen $\{b_j^i\}$ tilsvarende fremstiller identiteten på V, er de 2 matricer $\{a_j^i\}$ og $\{b_j^i\}$ gensidigt inverse. Der gælder altså relationerne

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^i \, b_j^k = \delta_{ij}.$$

Hvis $v \in V$ har koordinatfremstillingerne

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i \, e_i = \sum_{i=1}^{n} y^i \, f_i$$

gælder

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \, x^j \quad \text{og} \quad x^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i \, y^j$$

for $i = 1,\ldots,n$.

Skiftet mellem de duale baser foregår som bekendt v.hj.a. de transponerede inverse matricer.

Der gælder altså:

$$e^{*j} = \sum_{i=1}^{n} b_i^j \, f^{*i} \quad \text{og} \quad f^{*j} = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \, e^{*i}$$

for $j = 1,\ldots,n$.

Man kan let indse dette ved at bemærke, at elementet i i'te række og j'te søjle ved skift fra V^* med basis $\{e^{*1},\ldots,e^{*n}\}$ til V^* med basis $\{f^{*1},\ldots,f^{*n}\}$ netop er:

$$\langle f_i, e^{*j} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} b_i^k \, e_k, e^{*j} \rangle = b_i^j.$$

Hvis $v^* = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{*i} = \sum_{i=1}^{n} y_i f^{*i}$ finder vi altså:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_i^j x_j \quad \text{og} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j y_j$$

for $i = 1,\ldots,n$.

Vi er nu klar til at undersøge en tensors komponentskift. Antag, at $T \in T_s^r(V)$. T fremstilles m.h.t. baserne $\{e_1,\ldots,e_n\}$ og $\{f_1,\ldots,f_n\}$ i V på formen

$$T = \sum\cdots\sum t_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\, e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1}\otimes\ldots\otimes e^{*j_s}$$

$$= \sum\cdots\sum s_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\, f_{i_1}\otimes\ldots\otimes f_{i_r} \otimes f^{*j_1}\otimes\ldots\otimes f^{*j_s}.$$

Udnyttes multilineariteten af $\otimes$ finder vi:

$$s_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} = \sum\cdots\sum t_{l_1\ldots l_s}^{k_1\ldots k_r}\, a_{k_1}^{i_1}\ldots a_{k_r}^{i_r} \cdot b_{j_1}^{l_1}\ldots b_{j_s}^{l_s},$$

hvor der summeres fra 1 til n over alle index, der forekommer en gang som øvre og en gang som nedre index.

Vi kan iøvrigt bemærke, at denne summations konvension er almindelig i slige affærer. Den omtales gerne som <u>Einsteins konvension</u>.

Klassisk definerer man en tensor contravariant af grad r og covariant af grad s på V til at være et system af par

$$(\{e_1,\ldots,e_n\}, \{t_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\}),$$

hvor $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er en basis i V, og komponenterne $t_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}$ transformerer ved ovenstående regel under skift af basis.

Opgave 3. Vis, at den klassiske definition af en tensor er ækvivalent med den her givne.

Opgave 4. Opskriv transformations regler for covariante og contravariante tensorer på V.

Hvis $F: V \longrightarrow W$ er en lineær afbildning, får vi inducerede lineære afbildninger

$$T^r_*(F): T^r_*(V) \longrightarrow T^r_*(W)$$

og

$$T^*_s(F): T^*_s(W) \longrightarrow T^*_s(V)$$

defineret ved fastsættelserne

$$T^r_*(F) = F \otimes \ldots \otimes F$$

og

$$T^*_s(F) = F^* \otimes \ldots \otimes F^*,$$

hvor $F^*: W^* \longrightarrow V^*$ er den duale afbildning til F.

Sætning A 2.12. T^r_* er en covariant funktor fra kategorien af endelig dimensionale vektorrum over k ind i sig selv. T^*_s er tilsvarende en contravariant funktor.

Bevis. Overlades til læseren.

Bemærkning. Som Sætning A 2.12 viser, må det betegnes som et historisk uheld, at $T^r_*(V)$ betegnes som de contravariante tensorer af grad r, idet T^r_* er en covariant funktor. Tilsvarende med $T^*_s(V)$.

I almindelighed vil en lineær afbildning $F: V \longrightarrow W$ ikke inducere nogen afbildning mellem $T^r_s(V)$ og $T^r_s(W)$. T^r_s har derfor sædvanligvis ingen funktorielle egenskaber.

Hvis $F: V \longrightarrow W$ er en isomorfi, får vi en induceret afbildning

$$F\otimes\ldots\otimes F\otimes(F^{-1})^*\otimes\ldots\otimes(F^{-1})^*: T^r_s(V) \longrightarrow T^r_s(W).$$

Opgave 5. Beskriv en kategori i hvilken T^r_s er en covariant funktor.

For $V = T^1_*(V)$ og $V^* = T^*_1(V)$ har vi den bilineære form

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V^* \longrightarrow k,$$

hvor $\langle v,v^*\rangle$ er værdien af v^* på v.

Denne bilineære form kan generaliseres. For ethvert r findes en bilineær form

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : T^r_*(V) \times T^*_r(V) \longrightarrow k$$

defineret ved fastsættelsen

$$\langle v_1\otimes\ldots\otimes v_r,\ v^{*1}\otimes\ldots\otimes v^{*r}\rangle = \langle v_1,v^{*1}\rangle \ldots \langle v_r,v^{*r}\rangle .$$

Opgave 6. Vis, at der existerer en bilineær form som foreskrevet.

Hvis vi alment har en bilineær form

$$\varphi: V_1 \times V_2 \longrightarrow k$$

inducerer denne lineære afbildninger

$$\varphi_1: V_1 \longrightarrow V_2^* \quad \text{og} \quad \varphi_2: V_2 \longrightarrow V_1^*$$

defineret ved fastsættelserne

$$\varphi_1(v_1)(v_2) = \varphi(v_1,v_2) \quad \text{og} \quad \varphi_2(v_2)(v_1) = \varphi(v_1,v_2)$$

for ethvert par af vektorer $v_1 \in V_1$ og $v_2 \in V_2$.

<u>Definition.</u> φ kaldes ikke-singulær hvis både φ_1 og φ_2 er isomorfier.

<u>Sætning A 2.13.</u> Hvis V er et endeligt dimensionalt vektorrum over k, er den bilineære form

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : T^r_*(V) \times T^*_r(V) \longrightarrow k$$

ikke-singulær for ethvert r.

<u>Bemærkning.</u> Observer, at denne sætning for $r=1$ giver den kanoniske isomorfi af V på dets dobbelt duale rum V^{**}.

<u>Bevis.</u> Lad $\{e_1,\dots,e_n\}$ være en basis for V.
Så er

$$\{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\} \quad \text{og} \quad \{e^{*i_1}\otimes\dots\otimes e^{*i_r}\}$$

baser for henholdsvis $T^r_*(V)$ og $T^*_r(V)$ (Sætning A 2.7).
Vi observerer, at

$$\langle e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r},\ e^{*j_1}\otimes\dots\otimes e^{*j_r}\rangle = \delta_{i_1 j_1}\cdots\delta_{i_r j_r}.$$

Det fremgår heraf, at

$$\{\langle e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r},\cdot\rangle\}$$

er en basis for $\mathcal{L}(T^*_r(V);k)$.
Dette beviser, at den lineære afbildning

$$T^r_*(V) \longrightarrow \mathcal{L}(T^*_r(V);k)$$

er en isomorfi.
Tilsvarende ses, at

$$T^*_r(V) \longrightarrow \mathcal{L}(T^r_*(V);k)$$

er en isomorfi.
Dermed er sætningen bevist.

Sætning A 2.14. For et endeligt dimensionalt vektorrum V over k har vi følgende kanoniske isomorfier

$$T_r^*(V) \cong \mathcal{L}(T_*^r(V);k) \cong \mathcal{L}(V,\dots,V;k)$$

$$T_*^r(V) \cong \mathcal{L}(T_r^*(V);k) \cong \mathcal{L}(V^*,\dots,V^*;k),$$

hvor $\mathcal{L}(V,\dots,V;k)$ er vektorrummet af r-lineære former på V, og $\mathcal{L}(V^*,\dots,V^*;k)$ er vektorrummet af r-lineære former på V^*.

Bevis. Sætning A 2.13 og Lemma A 2.5.

Fra Sætning A 2.14 følger, at vi kan identificere de covariante tensorer på V med de multilineære former på V. Specielt observerer vi, at $v^{*1}\otimes\dots\otimes v^{*r} \in T_r^*(V)$ opfattet som r-lineær form på V, har virkningen

$$v^{*1}\otimes\dots\otimes v^{*r}(v_1,\dots,v_r) = \langle v_1,v^{*1}\rangle \dots \langle v_r,v^{*r}\rangle .$$

Det følger ligeledes fra Sætning A 2.14, at de contravariante tensorer på V kan identificeres med de multilineære former på V^*. Under denne identifikation ses, at $v_1\otimes\dots\otimes v_r \in T_*^r(V)$ som r-lineær form på V^* har virkningen

$$v_1\otimes\dots\otimes v_r(v^{*1},\dots,v^{*r}) = \langle v_1,v^{*1}\rangle \dots \langle v_r,v^{*r}\rangle.$$

Opgave 7. Lad $V_1,\dots,V_r$ være endelig dimensionale vektorrum over k.

Vis, at der findes en kanonisk isomorfi

$$V_1^*\otimes\dots\otimes V_r^* \cong (V_1\otimes\dots\otimes V_r)^*.$$

Vis, at der findes en kanonisk isomorfi

$$V_1\otimes\dots\otimes V_r \cong \mathcal{L}(V_1^*,\dots,V_r^*;k).$$

Blandede tensorer af contravariant grad 1 kan også identificeres med visse multilineære afbildninger.

Sætning A 2.15. Lad V være et endeligt dimensionalt vektorrum over k.

Der findes en kanonisk isomorfi

$$T_s^1(V) \cong \mathcal{L}(V,\dots,V;\ V),$$

hvor $\mathcal{L}(V,\dots,V;\ V)$ er vektorrummet af multilineære afbildninger fra s kopier af V til V.

Bevis. Betragt afbildningen

$$H:\ V \times V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \mathcal{L}(V,\dots,V;\ V)$$

defineret ved fastsættelsen:

$$H(v\ ,v^{*1},\dots,v^{*s})(v_1,\dots,v_s) = \langle v_1,v^{*1}\rangle \dots \langle v_s,v^{*s}\rangle\, v.$$

Det er klart, at H er en multilineær afbildning. Vi får derfor en induceret lineær afbildning

$$\overline{H}:\ T_s^1(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V,\dots,V;\ V).$$

$\overline{H}$ er den søgte isomorfi. Vi kan indse dette ved at vælge baser i de 2 vektorrum.

Hvis $\{e_1,\dots,e_n\}$ er en basis i V, er de n^{s+1} multilineære afbildninger

$$F_{i_1\dots i_s;\ i} \in \mathcal{L}(V,\dots,V;\ V)$$

defineret ved fastsættelsen

$$F_{i_1\dots i_s;\ i}(e_{j_1},\dots,e_{j_s}) = \delta_{i_1 j_1}\dots\delta_{i_s j_s}\ e_i$$

en basis i $\mathcal{L}(V,\dots,V;\ V)$ (Sætning A 2.3).

Samtidig er de n^{s+1} tensorer

$$e_i \otimes e^{*i_1} \otimes \ldots \otimes e^{*i_s}$$

en basis i $T_s^1(V)$ (Sætning A 2.7).

Da det er klart, at

$$\overline{H}(e_i \otimes e^{*i_1} \otimes \ldots \otimes e^{*i_s}) = F_{i_1 \ldots i_s;\, i},$$

afbilder $\overline{H}$ en basis i $T_s^1(V)$ på en basis i $\mathcal{L}(V,\ldots,V;\, V)$.

Heraf følger det umiddelbart, at $\overline{H}$ er en isomorfi. Vi kalder denne isomorfi kanonisk, fordi der ikke indgår valg af basis i definitionen af $\overline{H}$.

Dermed er Sætning A 2.15 bevist.

Opgave 8. Lad V og W være endelig dimensionale vektorrum over k.

Vis, at der findes en kanonisk isomorfi

$$\sigma : V \otimes W \longrightarrow \mathcal{L}(V^*;\, W),$$

således at

$$\sigma(v \otimes w)(v^*) = \langle v, v^* \rangle\, w \qquad \forall v \in V,\ \forall w \in W \text{ og } \forall v^* \in V^*.$$

4. Tensor algebraer.

V betegner stadigt et n-dimensionalt vektorrum over legemet k.

Betragt de contravariante tensor rum $T_*^r(V)$ og $T_*^s(V)$.

Associativitet af tensor produkt af vektorrum (Sætning A2.9) giver en kanonisk isomorfi

$$\Theta:\ T_*^r(V) \otimes T_*^s(V) \longrightarrow T_*^{r+s}(V).$$

Lad φ være den universelle bilineære afbildning for ovenstående tensor produkt

$$\varphi : T_*^r(V) \times T_*^s(V) \longrightarrow T_*^r(V) \otimes T_*^s(V).$$

Sammensætningen $\mu = \Theta\varphi$ giver en bilineær afbildning

$$\mu : T_*^r(V) \times T_*^s(V) \longrightarrow T_*^{r+s}(V).$$

Hvis $T \in T_*^r(V)$ og $T' \in T_*^s(V)$ kalder vi $\mu(T,T')$ for <u>produktet</u> af tensorerne T og T'. Af naturlige årsager bruger vi betegnelsen $T \otimes T' = \mu(T,T')$.

Hvis vi specielt betragter tensorer $T = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ og $T' = v_1' \otimes \ldots \otimes v_s'$, finder vi

$$T \otimes T' = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes v_1' \otimes \ldots \otimes v_s'.$$

Dette karakteriserer produktet fuldstændigt.

