DIFFERENTIALGEOMETRI & PARAMETRISK DESIGN

STEEN MARKVORSEN

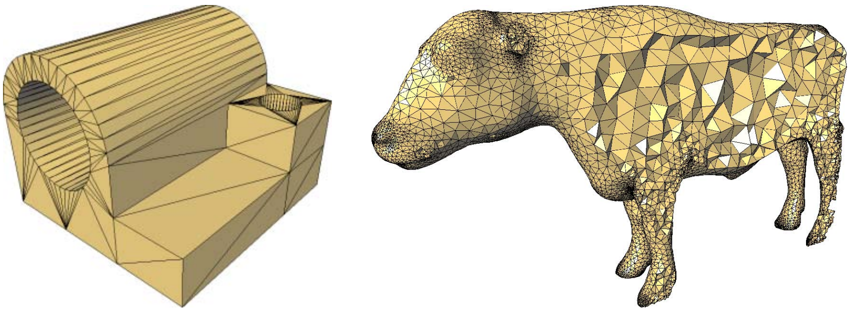
DTU COMPUTE 2024

Indhold

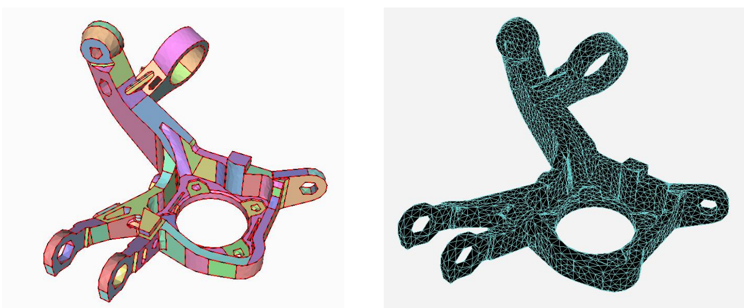
Kapitel 1

Trekanter

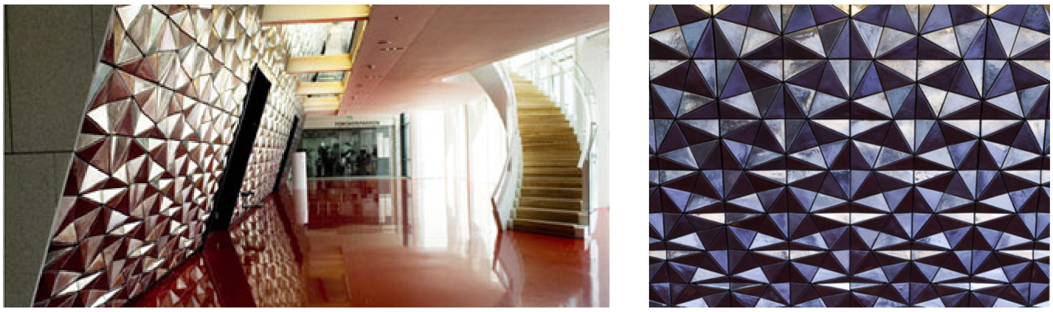
Trekanter er nogle af de mest grundlæggende - og mest anvendte - geometriske objekter, se figurerne. Men hvad er en trekant egentlig? Vi ser først på trekanterne i planen. Dertil har vi brug for et koordinatsystem.



Figur 1.1: Trekanter en masse.



Figur 1.2: Et maskin-element og en tilhørende triangulering.



Figur 1.3: Værk af Olafur Eliasson ved indgangen til koncertsalen på Alsion: *Music Wall*.

Figur 1.4: Dag og nat i *British Museum Great Court*.

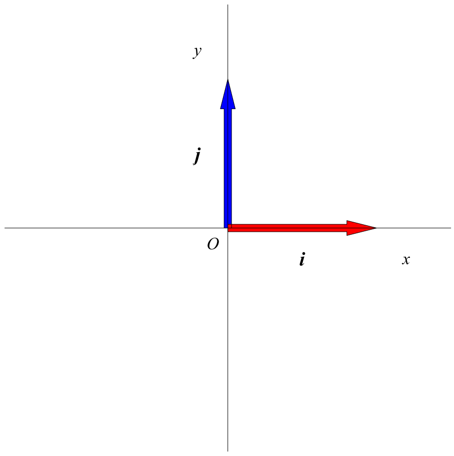
1.1 Det sædvanlige koordinatsystem i planen

Koordinatsystemet i planen er nagelfast og givet ved de sædvanlige retvinklede koordinatakser ud fra et givet fast punkt O, som vi kalder Origo, samt de tilhørende basisvektorer, som er enhedsvektorer i aksernes retninger: $\{O,x,y\}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$. Se figur 1.5.

Med et således fast valgt koordinatsystem kan vi beskrive præcist hvor et punkt p i planen er placeret, nemlig ved hjælp af punktets to $(x,y)-$koordinater (p_1,p_2) i det givne koordinatsystem. Og vi kan på samme måde fortælle præcis hvilken vektor $\mathbf{a}$, der forbinder et punkt $p=(p_1,p_2)$ med et andet punkt $q=(q_1,q_2)$, nemlig ved hjælp af den vektors koordinater med hensyn til den givne sædvanlige basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$:

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2)=(q_1-p_1,q_2-p_2) \quad . \tag{1.1}$$

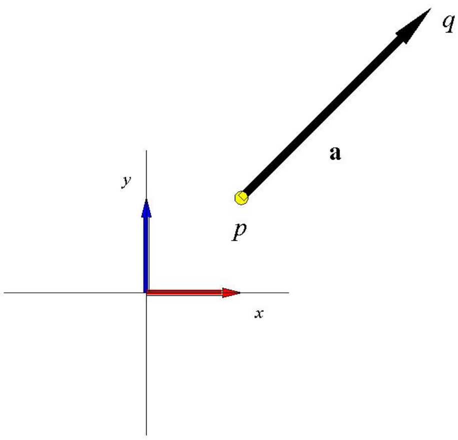
Læg mærke til, at en vektor $\mathbf{a}$ altså er en pil med et fodpunkt (i dette tilfælde p) og et spidspunkt



Figur 1.5: Det sædvanlige koordinatsystem $\{O,x,y\}$ i planen med basisvektorer $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.

(i dette tilfælde q). Spidspunktets koordinater kan beregnes ved at addere fodpunktets koordinater til vektorens koordinater. Og fodpunktets koordinater kan beregnes ved at trække vektorens koordinater fra spidspunktets koordinater. Se figur 1.6.

Den vektor som har fodpunkt O og spidspunkt p vil vi skrive $\mathbf{p}$ og kalde stedvektoren for punktet p. Når punktet p har koordinaterne (p_1, p_2) med hensyn til koordinatsystemet $\{O,x,y\}$ så har $\mathbf{p}$ selvsagt koordinaterne (p_1, p_2) med hensyn til basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.



Figur 1.6: Vektoren $\mathbf{a} = (2,2)$ med fodpunkt $p = (1,1)$ og spidspunkt $q = (3,3)$.

Vi vil ret tit i det følgende få brug for at skrive vektorer på 'højkant', dvs. som koordinat-søjle-matricer. For at se forskel sætter vi en stjerne på:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Det svarer til at transponere koordinat-række-*matricen* $[a_1\ a_2]$ *til den viste koordinat-søjle*-matrix.

1.2 Trekanter

Som navnet siger er en trekant givet ved sine tre kanter! Men for at være helt præcis: Ved en trekant vil vi forstå det udfyldte område i planen, som er afgrænset af trekantens kanter.

Når vi har et fast valgt koordinatsystem til rådighed i planen, vil vi benytte det til at beskrive trekanterne i den plan. Det kan vi gøre på mange måder. Een måde er at angive koordinaterne for trekantens tre hjørnepunkter, p, q, og r. En anden, som vi for det meste vil benytte her, er at angive eet hjørnepunkt p og de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, der har fælles fodpunkt p, men som har de to andre hjørnepunkter i trekanten som spidspunkter. Se figur 1.8.