Da tensor produktet er associativt, bliver dette produkt associativt. Hvis $T \in T_*^r(V)$, $T' \in T_*^s(V)$ og $T'' \in T_*^t(V)$ gælder altså

$$(T \otimes T') \otimes T'' = T \otimes (T' \otimes T'')$$

i tensor rummet $T_*^{r+s+t}(V)$.

Derimod gælder der sædvanligvis ikke, at produktet er kommutativt.

<u>Opgave 9.</u> Giv et exempel, hvor

$$T \otimes T' \neq T' \otimes T \quad \text{i } T_*^{r+s}(V).$$

Hvis vi sætter $T_*^0(V) = k$ kan ovenstående produkt også udstrækkes til tilfældene, hvor et eller begge index r og s er 0. Her benytter vi de kanoniske isomorfier i Sætning A 2.10.

F.eks. får vi den bilineære afbildning

$$k \times T^r_*(V) \longrightarrow k \otimes T^r_*(V) \xrightarrow{\cong} T^r_*(V).$$

Den sidste isomorfi viser, at produkt med et element i $T^0_*(V) = k$ blot er sædvanlig multiplikation med en skalar.

Striben af vektorrum $T^r_*(V)$ for $r \geqq 0$ med ovenstående "graduerede" produkt kan sammenfattes i en sædvanlig algebra.

Dette kræver, at vi definerer den direkte sum af vilkårlig mange vektorrum over samme legeme.

Definition A 2.16. Lad $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ være en vilkårlig samling af vektorrum over legemet k.

Den direkte sum af vektorrummene V_α over $\alpha \in \Gamma$ er vektorrummet

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha \quad \text{over} \quad k,$$

hvis elementer er sæt $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha$ bestående af præcis en vektor $v_\alpha \in V_\alpha$ for hvert $\alpha \in \Gamma$, således at $v_\alpha \neq 0 \in V_\alpha$ for højst endelig mange $\alpha \in \Gamma$.

Addition og multiplikation med skalar fra k er defineret ved

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha + \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} w_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} (v_\alpha + w_\alpha)$$

$$a \cdot \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} (a \cdot v_\alpha)$$

for $v_\alpha, w_\alpha \in V_\alpha$ og $a \in k$.

Bemærkning. Der er et konstruktivt element i definitionen, og man skal naturligvis verificere, at de således definerede kompositionsregler gør $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$ til et vektorrum over k. Man bemærker endvidere, at der er tale om en naturlig generalisation af direkte sum af 2 vektorrum.

Hørende til en direkte sum $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$ kan vi for ethvert $\alpha_o \in \Gamma$ betragte afbildningen

$$i_{\alpha_o} : V_{\alpha_o} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha ,$$

hvor $i_{\alpha_o}(v_{\alpha_o}) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v'_\alpha$ med $v'_{\alpha_o} = v_{\alpha_o}$ og $v'_\alpha = 0 \in V_\alpha$ for ethvert $\alpha \in \Gamma$ med $\alpha \neq \alpha_o$.

Man indser let, at i_{α_o} er en 1-1-tydig lineær afbildning. i_{α_o} er således en isomorfi af V_{α_o} på underrummet $V'_{\alpha_o} \subseteq \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$ bestående af element sæt $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha$ med $v_\alpha = 0$ for $\alpha \neq \alpha_o$. V.hj.a. isomorfierne i_α identificerer man vektorrummene V_α med underrummene V'_α i den direkte sum.

Hvis $F_\alpha : V_\alpha \longrightarrow W_\alpha$ er et system af lineære afbildninger for $\alpha \in \Gamma$, får vi en lineær afbildning

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} W_\alpha$$

defineret ved fastsættelsen

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha \Big) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha (v_\alpha).$$

(Overvej at $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha$ er en lineær afbildning.)

Når Γ er de ikke negative hele tal bruges ofte skrivemåden

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha = \bigoplus_{n=o}^{\infty} V_n = V_o \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$$

for den direkte sum.

Vi sætter nu

$$\mathcal{T}_*(V) = \bigoplus_{r=o}^{\infty} T_*^r(V) = k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \dots$$

$\mathcal{T}_*(V)$ er således et vektorrum over k, hvis elementer er summer

$$\bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r = T^0 \oplus T^1 \oplus \dots ,$$

hvor $T^r \in T^r_*(V)$ er forskellig fra 0 for højst endelig mange r.

I $\mathcal{T}_*(V)$ kan vi definere et produkt ved fastsættelsen

$$\left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r\right) \otimes \left(\bigoplus_{s=0}^{\infty} \tilde{T}^s\right) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{t=r+s} T^r \otimes \tilde{T}^s\right).$$

$\sum_{t=r+s} T^r \otimes \tilde{T}^s$ er sædvanlig addition i $T^t_*(V)$.

Da T^r og $\tilde{T}^s$ er forskellig fra 0 for højst endelig mange r og s, er $\sum_{t=r+s} T^r \otimes \tilde{T}^s$ forskellig fra 0 for højst endelig mange t. Produktet er derfor veldefineret.

Det er let at indse, at det således definerede produkt er bilineært og associativt.

$\mathcal{T}_*(V)$ er derfor en associativ algebra over k. Denne algebra kaldes den contravariante tensor algebra over V.

Da produktet $\otimes$ er gradueret, d.v.s.

$$T^r_*(V) \otimes T^s_*(V) \subseteq T^{r+s}_*(V)$$

siger man ofte, at $\mathcal{T}_*(V)$ er en gradueret algebra.

Opgave 10. Gennemfør de manglende detaljer i beviset for at $\mathcal{T}_*(V)$ er en associativ algebra over k (en definition er givet i Opgave 4 § 4). Har $\mathcal{T}_*(V)$ et neutralt element ved multiplikationen ?

Opgave 11. Lad $F: V \longrightarrow W$ være en lineær afbildning. Vis, at der findes en lineær afbildning $\mathcal{T}_*(F): \mathcal{T}_*(V) \longrightarrow \mathcal{T}_*(W)$.

Vis, at $\mathcal{T}_*$ bliver en covariant funktor.

<u>Opgave 12.</u> Lad V være et vektorrum over k, og lad $i_1 : T^1_*(V) = V \longrightarrow \mathcal{T}_*(V)$ være den naturlige indlægning af V i $\mathcal{T}_*(V)$.

Vis, at hvis $F: V \longrightarrow A$ er en lineær afbildning fra V til en vilkårlig algebra A over k, findes en entydig bestemt algebra homomorfi $\bar{F}: \mathcal{T}_*(V) \longrightarrow A$, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{T}_*(V) \arrow[dl, "\bar{F}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Lad os nu på tilsvarende måde betragte 2 covariante tensor rum $T^*_r(V)$ og $T^*_s(V)$.

Associativitet af tensor produktet giver en bilineær afbildning

$$\mu : T^*_r(V) \times T^*_s(V) \longrightarrow T^*_{r+s}(V).$$

Hvis $T \in T^*_r(V)$ og $T' \in T^*_s(V)$ kalder vi $\mu(T,T')$ for produktet af tensorerne T og T'. Vi bruger betegnelsen $T \otimes T' = \mu(T,T')$.

Hvis $T = v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*r}$ og $T' = \bar{v}^{*1} \otimes \dots \otimes \bar{v}^{*s}$ er

$$T \otimes T' = v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*r} \otimes \bar{v}^{*1} \otimes \dots \otimes \bar{v}^{*s}.$$

Dette karakteriserer produktet fuldstændigt.

Da tensor produktet er associativt bliver dette produkt associativt. Sædvanligvis er det ikke kommutativt.

Hvis vi sætter $T^*_0(V) = k$, kan vi igen udstrække produktet til tilfældene, hvor et eller begge index r og s er 0. Produktet bliver her blot multiplikation med skalar.

Produktet overføres som i det contravariante tilfælde til dendirekte sum

$$\mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^*_r(V) = k \oplus V^* \oplus V^* \otimes V^* \oplus \dots .$$

$\mathcal{T}^*(V)$ bliver herved en associativ algebra over k. Denne algebra kaldes <u>den covariante tensor algebra over V</u>.

<u>Opgave 13.</u> Vis, at $\mathcal{T}^*$ kan gøres til en contravariant funktor.

<u>Opgave 14.</u> Betragt de blandede tensor rum $T^{r_1}_{s_1}(V)$ og $T^{r_2}_{s_2}(V)$. Vis, at man på naturlig måde kan definere en bilineær afbildning

$$\mu : T^{r_1}_{s_1}(V) \times T^{r_2}_{s_2}(V) \longrightarrow T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$$

(Sætningerne A 2.8 og A 2.9 skal benyttes).

Der defineres herved et associativt produkt af blandede tensorer.

Vis, at dette produkt kan udstrækkes til

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigoplus_{s=0}^{\infty} T^r_s(V)$$

hvor vi sætter $T^0_0(V) = k$.

$\mathcal{T}(V)$ kaldes <u>tensor algebraen over V</u>.

<u>Opgave 15.</u> Find formler for komponenterne af produktet af 2 tensorer udtrykt ved disse tensorers komponenter m.h.t. en given basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ i V.

<u>Opgave 16.</u> Betragt $T^r_s(V)$ med $r \geq 1$ og $s \geq 1$.

Vis, at der findes en lineær afbildning

$$K^i_j : T^r_s(V) \longrightarrow T^{r-1}_{s-1}(V),$$

således at

$$K^i_j(v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*s})$$
$$= \langle v_i, v^{*j}\rangle\, v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*j-1} \otimes v^{*j+1} \otimes \dots \otimes v^{*s}$$

K^i_j kaldes <u>kontraktionen</u> m.h.t. index i og j.

Lad $T \in T^r_s(V)$. Find et udtryk for komponenterne af $K^i_j(T)$ udtrykt ved komponenterne af T m.h.t. en given basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ i V.

<u>Opgave 17.</u> Lad $\sigma: V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{L}(V;V)$ være den kanoniske isomorfi (Sætning A 2.15) defineret ved fastsættelsen

$$\sigma(v \otimes v^*)(w) = \langle w, v^* \rangle\, v \quad \forall v,w \in V \text{ og } \forall v^* \in V^*.$$

Lad endvidere $K: V \otimes V^* \longrightarrow k$ være kontraktionen i Opgave 16, og lad $tr: \mathcal{L}(V;V) \longrightarrow k$ være afbildningen som til $A \in \mathcal{L}(V;V)$ knytter sporet for A.

Vis, at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} V \otimes V^* \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\sigma"'] & k \\ \mathcal{L}(V;V) \arrow[ur, "tr"'] & \end{tikzcd}$$

Lad $A,B \in \mathcal{L}(V;V)$. Vis, at

$$tr(A \otimes B) = tr(A)\cdot tr(B).$$

5. Ydre potenser og Grassmann algebraer.

Tensor produkt af vektorrum er knyttet til begrebet multilineær afbildning. Ydre potenser af et vektorrum er på tilsvarende måde knyttet til begrebet multilineær alternerende afbildning.

Definition A 2.17. Lad V og W være vektorrum over k, og lad r være et helt tal ≥ 2. En r-lineær afbildning

$$F: V\times \dots \times V \longrightarrow W$$

kaldes alternerende, hvis $F(v_1,\dots,v_r) = 0 \in W$, når 2 vektorer $v_i, v_j \in V$ med $i \neq j$ er sammenfaldende.

Det er let at indse, at mængden af r-lineære alternerende afbildninger fra V til W bliver et vektorrum over k ved addition af funktionsværdier. Dette vektorrum vil vi betegne med $\mathcal{O\!l}_r(V;W)$.

Hvis $W = k$ omtaler vi elementerne i $\mathcal{O\!l}_r(V;k)$ som r-lineære alternerende former på V.

I det følgende betegner S_r gruppen af permutationer på mængden $\{1,\dots,r\}$. Fortegnet for en permutation $\sigma \in S_r$ betegner vi med $\operatorname{sign} \sigma$.

Sætning A 2.18. Hvis $F \in \mathcal{O\!l}_r(V;W)$ og $\sigma \in S_r$ gælder, at

$$F(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)}) = \operatorname{sign}\sigma \; F(v_1,\dots,v_r)$$

for ethvert sæt af vektorer $v_1,\dots,v_r \in V$.

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise sætningen, når σ er en transposition, idet enhver permutation er produktet af sådanne. Da en transposition kun involverer 2 argumenter, er det endvidere tilstrækkeligt at betragte tilfældet $r=2$. Vi skal herefter blot vise, at når $F \in \mathcal{O\!l}_2(V;W)$ gælder, at

$$F(v_2,v_1) = -F(v_1,v_2) \qquad \forall\, v_1,v_2 \in V.$$

Når vi udnytter, at F er bilineær og alternerende, får vi imidlertid straks ligningen

$$0 = F(v_1+v_2,\ v_1+v_2) = F(v_1,v_2) + F(v_2,v_1).$$

Denne ligning viser det ønskede og dermed sætningen.

Bemærkning. En r-lineær afb... F fra V til W med egenskaben i Sætning A 2.18 kaldes ofte skæv-symmetrisk. En multilineær alternerende afbildning er således altid skæv-symmetrisk. Hvis karakteristikken af grundlegemet k er forskellig fra 2, er det omvendte også tilfældet (overvej dette !).

Tensor produktet etablerede en 1-1-tydig korrespondance mellem multilineære afbildninger og lineæreafbildninger. Vi skal nu sætte r-lineære alternerende afbildninger i forbindelse med lineære afbildninger. Betragt dertil følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} V\times \dots \times V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "F"'] & E \arrow[d, "\tilde{F}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

λ og F er r-lineære alternerende afbildninger ind i vektorrummene E og W over k. $\tilde{F}$ er en lineær afbildning.

Definition A 2.19. Parret (E,λ) kaldes en r'te ydre potens af vektorrummet V, hvis der til en vilkårlig r-lineær alternerende afbildning $F\colon V\times \dots \times V \longrightarrow W$ findes en entydig bestemt lineær afbildning $\tilde{F}\colon E \longrightarrow W$, således at ovenstående diagram er kommutativt, d.v.s. så $F = \tilde{F}\lambda$.