En trekant, der er beskrevet og fastlagt i planen på den måde vil vi ofte i det følgende kalde et hængsel og betegne med følgende notation:

$$\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \tag{1.3}$$

Bemærk, at for hver trekant er der 3 valgmuligheder for valg af det fælles fodpunkt og for hvert valg af fodpunkt er der dernæst to muligheder for at vælge *rækkefølgen* af de to kant-vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Det vil sige, at en given trekant kan skrives på formen (1.3) på 6 forskellige måder.

|||| OPGAVE 1.1

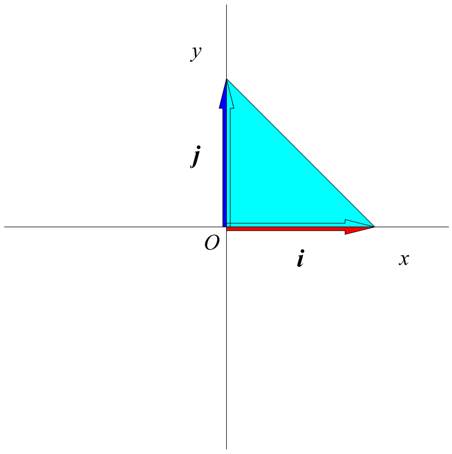
Vi ser på den trekant, der er givet ved de tre punkter, der i planen har følgende koordinater med hensyn til det valgte sædvanlige retvinklede koordinatsystem:

$$p = (1,1) \quad , \quad q = (2,3) \quad , \quad r = (3,2) \quad . \tag{1.4}$$

Find alle 6 muligheder for at skrive den trekant på formen (1.3). Vink: Een af mulighederne er

$$\triangle = \triangle((3,2), (-2,-1), (-1,1)) \quad . \tag{1.5}$$

En meget speciel trekant er basistrekanten med de tre hjørnepunkter $(0,0)$, $(1,0)$, og $(0,1)$, se figur 1.7.



Figur 1.7: Basistrekanten i planen: $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$.

OPGAVE 1.2

Find alle 6 muligheder for at skrive basistrekanten på formen (1.3). Vink: Een af dem er

$$\triangle = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) = \triangle((0,0),(1,0),(0,1)) \quad . \tag{1.6}$$

OPGAVE 1.3

Find alle 5 alternative muligheder for at skrive den trekant, der er vist i figur 1.8 på formen (1.3). Trekanten er allerede 'vist' i figuren på formen:

$$\triangle = \triangle((1,1),(2,2),(-2,1)) \quad . \tag{1.7}$$

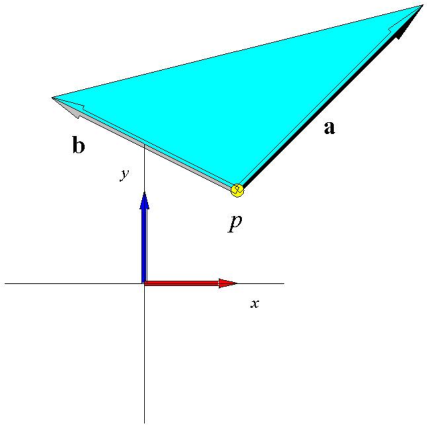
Man kan med nogen ret spørge: Hvorfor alt det bøvl med 6 forskellige måder at skrive en og samme trekant på, når vi kan nøjes med een måde, nemlig den der bare angiver en liste med de tre hjørnepunkter?

Det er fordi vinklerne i trekanten, arealet af trekanten, og orienteringen af trekanten ligger 'indbygget' i kant-vektorerne og kan let bestemmes direkte (ved simple formler) ud fra dem. Det vil vi nu præcisere og give eksempler på.

1.2.1 Arealet af en plan trekant

Arealet af en trekant er som bekendt halvdelen af grundlinjen gange højden. For en trekant $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ kan vi vælge *længden* $||\mathbf{a}||$ af $\mathbf{a}$ som grundlinje. Og højden i trekanten er

$$||\mathbf{b}|| \sin(\theta) = |\,(\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{a}})\,/\,||\widehat{\mathbf{a}}||\,| \quad , \tag{1.8}$$



Figur 1.8: En trekant i planen givet ved $\triangle = \triangle((1,1),(2,2),(-2,1))$.

hvor θ er vinklen mellem de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, og hvor $\widehat{\mathbf{a}}$ betegner tværvektoren i planen til $\mathbf{a}$ (tværvektorens koordinater er $\widehat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1)$). Derfor er arealet:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})) &= \frac{1}{2}|\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{a}}| \\ &= \frac{1}{2}\cdot|a_1b_2 - a_2b_1| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot|\det([\mathbf{a}^*\ \mathbf{b}^*])| \quad . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Med andre ord: Arealet af trekant $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ er den numeriske værdi af den halve determinant af den 2×2 matrix, der fås ved at sætte $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ind som søjler i matricen.

Nu kan der jo forekomme kollapsede trekanter med areal 0, og determinant 0 (hvordan?) - men det vil vi helst ikke tillade, så derfor definerer vi:

Definition 1.4 En regulær trekant er en trekant, der har et egentligt areal, altså et areal, der er skarpt større end 0.

Sætning 1.5 En trekant er regulær hvis og kun hvis alle trekantens kantlængder og vinkler er positive.

OPGAVE 1.6

Kan du bevise påstanden i Sætning 1.5? Eller er det bare klart?

OPGAVE 1.7

Hvilke af følgende trekanter er regulære?

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle((1,1),(4,-2),(8,4)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1,3),(4,-2),(-8,4)) \\ \triangle_3 &= \triangle((3,1),(9,123),(123,9)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O,\mathbf{j},\mathbf{i}) \quad . \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.2.2 De indre vinkler i en trekant

En trekant har en indre vinkel ved hvert af sine tre hjørnepunkter. Vinklen (målt i radianer) er en værdi imellem 0 og π og kan findes ved hjælp af de to kant-vektorer, der udgår fra hjørnet. Lad os sige, at vi er interesserede i at bestemme den indre trekantsvinkel ved punktet p i den trekant, der har fremstillingen $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$. Den vinkel vil vi betegne med $\theta_p = \measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ og den kan bestemmes ud fra de to kant-vektorer:

$$\cos(\theta_p) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||} \tag{1.11}$$

sådan at

$$\theta_p = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||}\right) \quad . \tag{1.12}$$

Lad nu q betegne det hjørnepunkt i $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$, som er spidspunkt for $\mathbf{a}$ og lad r betegne det hjørnepunkt, som er spidspunkt for $\mathbf{b}$. Så har vi tilsvarende:

$$\begin{aligned} \theta_q &= \measuredangle(-\mathbf{a},\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{a}-\mathbf{b}||}\right) \\ \theta_r &= \measuredangle(-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \arccos\left(\frac{-(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||\cdot||\mathbf{a}-\mathbf{b}||}\right) \quad . \end{aligned} \tag{1.13}$$

OPGAVE 1.8

Bestem alle de indre vinkler i hver af følgende trekanter. Vinklerne skal angives i radianer, altså: 1 radian svarer til $180/\pi$ grader og 1 grad svarer til $\pi/180$ radianer. Alle tallene kan gerne angives med blot et par decimaler. Check, at vinkelsummen i hver trekant er π radianer.