Bemærkning. Den engelske term er r-fold exterior power of V.

Beviset for de næste 2 lemmaer forløber som beviset for lemmaerne A 2.5 og A 2.6 og overlades derfor til læseren.

Lemma A 2.20. Hvis (E, λ) er en r'te ydre potens af V, giver afbildningen $F \curvearrowright \tilde{F}$ en isomorfi af $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_r(V; W)$ på $\mathcal{L}(E; W)$ for ethvert vektorrum W over k.

Lemma A 2.21. Hvis (E, λ) og (E', λ') er 2 r'te ydre potenser af V, findes der en entydig bestemt isomorfi $\Theta : E \longrightarrow E'$, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "\Theta"] \\
V \times \dots \times V \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & \\
 & E'
\end{tikzcd}$$

Lemma A 2.21 viser, at ydre potenser af V i alt væsentligt er entydig bestemt.

Hvis (E, λ) er en r'te ydre potens af V, bruger man som regel betegnelsen

$$E = \bigwedge\nolimits^r_*(V).$$

For elementerne i billedet af λ bruger man betegnelsen

$$\lambda(v_1, \dots, v_r) = v_1 \wedge \dots \wedge v_r .$$

Tegnet $\wedge$ læses ydre produkt, wedge produkt eller Grassmann produkt.

Da λ er r-lineær gælder, at

$$v_1 \wedge \dots \wedge (v_i' + v_i'') \wedge \dots \wedge v_r = v_1 \wedge \dots \wedge v_i' \wedge \dots \wedge v_r + v_1 \wedge \dots \wedge v_i'' \wedge \dots \wedge v_r$$

og

$$v_1 \wedge \dots \wedge (a\, v_i) \wedge \dots \wedge v_r = a \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r)$$

for ethvert sæt af vektorer i V og ethvert $a \in k$.

Da λ er alternerende gælder:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0,$$

for ethvert sæt af vektorer i V, hvor 2 vektorer v_i og v_j med $i \neq j$ er sammenfaldende.

Fra sætning A 2.18 følger, at

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(r)} = \operatorname{sign}\sigma \; v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$$

for ethvert sæt af vektorer i V og enhver permutation $\sigma \in S_r$.

Existens af ydre potenser.

Lad $r \geqq 2$ og betragt tensor rummet

$$T_*^r(V) = V \otimes \ldots \otimes V.$$

Lad $N^r(V)$ være det underrum af $T_*^r(V)$ som er frembragt af tensorerne $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$, hvor 2 vektorer v_i og v_j med $i \neq j$ er sammenfaldende.

Vi danner nu kvotient vektorrummet

$$\Lambda_*^r(V) = T_*^r(V) / N^r(V).$$

Lad $p: T_*^r(V) \longrightarrow \Lambda_*^r(V)$ være den naturlige projektion af et element på sin sideklasse. Når $\Lambda_*^r(V)$ har kvotient struktur, er p en lineær afbildning.

Betragt nu sammensætningen $\lambda = p\varphi$, hvor $\varphi: V \times \ldots \times V \longrightarrow T_*^r(V)$ er den r-lineære afbildning hørende til et tensor produkt.

Det er let at indse, at definitionen af $N^r(V)$ sikrer, at λ bliver en r-lineær alternerende afbildning.

Vi vil nu vise, at parret $(\Lambda_*^r(V), \lambda)$ er en r'te ydre potens af V.

Lad dertil $F: V\times \ldots \times V \longrightarrow W$ være en vilkårlig r-linear alternerende afbildning. Da F er r-lineær findes en entydig bestemt lineær afbildning $\bar{F}: T^r_*(V) \longrightarrow W$, således at $F = \bar{F}\varphi$. Da $\bar{F}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = F(v_1,\ldots,v_r)$ for ethvert sæt af vektorer $v_1,\ldots,v_r \in V$, og F er alternerende, følger straks, at $\bar{F}$ antager værdien $0 \in W$ på elementer i $N^r(V)$. Der findes derfor en entydigt bestemt lineær afbildning $\tilde{F}: \Lambda^r_*(V) \longrightarrow W$, således at følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd}
V \;\ldots\; V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "F"'] & T^r_*(V) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\bar{F}"] & {}^r_*(V) \arrow[dl, "\tilde{F}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Da $\lambda = p\varphi$, og $\tilde{F}$ var entydig bestemt ud fra F, har vi bevist, at $(\Lambda^r_*(V), \lambda)$ er en r'te ydre potens af V.

<u>Bemærkning.</u> Da tensorerne $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ frembringer $T^r_*(V)$, fremgår det af ovenstående konstruktion, at elementerne $v_1\wedge \ldots \wedge v_r$ frembringer $\Lambda^r_*(V)$. Elementerne i $\Lambda^r_*(V)$ kaldes ofte for <u>r-vektorer</u>. Vi har således set, at enhver r-vektor kan skrives som en linearkombination af de simple r-vektorer $v_1\wedge \ldots \wedge v_r$.

Vi har hidtil kun defineret $\Lambda^r_*(V)$ for $r \geq 2$. Vi udvider nu definitionen til $r \geq 0$, idet vi sætter

$$\Lambda^0_*(V) = T^0_*(V) = k$$

og

$$\Lambda^1_*(V) = T^1_*(V) = V.$$

I harmoni hermed sætter vi $N^0(V) = N^1(V) = 0$. Vi har så:

$$\Lambda^r_*(V) = T^r_*(V) / N^r(V) \qquad \text{for } r \geq 0.$$

For $r,s \geqq 0$ ønsker vi at definere et produkt

$$\bar{\mu}: \Lambda_*^r(V) \times \Lambda_*^s(V) \longrightarrow \Lambda_*^{r+s}(V).$$

Vi tager vort udgangspunkt i tensor produktet

$$\mu: T_*^r(V) \times T_*^s(V) \longrightarrow T_*^{r+s}(V).$$

Som tidligere bemærket bruger vi betegnelsen $\otimes$ for dette produkt. Med denne notation får vi (overvej dette):

(i) $N^r(V) \otimes T_*^s(V) \subseteqq N^{r+s}(V)$

(ii) $T_*^r(V) \otimes N^s(V) \subseteqq N^{r+s}(V)$.

(i) og (ii) sikrer, at der existerer en entydig bestemt bilineær afbildning $\bar{\mu}$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{array}{ccc}
T_*^r(V) \times T_*^s(V) & \xrightarrow{\mu} & T_*^{r+s}(V) \\
{\scriptstyle p_r \times p_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{r+s}} \\
\Lambda_*^r(V) \times \Lambda_*^s(V) & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & \Lambda_*^{r+s}(V).
\end{array}$$

p_r, p_s og p_{r+s} er de respektive projektioner af et element på sin sideklasse.

$\bar{\mu}$ er det søgte produkt. Hvis $x \in \Lambda_*^r(V)$ og $y \in \Lambda_*^s(V)$ kalder vi $\bar{\mu}(x,y)$ for <u>det ydre produkt</u>, wedge produktet eller Grassmann produktet af <u>x og y</u>. Betegnelsen wedge produkt skyldes, at man benytter skrivemåden $x \wedge y$ for $\bar{\mu}(x,y)$.

Vi undersøger nu nogle af egenskaberne ved det ydre produkt. Hvis vi specielt betragter de simple vektorer

$$x = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \in \Lambda_*^r(V) \quad \text{og} \quad y = \bar{v}_1 \wedge \dots \wedge \bar{v}_s \in \Lambda_*^s(V)$$

får vi fra den tilsvarende egenskab ved tensor produktet, at

$$x \wedge y = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge \bar{v}_1 \wedge \dots \wedge \bar{v}_s .$$

Dette karakteriserer produktet fuldstændigt.

De s vektorer i $\bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_s$ kan føres forbi de r vektorer i $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ v.hj.a. $r \cdot s$ transpositionner. Vi får derfor:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge \bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_s = (-1)^{r \cdot s} \bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_s \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_r .$$

Da vektorerne $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ og $\bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_s$ frembringer henholdsvis $\bigwedge_*^r(V)$ og $\bigwedge_*^s(V)$, gælder følgende identitet i $\bigwedge_*^{r+s}(V)$ for ethvert $x \in \bigwedge_*^r(V)$ og ethvert $y \in \bigwedge_*^s(V)$:

$$x \wedge y = (-1)^{r \cdot s} y \wedge x .$$

P.gr.a. denne identitet siger man ofte, at det ydre produkt er <u>anti-kommutativt</u>.

Fra associativiteten af tensor produktet følger, at det ydre produkt er associativt. For ethvert $x \in \bigwedge_*^r(V)$, $y \in \bigwedge_*^s(V)$ og $z \in \bigwedge_*^t(V)$ gælder altså følgende identitet:

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \quad \text{i } \bigwedge_*^{r+s+t}(V).$$

Det ydre produkt inducerer et produkt i den direkte sum

$$\bigwedge_*(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigwedge_*^r(V).$$

Hvis $\bigoplus_{r=0}^{\infty} x_r$ og $\bigoplus_{s=0}^{\infty} y_s$ tilhører $\bigwedge_*(V)$, er produktet fastlagt ved

$$\left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} x_r\right) \wedge \left(\bigoplus_{s=0}^{\infty} y_s\right) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{t=r+s} x_r \wedge y_s\right).$$

Med dette produkt bliver $\bigwedge_*(V)$ en associativ, gradueret algebra over k.

Denne algebra kaldes for <u>den contravariante Grassmann algebra over V</u>.

<u>Sætning A 2.22.</u> Hvis $F: V \longrightarrow W$ er en lineær afbildning findes for ethvert $r \geq 1$ en entydig bestemt lineær afbildning

$$\bigwedge_*^r(F) : \bigwedge_*^r(V) \longrightarrow \bigwedge_*^r(W)$$

således at

$$\Lambda_*^r(F)(v_1\wedge \dots \wedge v_r) = F(v_1)\wedge \dots \wedge F(v_r)$$

for ethvert sæt af vektorer $v_1,\dots,v_r \in V$.

Bevis. Som sætning A 2.11.

Opgave 18. Bevis, at Λ_*^r er en covariant funktor for $r \geq 2$. Vis, at hvis man sætter $\Lambda_*^0(F) = 1_k$ og $\Lambda_*^1(F) = F$, kan Λ_* gøres til en covariant funktor fra kategorien af vektorrum over k til kategorien af algebraer over k.

Opgave 19. Sæt $N^0(V) = N^1(V) = 0$ og lad

$$N(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} N^r(V).$$

Vis, at $N(V)$ er et ideal i $\mathcal{T}_*(V)$. Vis dernæst, at

$$\Lambda_*(V) \cong \mathcal{T}_*(V)/N(V),$$

hvor $\cong$ er isomorfi som algebraer over k.

Sætning A 2.23. Lad V være et n-dimensionalt vektorrum over k.

Hvis $r > n$ er $\Lambda_*^r(V) = 0$. Hvis $r \leq n$ gælder, at

$$\dim \Lambda_*^r(V) = \binom{n}{r}.$$

Hvis $\{e_1,\dots,e_n\}$ er en basis for V og $r \leq n$, udgør vektorerne

$$e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_r} \quad \text{med} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

en basis for $\Lambda_*^r(V)$.

Bevis. Antag først, at $r > n$.

Ethvert sæt på r vektorer $v_1, \ldots, v_r \in V$ er i dette tilfælde lineært afhængigt. Mindst en af vektorerne i et sådant sæt kan derfor skrives som en linearkombination af de øvrige. Udnyttes r-lineariteten og alternationen af $\wedge$ fås herefter straks, at

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0.$$

Da elementerne $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ frembringer $\Lambda_*^r(V)$ følger så umiddelbart, at $\Lambda_*^r(V) = 0$.

Antag nu, at $r \leqq n$, og lad $\{e_1, \ldots, e_n\}$ være en basis for V.

Først erindrer vi om identiteten

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(r)} = \operatorname{sign}\sigma \; v_1 \wedge \ldots \wedge v_r,$$

som er opfyldt for ethvert sæt af vektorer $v_1, \ldots, v_r \in V$ og enhver permutation $\sigma \in S_r$.

Udnyttes denne identitet og r-lineariteten af $\wedge$, får man straks, at vektorerne

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \quad \text{med} \quad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n$$

frembringer $\Lambda_*^r(V)$.

Vi skal nu vise, at disse vektorer er lineært uafhængige i $\Lambda_*^r(V)$.

Dertil viser vi først, at vektoren

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda_*^n(V),$$

som frembringer $\Lambda_*^n(V)$, er forskellig fra nul-vektoren.

Hvis $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$ ville $\Lambda_*^n(V) = 0$. P.gr.a. lemma A 2.20 ville vi så have, at $\mathcal{O}\!\ell_n(V; k) = 0$. Fra mat.1.2 vides imidlertid, at vektorrummet af n-lineære alternerende former på V har dimensionen 1. $\mathcal{O}\!\ell_n(V; k)$ er derfor forskellig fra nul-vektorrummet. Heraf slutter vi, at $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0$.

Antag nu, at

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} a^{i_1 \ldots i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} = 0.$$

Lad $i_{r+1}, \ldots, i_n$ være de elementer i $\{1, \ldots, n\}$ som ikke optræder blandt tallene $i_1, \ldots, i_r$.

Multiplicerer (ydre produkt) vi ovenstående ligning med $e_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, får vi, når alternationen af $\wedge$ benyttes:

$$\pm\, a^{i_1 \ldots i_r} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0.$$

Da $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0$, slutter vi heraf, at $a^{i_1 \ldots i_r} = 0$. Dette beviser, at r-vektorerne $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ er lineært uafhængige. Dermed har vi bevist, at

$$\{ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n \}$$

er en basis i $\bigwedge^r_*(V)$.

Da vi kan tage r elementer ud af n elementer på præcis $\binom{n}{r}$ måder, slutter vi heraf, at

$$\dim \bigwedge\nolimits^r_*(V) = \binom{n}{r}.$$

Dermed er sætningen bevist.

Opgave 20. Antag, at $\dim V = n$. Vis, at $\bigwedge_*(V)$ som vektorrum over k har dimensionen 2^n.

Opgave 21. Lad V være et endeligt dimensionalt vektorrum over k. Vis, at vektorerne $v_1, \ldots, v_r \in V$ er lineært afhængige hvis og kun hvis $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0$.

Lad $\{e_1, \ldots, e_r\}$ være et sæt af lineært uafhængige vektorer i V, og lad U være det underrum i V, som er frembragt af disse vektorer. Vis, at

$$U = \{ v \in V \mid v \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_r = 0 \}.$$

Opgave 22. Antag, at $\dim V = n$, og lad $A: V \longrightarrow V$ være en lineær afbildning.

Vis, at den lineære afbildning

$$\Lambda^n_*(A) : \Lambda^n_*(V) \longrightarrow \Lambda^n_*(V)$$

er multiplikation med determinanten af A, d.v.s.

$$\Lambda^n_*(A)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det A \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

for $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Vis v.hj.a. dette, at

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

for ethvert par af lineære afbildninger $A, B \in \mathcal{L}(V;V)$.

Vi vil nu beskrive den covariante Grassmann algebra for et vilkårligt vektorrum V over legemet k.

Byggestenene er her de r'te ydre potenser af det duale rum V^* til V. For vektorrummet i den r'te ydre potens af V^* vil vi bruge notationen $\Lambda^*_r(V)$. Pr. definition har vi altså:

$$\Lambda^*_r(V) = \Lambda^r_*(V^*).$$

Vektorerne i $\Lambda^*_r(V)$ kaldes ofte for <u>ydre r-former på V</u>.

P.gr.a. faktoriserings egenskaben ved ydre potenser kan enhver r-lineær alternerende afbildning på V^* entydigt faktoriseres gennem $\Lambda^*_r(V)$. Hvis $F \in \mathcal{O}_r(V^*; W)$, findes altså en entydig bestemt lineær afbildning $\tilde{F} \in \mathcal{L}(\Lambda^*_r(V); W)$, således at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
V^* \times \ldots \times V^* \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "F"'] & \Lambda^*_r(V) \arrow[d, "\tilde{F}"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

λ er den universelle r-lineære, alternerende afbildning på V^*.

Fra lemma A 2.20, eller direkte af den entydige faktorisering, følger

Lemma A 2.24. Afbildningen $F \rightsquigarrow \tilde{F}$ giver en isomorfi af $\mathcal{A}_r(V^*; W)$ på $\mathcal{L}(\Lambda_r^*(V); W)$.

Vi bemærker endvidere, at elementerne $v^{*1}\wedge \ldots \wedge v^{*r}$ frembringer $\Lambda_r^*(V)$.

Fra sætning A 2.23 følger, at $\Lambda_r^*(V) = 0$ for $r > n$.

Hvis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er en basis i V, og $\{e^{*1},\ldots,e^{*n}\}$ er den tilhørende duale basis i V^*, følger ligeledes fra sætning A 2.23, at

$$\{e^{*i_1}\wedge \ldots \wedge e^{*i_r} \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n\}$$

er en basis for $\Lambda_r^*(V)$ når $r \leqq n$.

For ethvert par af hele tal $r,s \geqq 0$ har vi et produkt

$$\bar{\mu}: \Lambda_r^*(V) \times \Lambda_s^*(V) \longrightarrow \Lambda_{r+s}^*(V).$$

Produktet $\bar{\mu}(x,y)$ af elementerne $x \in \Lambda_r^*(V)$ og $y \in \Lambda_s^*(V)$ kalder vi igen for det ydre produkt, Grassmann produktet eller wedge produktet af x og y. Vi bruger betegnelsen $x \wedge y = \bar{\mu}(x,y)$.

Hvis vi specielt betragter elementer $x = v^{*1}\wedge \ldots \wedge v^{*r}$ og $y = \bar{v}^{*1}\wedge \ldots \wedge \bar{v}^{*s}$, får vi:

$$x \wedge y = v^{*1}\wedge \ldots \wedge v^{*r}\wedge \bar{v}^{*1}\wedge \ldots \wedge \bar{v}^{*s}.$$

Det ydre produkt er naturligvis igen anti-kommutativt og associativt. For $x \in \Lambda_r^*(V)$, $y \in \Lambda_s^*(V)$ og $z \in \Lambda_t^*(V)$ gælder altså:

$$x \wedge y = (-1)^{rs} y \wedge x$$

og

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z).$$

På sædvanlig måde kan vi overføre produktet til den direkte sum

$$\wedge^*(V) = \bigoplus_{r=0} \wedge_r^*(V) = k \oplus V^* \oplus \wedge_2^*(V) \oplus \dots .$$

$\wedge^*(V)$ bliver med dette produkt en associativ, gradueret algebra over k.

Denne algebra kaldes for <u>den covariante Grassmann algebra over V</u>.

Lad nu $F: V \longrightarrow W$ være en vilkårlig lineær afbildning. F har en dual lineær afbildning $F^*: W^* \longrightarrow V^*$. Til F^* har vi for $r \geqq 1$ knyttet en lineær afbildning (sætning A 2.22):

$$\wedge_*^r(F^*): \wedge_*^r(W^*) \longrightarrow \wedge_*^r(V^*).$$

Da $\wedge_r^*(V) = \wedge_*^r(V^*)$ og $\wedge_r^*(W) = \wedge_*^r(W^*)$ definerer vi af let forståelige grunde den lineære afbildning

$$\wedge_r^*(F): \wedge_r^*(W) \longrightarrow \wedge_r^*(V)$$

ved fastsættelsen

$$\wedge_r^*(F) = \wedge_*^r(F^*).$$

For elementerne $w^{*1} \wedge \dots \wedge w^{*r} \in \wedge_r^*(W)$ finder vi specielt

$$\wedge_r^*(F)(w^{*1} \wedge \dots \wedge w^{*r}) = F^*(w^{*1}) \wedge \dots \wedge F^*(w^{*r}).$$

Dette karakteriserer $\wedge_r^*(F)$ fuldstændigt.

Det er let at indse, at vi hermed har gjort $\wedge_r^*$ til en contravariant funktor i kategorien af vektorrum over k.

Vi skal nu vise, at de ydre potenser af vektorrum er kanonisk isomorfe med passende vektorrum af multilineære alternerende former.

Dertil vil vi først for ethvert $r \geqq 1$ og ethvert vektorrum V over k definere en bilineær afbildning

$$(\cdot,\cdot): \Lambda^r_*(V) \times \Lambda^*_r(V) \longrightarrow k .$$

P.gr.a. faktoriserings egenskaben ved ydre potenser vil $(\cdot,\cdot)$ entydigt udspringe af en 2r-lineær alternerende afbildning

$$V \times \ldots \times V \times V^* \times \ldots \times V^* \longrightarrow k.$$

For $v_1,\ldots,v_r \in V$ og $v^{*1},\ldots,v^{*r} \in V^*$, kan vi betragte determinanten af $r \times r$-matricen $\{ \langle v_i, v^{*j} \rangle \}$. Da determinant afbildningen er lineær og alternerende i både søjle og række vektorer, får vi en 2 r-lineær alternerende afbildning som ønsket, ved definitionen

$$((v_1,\ldots,v_r),(v^{*1},\ldots,v^{*r})) \rightsquigarrow \det \{ \langle v_i, v^{*j} \rangle \} .$$

Som bemærket får vi derved en bilineær afbildning

$$(\cdot,\cdot): \Lambda^r_*(V) \times \Lambda^*_r(V) \longrightarrow k$$

fastlagt ved definitionen

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r, v^{*1} \wedge \ldots \wedge v^{*r}) = \det\{\langle v_i, v^{*j} \rangle\} .$$

<u>Sætning A 2.25.</u> Hvis V er et endeligt dimensionalt vektorrum over k, er den bilineære afbildning

$$(\cdot,\cdot): \Lambda^r_*(V) \times \Lambda^*_r(V) \longrightarrow k$$

ikke singulær for ethvert $r \geqq 1$.

<u>Bevis.</u> Antag, at $\dim V = n$, og lad $\{ e_1,\ldots,e_n \}$ være en basis for V.

Hvis $r > n$ er alle involverede rum nul-vektorrummet, og sætningen er trivielt opfyldt.

Antag nu, at $r \leqq n$.

Fra sætning A 2.23 følger, at $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n\}$ er en basis for $\Lambda^r_*(V)$.

Tilsvarende ved vi, at $\{e^{*i_1} \wedge \ldots \wedge e^{*i_r} \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n\}$ er en basis for $\Lambda^*_r(V)$.

Om disse baser gælder:

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}, e^{*j_1} \wedge \ldots \wedge e^{*j_r}) = \det\{\langle e_{i_1}, e^{*j_1}\rangle\}$$

$$= \det\{\delta_{i_1 j_1}\}.$$

Af disse ligninger fremgår, at de 2 baser i henholdsvis $\Lambda^r_*(V)$ og $\Lambda^*_r(V)$ er gensidigt duale.

$\{(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}, \cdot) \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n\}$ er derfor en basis i $\mathcal{L}(\Lambda^*_r(V);k)$.

Deraf følger straks, at afbildningen

$$\Lambda^r_*(V) \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^*_r(V);k)$$

induceret af $(\cdot,\cdot)$ er en isomorfi.

Tilsvarende får man, at afbildningen

$$\Lambda^*_r(V) \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^r_*(V);k)$$

er en isomorfi.

Dermed har vi bevist, at $(\cdot,\cdot)$ er ikke-singulær.

Sætning A 2.26. For et endeligt dimensionalt vektorrum V over k har vi følgende kanoniske isomorfier for alle $r \geqq 1$

$$\Lambda^*_r(V) \cong \mathcal{L}(\Lambda^r_*(V);k) \cong \mathcal{Q}_r(V;k)$$

$$\Lambda^r_*(V) \cong \mathcal{L}(\Lambda^*_r(V);k) \cong \mathcal{Q}_r(V^*;k).$$

__Bevis.__ Den første isomorfi i hver linie følger fra sætning A 2.25. Den sidste isomorfi følger fra henholdsvis lemma A 2.20 og lemma A 2.24.

__Bemærkning.__ Ethvert element i $\Lambda_r^*(V)$ kan i følge sætning A 2.26 identificeres med en r-lineær alternerende form på V. Hvis vi specielt betragter elementet $v^{*1} \wedge \ldots \wedge v^{*r} \in \Lambda_r^*(V)$ følger fra definitionen af $(\cdot,\cdot)$, at dette element som r-lineær alternerende form har virkningen

$$v^{*1} \wedge \ldots \wedge v^{*r}(v_1,\ldots,v_r) = \det\{\langle v_i, v^{*j}\rangle\}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sign}\sigma \, \langle v_{\sigma(1)}, v^{*1}\rangle \ldots \langle v_{\sigma(r)}, v^{*r}\rangle$$

En tilsvarende bemærkning kan gøres om $\Lambda_*^r(V)$.

Til sidst vil vi undersøge, hvordan det ydre produkt i $\Lambda^*(V)$ overføres til de alternerende former på V via de kanoniske isomorfier i sætning A 2.26.

Betragt derfor for $r,s \geq 1$ følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_r^*(V) \times \Lambda_s^*(V) \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "h_r \times h_s"'] & \Lambda_{r+s}^*(V) \arrow[d, "h_{r+s}"] \\
\mathcal{O}_r(V;k) \times \mathcal{O}_s(V;k) \arrow[r, "\wedge"'] & \mathcal{O}_{r+s}(V;k)
\end{tikzcd}$$

h_r, h_s og h_{r+s} er de kanoniske isomorfier. $\bar{\mu}$ er det ydre produkt. Da h_r, h_s og h_{r+s} er isomorfier, findes der netop en afbildning $\wedge$, som gør diagrammet kommutativt.

Hvis $\alpha \in \mathcal{O}_r(V;k)$ og $\beta \in \mathcal{O}_s(V;k)$, kalder vi $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{O}_{r+s}(V;k)$ for det ydre produkt af α og β.

Hvis karakteristikken af grundlegemet k er 0 (f.eks. når k er de reelle tal), bliver udtrykket for virkningen af $\alpha \wedge \beta$ som $(r+s)$-lineær alternerende form særlig pænt. Det overlades til læseren at verificere, at

$$\alpha\wedge\beta(v_1,\ldots,v_{r+s})$$
$$= \frac{1}{r!}\,\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}} \operatorname{sign}\sigma\,\alpha(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(r)})\cdot\beta(v_{\sigma(r+1)},\ldots,v_{\sigma(r+s)})$$

for $v_1,\ldots,v_{r+s}\in V$.
(karakteristik 0 er nødvendig for at sikre, at vi kan dividere med $r!\cdot s!$).

Bemærkning. Idet vi sætter $\mathcal{O}_0(V;k) = k$, kunne vi have defineret den covariante Grassmann algebra over V som den direkte sum

$$\bigoplus_{r=0}\mathcal{O}_r(V;k)$$

med det ydre produkt fastlagt ved ovenstående formel. I denne opsætning bliver det besværligt at verificere den associative regel for det ydre produkt (prøv).

Opgave 23. Verificer ovenstående formel for $\alpha\wedge\beta$. Observer, at det er tilstrækkeligt at vise, at

$$h_r(v^{*1}\wedge\ldots\wedge v^{*r})\wedge h_s(\bar{v}^{*1}\wedge\ldots\wedge\bar{v}^{*s})$$
$$= h_{r+s}(v^{*1}\wedge\ldots\wedge v^{*r}\wedge\bar{v}^{*1}\ldots\wedge\bar{v}^{*s})$$

for $v^{*1},\ldots,v^{*r},\bar{v}^{*1},\ldots,\bar{v}^{*s}\in V^*$.

APPENDIX 3.

Dette appendix vil hovedsageligt dreje sig om de rent topologiske aspekter i konstruktionen af kontinuerte delinger af enheden på et parakompakt topologisk rum. Parakompakte topologiske rum blev indført af Dieudonné i 1944 som en generalisation af begrebet kompakt topologisk rum. Det har vist sig at være et uhyre nyttigt begreb, som kommer ind i mange moderne undersøgelser. Vores primære interesse i parakompakthed ligger i ækvivalensen mellem parakompakthed af et topologisk rum og existens af kontinuerte delinger af enheden på rummet. I slutningen skal vi se, hvordan vi på en parakompakt differentiabel mangfoldighed kan forstærke resultatet og opnå differentiable delinger af enheden. Anvendelserne heraf i differential geometri og differential topologi er talrige. I § 11 er der givet exempler på sådanne anvendelser.

Adskillelses axiomer i topologien. Urysohn's lemma.

Dette afsnit har en indledende karakter. Vi minder om kendte begreber fra den generelle topologi, især regulære og normale rum, og slutter med at vise Urysohn's lemma.

Hvis X er en vilkårlig mængde, forstår vi ved en topologi på X et system $\mathcal{T}$ af delmængder i X, der opfylder:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) $O_1, \ldots, O_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} O_i \in \mathcal{T}$

iii) $O_\alpha \in \mathcal{T} \ \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \mathcal{T}$.

Parret $(X, \mathcal{T})$ kaldes et topologisk rum. Sædvanligvis nævner man ikke explicit $\mathcal{T}$, men omtaler direkte X som et topologisk rum. I udtrykket "X er et topologisk rum" ligger altså implicit, at der er givet et system $\mathcal{T}$ af delmængder i X, der opfylder i), ii) og iii).

Hvis X er et topologisk rum, kalder vi mængderne i $\mathcal{T}$ for de åbne mængder i X.

Delmængderne $\complement O$ for $O \in \mathcal{T}$ kaldes for de lukkede mængder i X.

Hvis A er en vilkårlig delmængde af det topologiske rum X med topologien $\mathcal{T}$, indser man let, at følgende system af delmængder i A

$$\mathcal{T}|A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$$

opfylder i), ii) og iii). $\mathcal{T}|A$ er derfor en topologi på A. Denne topologi kaldes <u>den inducerede topologi</u> (eller <u>spartopologien</u>) på A.

Hvis p er et punkt i X, kalder vi en vilkårlig åben mængde O i X, så $p \in O$, for en åben <u>omegn</u> af p.

Hvis A er en delmængde af X, siger vi, at $p \in A$ er et <u>indre punkt</u> for A, hvis p har en åben omegn O i X, så $p \in O \subseteq A$. Samlingen af indre punkter for A kaldes <u>det indre af A</u> og betegnes med <u>int A</u>. Man kan let indse, at int A er en åben mængde i X, og at int A er foreningsmængden af alle åbne mængder O i X, så $O \subseteq A$.

Hvis A stadig er en delmængde af X, kalder vi $p \in X$ for et <u>kontaktpunkt</u> for A, hvis enhver åben omegn af p i X indeholder et punkt fra A. Samlingen af kontaktpunkter for A kaldes <u>kontaktmængden</u> (eller <u>det lukkede hylster</u>) for A, og betegnes med <u>$\bar{A}$</u>. Man kan let indse, at $\bar{A}$ er en lukket mængde i X, og at $\bar{A}$ netop er gennemsnittet af alle lukkede mængder i X, der indeholder A. Vi bemærker endvidere, at en delmængde B af X er lukket, hvis og kun hvis $B = \bar{B}$.

De fleste topologiske rum har tilstrækkeligt mange åbne mængder, til at man kan adskille punkter og hyppigt tilstrækkeligt mange, til at man kan adskille disjunkte lukkede delmængder. Disse egenskaber er imidlertid ikke en følge af axiomerne for en topologi, og da de i mange situationer er nødvendige, har man nedfældet dem i en række adskillelses axiomer. Disse axiomer kendes nu som T_i-axiomerne (efter tysk "Trennungsaxiome"), en betegnelse indført af Alexandroff og Hopf i deres bog "Topologie" fra 1935.

Hvis X er et topologisk rum, drejer det sig om følgende axiomer:

<u>Axiom T_0</u>. Lad p og q være 2 vilkårlige forskellige punkter i X. Så findes en åben mængde i X, som indeholder et af disse punkter, men ikke det andet.

<u>Axiom T_1</u>. Lad p og q være 2 vilkårlige forskellige punkter i X. Så findes 2 åbne mængder i X, én som indeholder p, men ikke q, og én som indeholder q, men ikke p.

<u>Axiom T_2</u>. Lad p og q være 2 vilkårlige forskellige punkter i X. Så findes disjunkte åbne mængder U og V i X, således at $p \in U$ og $q \in V$.

<u>Axiom T_3</u>. Lad A være en lukket mængde i X og lad p være et punkt i X, således at $p \notin A$. Så findes disjunkte åbne mængder U og V i X, således at $A \subseteq U$ og $p \in V$.

<u>Axiom T_4</u>. Lad A og B være disjunkte lukkede mængder i X. Så findes disjunkte åbne mængder U og V i X, således at $A \subseteq U$ og $B \subseteq V$.

Svarende til disse axiomer har man forskellige typer af topologiske rum.

For $i = 0,1,2$ kalder man et topologisk rum, hvor axiom T_i er opfyldt, for et <u>T_i-rum</u>. Et T_1-rum kaldes også ofte for et <u>Fréchet rum</u> og et T_2-rum som regel for et <u>Hausdorff rum</u>.

Det er klart, at et T_2-rum er et T_1-rum, og at et T_1-rum er et T_0-rum.

Axiom T_1 har en interessant ækvivalent formulering. Beviset for følgende lemma overlades til læseren.

<u>Lemma A3.1</u>. Et topologisk rum er et T_1-rum (Fréchet rum), hvis og kun hvis enhver delmængde af X bestående af netop et punkt fra X er en lukket delmængde af X.

Hausdorff rum er i mange henseender de interessanteste, og axiom T_2 er som regel det svageste krav, man lægger på sine topologiske rum.

Ved hjælp af lemma A3.1 kan man let indse, at regulære og normale rum, som vi nu skal definere, er Hausdorff rum.

<u>Definition A3.2</u>. Et <u>T_3-rum</u> eller et <u>regulært</u> rum er et topologisk rum, hvor axiomerne T_1 og T_3 er opfyldt.

Et <u>T_4-rum</u> eller et <u>normalt</u> rum er et topologisk rum, hvor axiomerne T_1 og T_4 er opfyldt.

Det er klart, at et T_i-rum er et T_{i-1}-rum for ethvert $i = 1,\dots,4$ (overvej dette).

Af hensyn til senere brug giver vi følgende karakteriseringer af regulære og normale rum.

Lemma A3.3. Et topologisk rum X er et regulært rum, hvis og kun hvis X er et Hausdorff rum, og en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

T_3. Hvis A er en lukket delmængde af X, og p er et punkt i X, så $p \notin A$, findes disjunkte åbne delmængder U og V i X, således at $A \subseteq U$ og $p \in V$.

T_3'. Hvis p er et punkt i X indeholdt i en åben delmængde U af X, findes en åben delmængde V af X, således at $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Lemma A3.4. Et topologisk rum X er et normalt rum, hvis og kun hvis X er et Hausdorff rum, og en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

T_4. Hvis A og B er lukkede disjunkte delmængder af X, findes disjunkte åbne delmængder U og V af X, således at $A \subseteq U$ og $B \subseteq V$.

T_4'. Hvis A er en lukket delmængde af X indeholdt i en åben delmængde U af X, findes en åben delmængde V af X, således at $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Bevis for lemma A3.3. Hvis X er et regulært rum, har vi allerede bemærket, at X er et Hausforff rum. Vi bemærker endvidere, at betingelsen T_3 er den væsentlige del af definitionen på et regulært rum. Det er derfor klart, at vi blot skal bevise ækvivalensen af T_3 og T_3'.

$T_3 \Longrightarrow T_3'$. Lad $p \in U$, hvor U er en åben delmængde af X, være givet. Betragt den lukkede delmængde $X \setminus U$ af X. Da $p \notin X \setminus U$ kan vi ifølge T_3 finde disjunkte åbne delmængder U' og V af X, således at $p \in V$ og $X \setminus U \subseteq U'$. Da $U' \cap V = \emptyset$ følger heraf, at $V \subseteq X \setminus U' \subseteq U$. Idet $X \setminus U'$ er en lukket delmængde af X, følger heraf, at $V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus U' \subseteq U$. Dette viser, at $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, og vi har dermed påvist existensen af en åben mængde V som ønsket.

$T_3' \Longrightarrow T_3$. Lad $p \notin A$, hvor A er en lukket delmængde af X, være givet. Betragt den åbne delmængde $X \setminus A$ af X. Da

$p \in X \setminus A$, kan vi ifølge T_3' finde en åben delmængde V af X, således at $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus A$. Da $U = X \setminus \overline{V}$ er en åben delmængde af X, således at $A \subseteq U$ og $U \cap V = \emptyset$, har vi påvist existensen af åbne delmængder U og V af X som ønsket.

Dermed er lemma A3.3 bevist.

Beviset for lemma A3.4 forløber analogt og overlades til læseren.

For normale rum gælder en vigtig sætning, kendt som Urysohn's lemma. Denne sætning kommer i spil i mange sammenhænge, hvor man ønsker at konstruere kontinuerte reelle funktioner med foreskrevne egenskaber på et normalt rum.

Sætning A3.5. (Urysohn's lemma).
Hvis X er et normalt topologisk rum, og A og B er lukkede disjunkte delmængder af X, findes en kontinuert funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$, således at $f(A) = 0$ og $f(B) = 1$.
($[0,1]$ gives den inducerede topologi fra E^1).

Bevis. Vi ønsker for enhver dyadisk brøk $t = \frac{i}{2^n}$ med $1 \leq i \leq 2^n$ at konstruere en åben delmængde $U(t)$ af X, således at

$$\overline{U(t_1)} \subseteq U(t_2) \quad \text{hvis} \quad t_1 < t_2 \,.$$

Vi sætter pr. definition

$$U(1) = X \setminus B.$$

Da $A \cap B = \emptyset$ vil $A \subseteq U(1)$. Idet A er en lukket delmængde og $U(1)$ en åben delmængde af det normale rum X, kan vi så ifølge lemma A3.4 finde en åben delmængde $U(\frac{1}{2})$ af X, således at

$$A \subseteq U(\tfrac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{2})} \subseteq U(1).$$

Benytter vi nu normaliteten af X på systemerne $A \subseteq U(\frac{1}{2})$ og $\overline{U(\frac{1}{2})} \subseteq U(1)$, kan vi finde åbne delmængder $U(\frac{1}{4})$ og $U(\frac{3}{4})$ af X, således at

$$A \subseteq U(\tfrac{1}{4}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{4})} \subseteq U(\tfrac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{2})} \subseteq U(\tfrac{3}{4}) \subseteq \overline{U(\tfrac{3}{4})} \subseteq U(1).$$

Proceduren skulle nu være klar. I næste omgang finder vi åbne delmængder $U(\frac{1}{8})$, $U(\frac{3}{8})$, $U(\frac{5}{8})$, $U(\frac{7}{8})$ af X, således at

$$A \subseteq U(\tfrac{1}{8}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{8})} \subseteq U(\tfrac{1}{4}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{4})} \subseteq U(\tfrac{3}{8}) \subseteq \dots,$$

og når mængderne $U(\frac{i}{2^{n-1}})$ er konstrueret, finder vi i næste omgang følgende åbne delmængder af X:

$$U(\tfrac{1}{2^n}),\ U(\tfrac{3}{2^n}),\ U(\tfrac{5}{2^n}),\dots,U(\tfrac{2^n-1}{2^n}) .$$

Ved denne fremgangsmåde får vi trinvist konstrueret mængderne $U(t)$ for enhver dyadisk brøk t som ønsket.

Vi kan nu definere den omspurgte funktion f ved fastsættelsen:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \mid x \in U(t)\} & \text{for } x \in X \setminus B = U(1) \\ 1 & \text{for } x \in B \end{cases}$$

Da enhver af de betragtede dyadiske brøker t tilhører intervallet $]0,1]$, er det klart, at $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$. Hvis $x \in A$, vil $x \in U(\frac{1}{2^n}) \quad \forall n = 1,2,\dots$, og det er derfor klart, at $f(A) = 0$. Da vi pr. definition har sat $f(B) = 1$, ser vi, at $f : X \to [0,1]$ afbilder som foreskrevet.

Vi mangler derfor nu kun at bevise, at f er kontinuert. Kontinuiteten vil følge af 2 observationer:

1) $f(x) < b \iff \begin{cases} \text{Der findes en dyadisk brøk } t \text{ med} \\ t < b, \text{ således at } x \in U(t) \end{cases}$

2) $f(x) > a \iff \begin{cases} \text{Der findes en dyadisk brøk } t \text{ med} \\ t > a, \text{ således at } x \in X \setminus \overline{U(t)} \end{cases}$

Bevis for 1).

$\Longrightarrow$ Da de dyadiske brøker udgør en overalt tæt delmængde af $[0,1]$ findes en dyadisk brøk t, således at $f(x) < t < b$. Fra $f(x) < t$ følger straks, at $x \in U(t)$.

$\Longleftarrow$ Når $x \in U(t)$ vil $f(x) \leq t$. Så får vi straks $f(x) \leq t < b$.

Bevis for 2).

$\Longrightarrow$ Der findes dyadiske brøker t_1 og t_2, således at $a < t_1 < t_2 < f(x)$. Da $t_2 < f(x)$ vil $x \notin U(t_2)$, eller ækvivalent $x \in X \setminus U(t_2)$. Idet $\overline{U(t_1)} \subseteq U(t_2)$, får vi så heraf, at $x \in X \setminus \overline{U(t_1)}$. Dette beviser $\Longrightarrow$.

$\Longleftarrow$ Da $x \in X \setminus \overline{U(t)}$, eller ækvivalent $x \notin \overline{U(t)}$, har vi specielt $x \notin U(t)$. Så vil $t \leq f(x)$, og derfor $a < t \leq f(x)$.

Vi beviser nu, at f er kontinuert.

Dertil observerer vi først, at intervallerne $]a,b[$ for $0 \leq a < b \leq 1$, $[0,b[$ for $0 < b \leq 1$ og $]a,1]$ for $0 \leq a < 1$ er en basis for den inducerede topologi på $[0,1]$ fra E^1, d.v.s. enhver åben delmængde af $[0,1]$ kan skrives som en foreningsmængde af sådanne intervaller. Det er derfor tilstrækkeligt at bevise, at urbilledet ved f af disse intervaller er åbne delmængder i X, for at slutte, at f er kontinuert.

Ved hjælp af observationerne 1) og 2) ser vi imidlertid straks, at

$$f^{-1}(]a,b[) = \{x \in X \mid a < f(x) < b\}$$
$$= \Big(\bigcup_{t_1<b} U(t_1)\Big) \cap \Big(\bigcup_{t_2>a} (X \setminus \overline{U(t_2)})\Big)$$

$$f^{-1}([0,b[) = \bigcup_{t_1<b} U(t_1)$$

og

$$f^{-1}(]a,1]) = \bigcup_{t_2>a} (X \setminus \overline{U(t_2)}) .$$

Disse formler viser, at de ønskede urbilleder er åbne delmængder af X. Vi har dermed bevist, at f er kontinuert.

Dette afslutter beviset for Urysohn's lemma.

Urysohn's lemma karakteriserer netop de normale rum. Der gælder nemlig følgende sætning:

Sætning A3.6. Et Hausdorff rum X er normalt, hvis og kun hvis der til ethvert par af disjunkte lukkede delmængder A og B i X findes en kontinuert funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$, således at $f(A) = 0$ og $f(B) = 1$ (kort: hvis og kun hvis Urysohn's lemma gælder i X).

Bevis. Hvis X er normal, viser sætning A3.5, at Urysohn's lemma gælder i X.

Antag derfor nu omvendt, at Urysohn's lemma gælder i X. Lad A og B være disjunkte lukkede delmængder i X. Svarende til A og B findes ifølge det givne en kontinuert funktion

$f: X \to [0,1]$, så $f(A) = 0$ og $f(B) = 1$. Da $[0,\frac{1}{3}[$ og $]\frac{2}{3},1]$ er åbne delmængder af $[0,1]$ er

$$U = f^{-1}([0,\tfrac{1}{3}[) \quad \text{og} \quad V = f^{-1}(]\tfrac{2}{3},1])$$

åbne delmængder af X. Da $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ og $U \cap V = \emptyset$, følger det så fra lemma A3.4, at X er normal.

Dermed er sætning A3.6 bevist.

Parakompakte rum.

Parakompakthed hører ligesom kompakthed til et topologiske begreber, der defineres ved hjælp af overdækningsegenskaber. Inden vi kan definere begrebet, må vi imidlertid først forudskikke lidt notation og terminologi.

Lad X være et topologisk rum.

Definition A3.7. Et system af delmængder $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ af X med α tilhørende indexmængden I siges at være lokalt endelig, hvis ethvert punkt $p \in X$ har en omegn N_p, således at $N_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange $\alpha \in I$.

Definition A3.8. Lad $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ og $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ være åbne overdækninger af det topologiske rum X med $\alpha \in I$ og $\beta \in J$. Vi vil sige, at $\mathcal{V}$ er en forfining af $\mathcal{U}$, eller at $\mathcal{V}$ forfiner $\mathcal{U}$, hvis der til ethvert $\beta \in J$ findes et $\alpha \in I$, således at $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

Bemærkning. I det følgende skal vi ofte betragte forfininger $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med samme indexmængde I som $\mathcal{U}$. Hvis intet andet udtrykkeligt er fremhævet, vil det så være underforstået, at $V_\alpha \subseteq U_\alpha \ \forall \alpha \in I$.

For kortheds skyld vil vi endvidere hyppigt undlade explicit at nævne indexmængder.

Vi er nu klar til at definere parakompakthed.

Definition A3.9. Et Hausdorff rum X kaldes parakompakt, hvis der til enhver åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af X findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ af X, der forfiner $\mathcal{U}$.

Vi kræver altså explicit af et parakompakt rum, at det skal være et Hausdorff rum. I en del af litteraturen gør man ikke denne antagelse, men kræver udelukkende overdækningsegenskaben opfyldt.

På tilsvarende måde vil vi her ved et kompakt topologisk rum foruden overdækningsaxiomet "Enhver åben overdækning indeholder en endelig overdækning" explicit kræve Hausdorff axiomet opfyldt.

Med disse definitioner er det klart, at ethvert kompakt topologisk rum er parakompakt.

Vi nævner endvidere uden bevis, at ethvert metrisk rum er parakompakt (sætning af Stone).

I definition A3.9 kunne vi uden indskrænkning forlange, at forfiningen $\mathcal{V}$ af $\mathcal{U}$ skulle have samme indexmængde som $\mathcal{U}$. Der gælder nemlig følgende:

Lemma A3.1o. Lad X være et parakompakt topologisk rum. Så findes til enhver åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af X en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af X med samme indexmængde I som $\mathcal{U}$, der forfiner $\mathcal{U}$, d.v.s. så $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ $\forall \alpha \in I$.

Bevis. Lad $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ være en vilkårlig åben overdækning af X med indexmængde I. Da X er parakompakt findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{W} = \{W_\beta\}$ af X med indexmængde J, der forfiner $\mathcal{U}$. Vælg nu for ethvert $\beta \in J$ et $\alpha(\beta) \in I$, således at $W_\beta \subseteq U_{\alpha(\beta)}$ (udvalgsaxiomet benyttes). For ethvert $\alpha_0 \in I$ definerer vi nu V_{α_0} ved fastsættelsen

$$V_{\alpha_0} = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha_0} W_\beta \quad .$$

$\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ er den søgte forfining af $\mathcal{U}$. Det er klart, at $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Vi skal derfor blot indse, at $\mathcal{V}$ er lokalt endelig. Betragt dertil $p \in X$ og lad N_p være en omegn af p, så $N_p \cap W_\beta \neq \emptyset$ for højst endelig mange $\beta \in J$. Så er det klart, at $N_p \cap V_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange $\alpha \in I$, nemlig for præcis de $\alpha(\beta)$, hvor $N_p \cap W_\beta \neq \emptyset$. Dette beviser, at $\mathcal{V}$ er lokalt endelig.

Dermed er lemma A3.1o bevist.

I det følgende får vi ofte brug for denne bemærkning:

Lemma A3.11. Hvis $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ er et lokalt endelig system af delmængder i et topologisk rum X, gælder det, at $\overline{\cup A_\alpha} = \cup \overline{A_\alpha}$.

Bevis. Det er trivielt, at $\cup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\cup A_\alpha}$.

Lad derfor nu omvendt $p \in \overline{\cup A_\alpha}$ være givet. Da $\mathcal{A}$ er lokalt endelig, findes en omegn N_p af p, så $N_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange α. Da p er et kontaktpunkt for $\cup A_\alpha$ findes mindst et α så $N_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Antag nu, at $A_{\alpha_1},\dots,A_{\alpha_k}$ netop er de A_α, der har ikke-tomt gennemsnit med N_p. Hvis der fandtes omegne $U_1,\dots,U_k$ af p, så $A_{\alpha_1} \cap U_1 = \emptyset,\dots,A_{\alpha_k} \cap U_k = \emptyset$, ville $U = N_p \cap U_1 \cap \dots \cap U_k$ være en omegn af p, så $U \cap A_\alpha = \emptyset \ \forall \alpha$. Dette ville være i modstrid med, at p er et kontaktpunkt for $\cup A_\alpha$. Vi slutter så, at der findes mindst et A_{α_i} for $i = 1,\dots,k$, således at $A_{\alpha_i} \cap V \neq \emptyset$ for enhver omegn V af p. Dette medfører, at $p \in \overline{A_{\alpha_i}}$, hvoraf trivielt følger, at $p \in \cup \overline{A_\alpha}$. Dette beviser inklusionen $\overline{\cup A_\alpha} \subseteq \cup \overline{A_\alpha}$ og dermed lemmaet.

Bemærkning. Konklusionen i lemma A3.11 gælder ikke for vilkårlige delmængdesystemer i et topologisk rum. Betragt f.eks. i E^1 systemet af delmængder $\mathcal{A} = \{A_n\}$ med $A_n =]-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ $\forall n = 1,2,\dots$. I dette tilfælde vil $\overline{\cup A_n} = [-1,1]$, mens $\cup \overline{A_n} =]-1,1[$. $\mathcal{A}$ Er her naturligvis ikke lokalt endelig; enhver omegn af $0 \in E^1$ skærer alle mængderne A_n.

De parakompakte rum ligger i en vis forstand imellem de kompakte og de normale rum. Vi har set, at et kompakt topologisk rum er parakompakt, og nu beviser vi:

Sætning A3.12. Ethvert parakompakt topologisk rum er normalt.

Bevis. Lad X være et parakompakt topologisk rum.

Vi viser først, at X er et regulært rum.

Lad dertil A være en vilkårlig lukket delmængde af X og p et vilkårligt punkt i X, så $p \notin A$. Ifølge lemma A3.3 skal vi nu blot finde disjunkte åbne delmængder U og V af X, så $A \subseteq U$ og $p \in V$.

Da X er et Hausdorff rum, kan vi for ethvert $x \in A$ finde et par af disjunkte åbne delmængder U_x og V_x af X, således at $x \in U_x$ og $p \in V_x$.

Betragt så følgende åbne overdækning af X:

$$\mathcal{U} = \{U_x\} \cup \{X \setminus A\} \quad \text{for } x \in A .$$

Lad $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}$ være en lokalt endelig åben overdækning af X, der forfiner $\mathcal{U}$ (X er parakompakt). Sæt nu

$$U = \bigcup_{W_\alpha \not\subseteq X \setminus A} W_\alpha .$$

Det er klart, at $A \subseteq U$.

Da $\mathcal{W}$ er lokalt endelig, findes en åben omegn N_p af p, således at $N_p \cap W_\alpha \neq \emptyset$ for højst endelig mange α. Antag at $W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_k}$, som ikke er indeholdt i $X \setminus A$, har ikke-tomt gennemsnit med N_p. Da $\mathcal{W}$ er en forfining af $\mathcal{U}$ findes $x_1, \ldots, x_k \in A$ så $W_{\alpha_i} \subseteq U_{x_i}$ for $i = 1, \ldots, k$.

Det er nu pr. konstruktion klart, at

$$V = N_p \cap V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_k}$$

er en åben omegn af p, så $U \cap V = \emptyset$.

Dette beviser, at X er regulær.

Vi beviser dernæst, at X er et normalt rum.

Lad dertil A være en lukket delmængde og U en åben delmængde af X så $A \subseteq U$. Ifølge lemma A3.4 skal vi påvise existensen af en åben delmængde V af X, således at $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Da X er regulær (det lige beviste), kan vi ifølge lemma A3.3 for ethvert $x \in A$ finde en åben mængde V_x så $x \in V_x \subseteq \overline{V}_x \subseteq U$. Betragt den åbne overdækning

$$\mathcal{V} = \{V_x\} \cup \{X \setminus A\} \quad \text{for } x \in A,$$

og lad $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}$ være en lokalt endelig åben overdækning, der forfiner $\mathcal{V}$. Sæt så

$$V = \bigcup_{W_\alpha \nsubseteq X \setminus A} W_\alpha \quad .$$

Det er klart, at $A \subseteq V$. Da $\mathcal{W}$ er lokalt endelig, viser lemma A3.11, at

$$\overline{V} = \bigcup_{W_\alpha \nsubseteq X \setminus A} \overline{W}_\alpha \quad .$$

Idet $\mathcal{W}$ er en forfining af $\mathcal{V}$, findes for ethvert α, så $W_\alpha \nsubseteq X \setminus A$, et $x \in A$, således at $W_\alpha \subseteq V_x$. Pr. konstruktion af V_x vil der så gælde, at $\overline{W}_\alpha \subseteq \overline{V}_x \subseteq U$. Det følger heraf, at $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Dette beviser, at X er normal.

Som vi nu skal se, kan vi indskrænke enhver åben overdækning af et parakompakt rum til en lukket overdækning. Nytten af dette ligger i, at vi så har mulighed for at anvende Urysohn's lemma.

Sætning A3.13. Lad X være et parakompakt topologisk rum, og lad $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ være en vilkårlig åben overdækning af X. Så findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af X, således at $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ for ethvert α.

Bevis. Da X er et regulært rum, og $\mathcal{U}$ er en åben overdækning af X, kan vi for ethvert $x \in X$ finde en åben mængde W_x, så $x \in W_x \subseteq \overline{W}_x \subseteq U_\alpha$ for et eller andet α.

Lad nu $\mathcal{W}' = \{W'_\beta\}$ være en lokalt endelig åben overdækning af X, der forfiner den åbne overdækning $\mathcal{W} = \{W_x\}$ af X. Da $\mathcal{W}$ pr. konstruktion er en forfining af $\mathcal{U}$, bliver $\mathcal{W}'$ en forfining af $\mathcal{U}$. Pr. konstruktion af de åbne mængder W_x er det endvidere klart, at der til ethvert β findes et α, således at $\overline{W'_\beta} \subseteq U_\alpha$.

Vælg så for ethvert β et $\alpha(\beta)$, således at $W'_\beta \subseteq \overline{W'_\beta} \subseteq U_{\alpha(\beta)}$, og sæt for ethvert α

$$V_\alpha = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} W'_\beta \quad .$$

Da $\mathcal{U}^{\alpha}$ er lokalt endelig følger af lemma A3.11, at $\overline{V}_{\alpha} \subseteq U_{\alpha}$ for ethvert α. I beviset for lemma A3.1o har vi endvidere set, at $\mathcal{V} = \{V_{\alpha}\}$ giver en lokalt endelig åben overdækning af X, der forfiner $\mathcal{U}$.

Dette afslutter beviset for sætning A3.13.

Den næste sætning vil vise os, at en stor klasse af differentiable mangfoldigheder er parakompakte som topologiske rum. Dette skyldes, at enhver mangfoldighed er lokal kompakt.

Definition A3.14. Et topologisk rum X siges at være lokal kompakt, hvis ethvert punkt $p \in X$ har en åben omegn U_p, som er indeholdt i en kompakt delmængde af X.

Sætning A3.15. Ethvert lokal kompakt Hausdorff rum, hvor topologien har en tællelig basis, er parakompakt.

Bevis. Antag, at X er et lokal kompakt Hausdorff rum med en tællelig basis for topologien.

Da X er lokal kompakt og har tællelig basis, følger det (overvej dette), at vi kan finde en basis for topologien på X

$$U_1, U_2, \ldots$$

med $\overline{U}_i$ kompakt $\forall\, i = 1,2,\ldots$.

Vi vil nu konstruere en følge af kompakte delmængder af X

$$A_1, A_2, \ldots,$$

således at

$$A_i \subseteq \operatorname{int} A_{i+1} \qquad \forall i = 1,2,\ldots$$

og så $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Konstruktionen forløber således:

Sæt $A_1 = \overline{U}_1$.

Antag dernæst, at A_{i-1} for $i \geq 2$ er konstrueret. Lad så $k(i)$ være det mindste tal, således at

$$A_{i-1} \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_{k(i)}.$$

(Da A_{i-1} er kompakt, og $\{U_1, U_2, \ldots\}$ overdækker X, findes et sådant $k(i)$).

Definer nu A_i ved fastsættelsen

$$A_i = \overline{U_1 \cup \ldots \cup U_{k(i)} \cup U_i}.$$

Da $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots$ er kompakte, er det klart, at A_i bliver kompakt. Det er endvidere klart, at $A_{i-1} \subseteqq \operatorname{int} A_i$.

Idet $U_i \subseteqq A_i \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,$ ser vi, at $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Vi har dermed konstrueret det ønskede system af kompakte delmængder af X.

Vi kan nu bevise, at X er parakompakt.

Lad dertil $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ være en vilkårlig åben overdækning af X. Vi skal finde en lokalt endelig åben overdækning af X, der forfiner $\mathcal{V}$.

Med dette formål for øje betragter vi for ethvert $i = 0,1,2,\ldots$ inklusionen

$$A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i \subseteqq \operatorname{int} A_{i+2} \setminus A_{i-1} .$$

(Vi har sat $A_{-1} = A_0 = \emptyset$).

$A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$ er en kompakt delmængde af $X \quad \forall\, i = 0,1,2,\ldots$ (lukket delmængde af et kompakt rum er kompakt), og $\operatorname{int} A_{i+2} \setminus A_{i-1}$ er en åben delmængde af $X \quad \forall\, i = 0,1,2,\ldots$ (A_{i-1} er lukket, da X er forudsat Hausdorff).

Da $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ får vi:

$$X = A_1 \cup (A_2 \setminus \operatorname{int} A_1) \cup (A_3 \setminus \operatorname{int} A_2) \cup \ldots$$

$$= \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i).$$

De kompakte mængder $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$ for $i = 0,1,2,\ldots$ overdækker altså X.

Idet $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ er den givne åbne overdækning af X, betragter vi for ethvert $i = 0,1,2,\ldots$ de åbne mængder

$$W_\alpha^i = V_\alpha \cap (\operatorname{int} A_{i+2} \setminus A_{i-1}).$$

De åbne mængder W_α^i overdækker den kompakte mængde $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$. Da $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$ er kompakt, vil endeligt mange W_α^i allerede overdække. Noter denne endelige overdækning af $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$ som

$$W_1^i, \ldots, W_{n(i)}^i .$$

Da mængderne $A_{i+1} \setminus \text{int}\, A_i$ overdækker X, følger det, at systemet af delmængder

$$\mathcal{W} = \{W_j^i\}$$

er en åben overdækning af X, der pr. konstruktion forfiner $\mathcal{V}$. For at have bevist, at X er parakompakt, skal vi nu blot indse, at $\mathcal{W}$ er lokalt endelig. Lad dertil $p \in X$ være givet. Da $A_1, A_2, \ldots$ overdækker X, findes et i, så $p \in A_i$. Idet $W_j^l \subseteqq \text{int}\, A_{l+2} \setminus A_{l-1}$ $\forall l = 0,1,2,\ldots,$ ser vi, at

$$\text{int}\, A_{i+1} \cap W_j^l = \emptyset \qquad \forall\, l \geqq i + 2.$$

Da $p \in A_i \subseteqq \text{int}\, A_{i+1}$, er $\text{int}\, A_{i+1}$ således en åben omegn af p, der har ikke-tomt gennemsnit med højst endelig mange W_j^l. Dette beviser, at $\mathcal{W}$ er lokalt endelig, og dermed at X er parakompakt.

Exempel A3.16. Enhver differentiabel mangfoldighed M er lokal kompakt, idet ethvert punkt $p \in M$ har en omegn homeomorf med en åben delmængde af et euklidisk rum.

Ifølge sætning A3.15 er M derfor parakompakt, hvis M er en Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed, og topologien på M har en tællelig basis. Da åbne delmængder af euklidiske rum har en tællelig basis (kugler med rationale radier og centre i punkter med rationale koordinater), indser man let, at en differentiabel mangfoldighed har en tællelig basis for topologien, hvis og kun hvis mangfoldigheden har et del-atlas for den differentiable struktur med højst tællelig mange kort.

Konklusion: En Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed, der kan dækkes med højst tællelig mange kort, er parakompakt.

Dette rummer næsten alle differentiable mangfoldigheder af interesse.

Da delmængder af euklidiske rum med induceret topologi har tællelig basis, giver sætning A3.15 også følgende resultat:

Enhver del-mangfoldighed af et euklidisk rum er parakompakt.

Deling af enheden.

Notation. Hvis $f : X \longrightarrow E^1$ er en reel funktion på et topologisk rum X, vil vi ved støtten for f forstå den lukkede mængde

$$st(f) = \overline{\{p \in X \mid f(p) \neq 0\}}$$

Definition A3.17. Lad X være et topologisk rum, og lad $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ være en lokalt endelig åben overdækning af X med $\alpha \in I$. Ved en deling af enheden associeret med overdækningen $\mathcal{U}$ forstås et system af reelle kontinuerte funktioner $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ på X med $\alpha \in I$, således at

1) f_α er ikke-negativ $\forall \alpha \in I$.
2) $st(f_\alpha) \subseteq U_\alpha \quad \forall \alpha \in I$.
3) $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = 1$.

Bemærkning. 3) skal forstås: $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) = 1 \quad \forall p \in X$. Denne sum har mening, da $f_\alpha(p) \neq 0$ for højst endelig mange $\alpha \in I$ på grund af 2), og fordi $\mathcal{U}$ er lokalt endelig.

Bemærkning. Den engelske term for deling af enheden er "partition of unity".

Følgende sætning viser, at parakompakthed og existens af delinger af enheden er nært forbundne egenskaber. Denne sætning skal opfattes som hovedsætningen i dette appendix.

Sætning A3.18. Et topologisk rum X er parakompakt, hvis og kun hvis X er et Hausdorff rum, og der til enhver åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af X findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af X med samme indexmængde I som $\mathcal{V}$, der forfiner $\mathcal{V}$, og har en associeret deling af enheden $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ med $\alpha \in I$.

Bevis. Antag først, at X er parakompakt, og lad $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ være en åben overdækning af X med $\alpha \in I$.

Da X er parakompakt, findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af X med samme indexmængde I som $\mathcal{V}$, der forfiner $\mathcal{V}$ (lemma A3.1o). Ifølge sætning A3.13 kan vi finde en åben overdækning $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}$ af X, således at $\overline{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$ $\forall \alpha \in I$. Da X er et normalt rum (sætning A3.12), kan vi så finde en åben overdækning $\mathcal{W}' = \{W'_\alpha\}$ af X, således at

$$\overline{W}_\alpha \subseteq W'_\alpha \subseteq \overline{W'_\alpha} \subseteq U_\alpha \quad \forall \alpha \in I.$$

Lad nu $g_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ være en kontinuert funktion så $g_\alpha(\overline{W}_\alpha) = 1$ og $g_\alpha(X \setminus W'_\alpha) = 0$ (Urysohn's lemma). Så vil

$$st(g_\alpha) \subseteq \overline{W'_\alpha} \subseteq U_\alpha \quad \forall \alpha \in I .$$

Da $\mathcal{U}$ er lokalt endelig, og $\mathcal{W}$ overdækker X, indser man nu let, at

$$f_\alpha = \frac{g_\alpha}{\sum_{\alpha \in I} g_\alpha} \qquad \forall \alpha \in I$$

er en veldefineret kontinuert ikke-negativ reel funktion. Det er herefter klart, at $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ med $\alpha \in I$ er en deling af enheden associeret med $\mathcal{U}$. Dette beviser den ikke trivielle del af sætning A3.18.

"Hvis" i sætningen er trivielt, da det her specielt er forudsat, at der til enhver åben overdækning af X findes en lokalt endelig åben overdækning af X, der forfiner denne.

Dermed er sætning A3.18 bevist.

På differentiable mangfoldigheder er vi interesseret i differentiable delinger af enheden.

Hvis M er en differentiabel mangfoldighed, og $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ er en lokalt endelig åben overdækning af M, forstår vi ved en <u>differentiabel deling af enheden</u> associeret med $\mathcal{U}$ et system af reelle differentiable funktioner $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ på M, der opfylder 1), 2) og 3) i definition A3.17.

Før vi kan bevise en differentiabel udgave af sætning A3.18, må vi have differentiable Urysohn funktioner.

<u>Lemma A3.19</u>. Lad M være en differentiabel Hausdorffsk mangfoldighed og lad K være en kompakt delmængde og U en åben delmængde af M, så $K \subsetneq U$. Så findes en differentiabel funktion $f : M \longrightarrow E^1$, således at $0 \leq f(p) \leq 1 \quad \forall p \in M$, og således at $f(K) = 1$ og $f(M \setminus U) = 0$.

<u>Bevis</u>. Da K er kompakt, og U er åben, kan vi ved at udnytte lemma 8.5 finde endeligt mange par af åbne mængder $(U_1,V_1),\dots,(U_k,V_k)$ med tilhørende reelle differentiable funktioner $f_1,\dots,f_k$ på M, således at

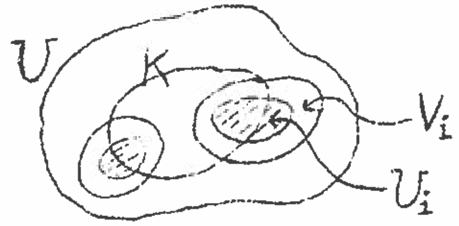
1) $U_1,\dots,U_k$ overdækker K

ii) $U_i \subseteq \overline{U}_i \subseteq V_i \subseteq U \quad \forall i = 1,\dots,k$

iii) $0 \leq f_i(p) \leq 1 \quad \forall p \in M \quad \forall i = 1,\dots,k$

iv) $f_i(\overline{U}_i) = 1$ og $f_i(M \setminus V_i) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,k$

(overvej dette; indse især, at iii) kan opnås).



Definer nu $f : M \longrightarrow E^1$ ved fastsættelsen

$$1 - f = (1-f_1)\cdot\ldots\cdot(1-f_k).$$

På $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ (specielt på K ifølge i)) antager mindst en af faktorerne $1-f_i$ værdien 0. Heraf følger, at $f(K) = 1$. På $X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ (specielt på $X \setminus U$ ifølge ii)) antager alle faktorerne $1-f_i$ værdien 1. Heraf følger, at $f(X \setminus U) = 0$. Fra iii) får vi endvidere, at $0 \leq f(p) \leq 1 \quad \forall p \in M$.

Afbildningen f har altså de forlangte egenskaber, og lemmaet er bevist.

Den differentiable udgave af sætning A3.16 har formen:

Sætning A3.20. En differentiabel mangfoldighed M er parakompakt, hvis og kun hvis M er et Hausdorff rum, og der til enhver åben overdækning $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ af M findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ af M med samme indexmængde I som $\mathcal{V}$, der forfiner $\mathcal{V}$, og har en associeret differentiabel deling af enheden $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ med $\alpha \in I$.

Bevis. Antag først, at M er parakompakt, og lad $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ være en vilkårlig åben overdækning af M med $\alpha \in I$.

Da M er lokal kompakt, og $\mathcal{V}$ overdækker M, kan vi for ethvert $p \in M$ vælge en åben omegn W_p af p, således at $\overline{W}_p$ er kompakt, og så $W_p \subseteq V_\alpha$ for et eller andet $\alpha \in I$. $\mathcal{W} = \{W_p\}$ er altså en forfining af $\mathcal{V}$.

Lad nu $\mathcal{W}' = \{W'_\beta\}$ med $\beta \in J$ være en lokalt endelig åben overdækning af M, der forfiner $\mathcal{W}$. Ifølge sætning A3.13 kan vi finde en åben overdækning $\mathcal{W}'' = \{W''_\beta\}$ af M, således at $\overline{W''_\beta} \subseteq W'_\beta \quad \forall \beta \in J$. Da M er normal (sætning A3.12) findes en åben overdækning $\mathcal{W}''' = \{W'''_\beta\}$ af M, således at

$$\overline{W''_\beta} \subseteq W'''_\beta \subseteq \overline{W'''_\beta} \subseteq W'_\beta \qquad \forall \beta \in J.$$

Da $\mathcal{W}'$ er en forfining af $\mathcal{W}$ er $\overline{W'_\beta}$ kompakt $\forall \beta \in J$. Så er også $\overline{W''_\beta}$ kompakt $\forall \beta \in J$. Vi kan derfor for ethvert $\beta \in J$ finde en differentiabel funktion $g_\beta : M \longrightarrow E^1$, således at $0 \leqq g_\beta(p) \leqq 1$ $\forall p \in M$, $g_\beta(\overline{W''_\beta}) = 1$ og $g_\beta(M \setminus W'''_\beta) = 0$ (lemma A3.19). Det er klart, at

$$st(g_\beta) \subseteq \overline{W'''_\beta} \subseteq W'_\beta \qquad \forall \beta \in J.$$

Idet $\mathcal{W}'$ forfiner $\mathcal{V}$ vælger vi nu for ethvert $\beta \in J$ et $\alpha(\beta) \in I$, således at $W'_\beta \subseteq V_{\alpha(\beta)}$. Definer så U_α og h_α for ethvert $\alpha \in I$ ved fastsættelserne:

$$U_\alpha = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} W'_\beta$$

og

$$h_\alpha = \sum_{\alpha(\beta)=\alpha} g_\beta$$

(summen har mening, idet $\mathcal{W}'$ er lokalt endelig).

Det er klart, at h_α er en ikke-negativ differentiabel funktion. Da g_β er ikke-negativ $\forall \beta \in J$, følger det, at

$$st(h_\alpha) = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} st(g_\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} W'_\beta = U_\alpha$$

for ethvert $\alpha \in I$

$$(\{p \in M \mid h_\alpha(p) \neq 0\} = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} \{p \in M \mid g_\beta(p) \neq 0\}).$$

Da $\mathcal{W}'$ er lokalt endelig, bliver $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med $\alpha \in I$ en lokalt endelig åben overdækning af M. Det er klart, at $\mathcal{U}$ forfiner $\mathcal{V}$. Vi skal derfor nu blot angive en differentiabel deling af enheden $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ associeret med $\mathcal{U}$. Dette får vi ved definitionen

$$f_\alpha = \frac{h_\alpha}{\sum_{\alpha \in I} h_\alpha} \qquad \forall \alpha \in I.$$

Dette beviser den ikke trivielle del af sætning A3.2o. "Hvis"-udsagnet er her igen trivielt som i sætning A3.18. Dermed er sætning A3.2o bevist.

OPGAVER.

Opgave 1. Vis, at enhver lukket delmængde af et parakompakt topologisk rum selv er parakompakt i den inducerede topologi.

Opgave 2. Lad X være et parakompakt og Y et kompakt topologisk rum. Vis, at $X \times Y$ er parakompakt i produkttopologien.

Bemærkning: Det gælder ikke generelt, at $X \times Y$ er parakompakt, hvis X og Y begge kun er parakompakte.

Opgave 3. Lad X være et topologisk rum.

Vis, at hvis enhver åben mængde i X er parakompakt i den inducerede topologi, er enhver delmængde af X parakompakt i den inducerede topologi.

Opgave 4. Lad X være et topologisk rum. Lad endvidere $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ med $\alpha \in I$ og $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ med $\beta \in J$ være lokalt endelige åbne overdækninger af X med associerede delinger af enheden henholdsvis $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ og $\mathcal{G} = \{g_\beta\}$.

Vis, at $\{U_\alpha \cap V_\beta\}$ for $(\alpha, \beta) \in I \times J$ er en lokalt endelig åben overdækning af X, og at $\{f_\alpha \cdot g_\beta\}$ er en deling af enheden associeret med denne overdækning.

Opgave 5. Som bekendt siges et topologisk rum X at være sammenhængende, hvis intet par af åbne mængder i X splitter X, d.v.s. hvis U og V er disjunkte åbne mængder i X, så $X = U \cup V$, gælder enten $U = \emptyset$ eller $V = \emptyset$.

Vis, at en differentiabel mangfoldighed er sammenhængende, hvis og kun hvis den er kurvesammenhængende.

INDHOLDSFORTEGNELSE
til samtlige hefter

Indledning til differentialgeometri og differentialtopologi.

§ 0: Notation 2
§ 1: Euklidiske rum 3
§ 2: Differentiabilitet 8
§ 3: Differentiable mangfoldigheder i euklidiske rum 22
§ 4: Differentiable afbildninger 34
§ 5: Tangentrum og inducerede afbildninger .. 39
§ 6: Regulære punkter og værdier 45

Differentiable Mangfoldigheder I

§ 1: Topologi og differentiabel struktur på en mangfoldighed 1
§ 2: Tangentrummene for en differentiabel mangfoldighed 9
§ 3: Differentiable afbildninger 19
§ 4: Tangentbundtet og Lie-algebraen af vektorfelter for en differentiabel mangfoldighed 36
§ 5: Tangentbundt konstruktionen som funktor 54
§ 6: Differentiable vektorbundter 63
§ 7: Operationer på vektorbundter 94

Differentiable Mangfoldigheder II

§ 8: Differential former 128
i) Bundter af ydre former 128
ii) Algebraen af differential former... 131
iii) Ydre differentiation af differential former 140
iv) Transport af differential former ved differentiable afbildninger ... 148
§ 9: Riemann'sk metrik 155
§ 10: Vektoranalyse på en orienteret Riemann'sk mangfoldighed 176

§ 11: Anvendelser af deling af enheden 201
i) Existens af Riemann'sk metrik 201
ii) Orientering af mangfoldigheder 203
iii) Imbedding af kompakt differentiabel mangfoldighed i euklidisk rum 206
iv) Approximation af kontinuert afbildning med differentiabel afbildning 208
§ 12: Integration på mangfoldigheder 212
i) Integration på E^n 212
ii) Integration af differential former 217
iii) Områder med regulær rand 225
iv) Stokes' sætning 236
§ 13: Topologiske anvendelser af Stokes' sætning .. 248
i) Brouwer's fixpunkt sætning 248
ii) Vektorfelter på kuglefladen 254
§ 14: De Rham cohomologi og afbildningsgrad 258

Appendix 1, 2 og 3

Appendix 1: Kategoribegrebet
i) Kategorier .... A 1.1
ii) Funktorer .... A 1.4
Appendix 2: Multilineær algebra
i) Multilineære afbildninger .... A 2.1
ii) Tensor produkt af vektorrum .... A 2.4
iii) Tensorer .... A 2.15
iv) Tensor algebraer .... A 2.24
v) Ydre potenser og Grassmann algebraer ... A 2.32
Appendix 3: Topologi
i) Adskillelses axiomer i topologien. Urysohn's lemma .... A 3.1
ii) Parakompakte rum .... A 3.8
iii) Deling af enheden .... A 3.15

STIKORDSREGISTER

til samtlige hefter.

A henviser til "Appendix".
I henviser til "Indledning til differential-
geometri og differentialtopologi."

afbildningsgrad	276
algebraen af differentialformer	136
algebraisk varietet	I 29
alternerende r-lineære afbildninger	A 2.32
r-lineære former	A.2.32
anti-kommutativitet	A 2.38
antipodisk afbildning	I 8 44
approksimation af funktion	208
arvet koordinatsystem	32
atlas	6
basis rum	39, 63
beslægtede vektorfelter	61
blandede tensorer	A 2.16
Brouwer's fixpunkt sætning	248
bundt afbildning	74
isomorfi	75
rum	39
ækvivalens	75
bundtet af covariante tensorer af grad 2	155
tensorer af type (0,2)	155
tensorer af type (r,s)	171
tensorer contravariante af grad r og covariante af grad s	171
af ydre r-former	128
contravariant Grassmann algebra	A 2.38
tensor af orden 1	39
tensor algebra	A 2.28
metrisk tensor	169
metrisk fundamentalform	169
funktor	A 1.4
vektor	39

covariant funktor A 1.4
Grassmann algebra A 2.44
vektor 116
vektorfelt 123
tensorfelt af grad 2 156
tensor algebra A 2.30

del-atlas 1
-mangfoldighed 32
deling af enheden A 3.16
De Rham cohomologi gruppe 259
derivation 15, 48
diagram I 2
diffeomorfi I 18, I 43, 22
diffeomorfe mangfoldigheder 22
differentiabel deling af enheden A 3.17
afbildning I 8, I 35, 19, 208
funktor 95
mangfoldighed I 24, 2
vektorbundt 63
vektorfelt 42
struktur 5
differentiabilitet I 8
differential I 9, I 15, I 41, 19, 117
differential form af grad 0 134
af grad 1 123
af grad r 131
differentialkvotient I 9
differential polynomium 136
dimension af vektorbundt 63
direkte sum A 2.26
divergens af vektorfelt 192
Divergens-sætningen 241
dualt tangent bundt 116
dualt tangent rum 116

Einsteins konvention A 2.18
elementær matrix 34
enhedskuglen 227
euklidisk gruppe I 8

euklidisk rum I 3
Euler karakteristik 281
exact r-form 258

felt af vektorer 255
fiber 63
flade I 25
flad Riemann'sk metrik 162
fodpunkt I 5
fordragelige del-atlas 5
forfining A 3.28
Fréchet rum A 3.13

Gauss afbildning 280
Gauss-Bonnet sætning 283
Gaussisk krumning 283
genus for flade 284
glat differentiabel afbildning I 12
glat homotope 251
glat homotopi 252
glat homotopitype 256
glat homotopi ækvivalens 256
glat overlap I 35
gradient felt 166
gradueret algebra A 2.28
afbildning 150
Grassmann algebra A 2.38
produkt A 2.37, 135
Green's sætning 240

Haar integral 225
hastighedsvektor I 13
Hausdorff'sk differentiabel mangfoldighed 4
Hausdorff rum A 3.33
hyperflade 32
højre invers A 1122

ikke-singulær bilineær form A 2.21

imbedding 31

immersion 28

indlægning I 4

indre af mængde A 3.2

indre punkt A 3.2, 226

induceret afbildning I 15, I 41, 19

orientering 230

Riemann'sk metrik 163, 164

struktur 7

topologi A 3.2

integralet af differentialform 219, 232

af funktion 222, 235

integrabel funktion 214

isometri 199

isometri, lineær afbildning I 6

isometriske mangfoldigheder 199

Jacobiant matrix I 11

Jacobi's identitet 50

kanonisk basis I 3

kanonisk isomorfi A 2.24

kanonisk liniebundt 70

kategori A 1.1

kommutativt diagram I 2

kommutator produkt 52

komponenter 157, 172

kontraktion A 2.30

af tensorfelt 173

kontaktmængde A 3.2

kontaktpunkt A 3.2

koordinatfunktioner 43, 121, 132, 157

koordinatsystem I 22, 1

kritisk punkt I 46

kritisk værdi I 46

kurve I 12, I 25

kvotienttopologi 66

kæderegel I 10

Laplace operatoren	194
Lie-algebra	51
for Lie-gruppe	53
homomorfi	60
isomorfi	60
Lie-gruppe	33
homomorfi	60
isomorfi	60
Lie-produkt	50
lineært uafhængige tværsnit	82
linking number	285
lokalt endelig	A 3.8
lokal kompakt	A 3.13
lokalt koordinatsystem	1
lokal trivielt vektorbundt	79
lukket hylster	A 3.2
mængde i topologisk rum	A 3.1
r-form	258
Maurer-Cartan's ligning	154
metrisk fundamentalform	161
tensor	161
middelværdisætning	I 20
Monge-type diff.mgf.	I 27
morfi	A 1.1
multilineær afbildning	A 2.1
Möbius bånd	91
n-dimensionale intervaller	234
negativ basis	176
n-form	176
negativt volumenmål	178
normalbundt	65, 174
normalfelt	80
normale rum	A 3.3

omdrejningsflade I 32
omegn A 3.2
område med regulær rand 225
orienterbar mangfoldighed 177
orienteret mangfoldighed 177
orientering af vektorrum 176
orienteringsbevarende diffeomorfi 199
orienteringsvendende diffeomorfi 199
ortogonale grupper I 8, 34
ortogonal transformation I 6

parakompakt A 3.8
paralleliserbar mangfoldighed 85
parameter I 12
parameterinterval I 12
parameterkurve 13
parametriseret kurve I 12
Poincaré's lemma 262
positivt definit tensorfelt 160
positiv basis 176
n-form 176
positivt enheds-normalfelt 244
orienteret kort 185
overlap 203
volumenmål 178
projektion 40, 63
projektive rum 68, 73

rand af delmængde af mangfoldighed 226
randpunkt 226
rang af differentiabel afbildning I 16, 22
regulær afbildning I 17
regulært punkt I 46
regulær rand 225
regulært rum A 3.3
regulær værdi I 46
restriktion af bundt 79

Riemann'sk mangfoldighed 162
metrik 161, 201
volumenmål 185
r-lineære former A 2.1
rotation af vektorfelt 197
r-vektorer A 2.36

sammenhængende topologisk rum A 3.20
sfære-bundt 174
simpel mangfoldighed I 26
skæv-symmetrisk r-lineær afbildning A 2.33
specielle ortogonale gruppe 35
sportopologi A 3.2
standard struktur 6
stereografisk plan 175
stereografisk projektion I 37
stjerneformet mængde 261
Stokes' sætning 237
klassisk version 244
struktur konstant 153
støtte for differentialform 217
for funktion A 3.15
submersion 29
symmetrisk tensorfelt 160

tangentbundt 39
tangentialafbildning I 15, I 41, 19
tangentielle kurver 10
tangentrum I 6, I 41, 11
tangent til kurve I 13
tangentvektor I 5, I 39, 11
tensor A 2.15
algebra A 2.30
felt af type (0,2) 156
felt af type (r,s) 171
produkt A 2.4, A 2.25

tensor produkt af vektorbundter 170
produkt af bundt afbildninger 171
rum A 2.15

topologisk rum A 3.1
topologisk vektorrum I 4
topologi A 3.1
torus I 32, 53, 88
total rum 39, 63
transitiv operation I 44
translation I 7, 33
trivialisering 79
trivielt vektorbundt 64
tværsnit 79

Urysohn's lemma A 3.5

vektorfelt 42
vektorpart I 5
vektorprodukt 197
venstre-invariant Riemann'sk metrik 199
vektorfelt 52
venstre invers A 1.2
volumen 235
volumenmål 177

wedge produkt A 2.37
af differentialformer 135

ydre differential 140
potens A 2.33
produkt A 2.37
ydre produkt af differentialformer 135
r-former A 2.42

ækvivalens A 1.1

åbne mængder i topologisk rum A 3.1