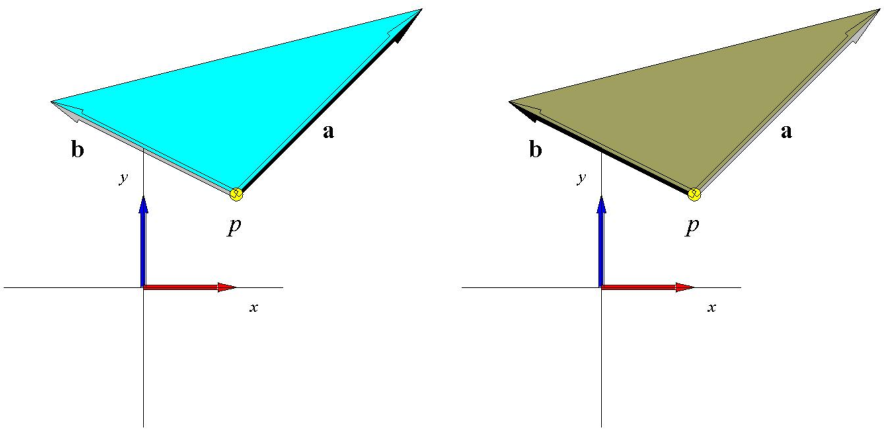
$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle((1,1),(4,-2),(8,4)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1,3),(4,-2),(-8,4)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O,\mathbf{j},\mathbf{i}) \quad . \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.2.3 Orientering af en plan trekant

Som sikkert bemærket ovenfor ved brug af (1.9) gjorde vi der et stort nummer ud af at tage den numeriske værdi alle steder (for eksempel af determinanten) for at sikre, at arealerne af trekanterne bliver positive. Ved ombytning af *rækkefølgen* af vektorerne i trekanten $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ skifter determinanten fortegn (hvorfor det?). Rækkefølgen har med orienteringen af trekanten at gøre:

Definition 1.9 Lad $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ betegne en regulær trekant i planen. Hvis drejningen om fodpunktet p af $\mathbf{a}$ imod $\mathbf{b}$ er *imod* uret, så siger vi, at trekanten $\triangle = \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ er en positivt orienteret trekant; ellers (altså hvis drejningen af $\mathbf{a}$ imod $\mathbf{b}$ er *med* uret) siger vi, at trekanten er en negativt orienteret trekant.

Med andre ord, hvis $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ er positivt orienteret, så er $\triangle(p,\mathbf{b},\mathbf{a})$ negativt orienteret. Se figur 1.9 hvor vi med to forskellige farver (cyan og khaki) har angivet de to forskellige orienteringer af en trekant. Hvis den ene kant-vektor i $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ drejes dynamisk omkring p som i figur 1.10 så vil orienteringen af trekanten skifte præcis i de situationer hvor trekanten ikke er regulær.



Figur 1.9: Trekanten $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \triangle((1,1),(2,2),(-2,1))$ fra figur 1.8 har positiv orientering; den tilsvarende (med samme fodpunkt) negativt orienterede version $\triangle(p,\mathbf{b},\mathbf{a}) = \triangle((1,1),(-2,1),(2,2))$ er vist til højre.

Bemærk, at arealet af en regulær trekant altid er positiv – uafhængig af orienteringen.

OPGAVE 1.10

Bestem areal, orientering, indre vinkler, kantlængder, og omkreds for hver af følgende plane trekanter.

$$\begin{aligned}
\triangle_1 &= \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \\
\triangle_2 &= \triangle((1,1),(3,0),(0,4)) \\
\triangle_3 &= \triangle((12,117),(3,0),(0,4)) \\
\triangle_4 &= \triangle(O,(1,0),(\cos(\pi/3),\sin(\pi/3))) \\
\triangle_5 &= \triangle(O,\mathbf{j},(3,4)) \quad .
\end{aligned} \tag{1.15}$$

1.3 Areal versus omkreds

Nogle plane trekanter er federe end andre, dvs. de har relativt stort areal i forhold til deres omkreds. Vi vil begynde at undersøge det fænomen med et par eksempler:

Eksempel 1.11

En familie af trekanter er defineret ved, at det ene hjørne bevæger sig på en cirkel med radius 1 og centrum i $(1,0)$ som vist i figur 1.10. De to andre hjørner er fastholdte og ligger konstant i punkterne $(0,0)$ og $(2,0)$ henholdsvis. Vi vil bestemme de største trekanter i familien, altså dem der har det største areal A. Af symmetrigrunde må der være mindst to. Hvorfor det?

Vi kan først bemærke, at cirklen kan *parametriseres* ved hjælp af cosinus og sinus: Vektoren $\mathbf{q}$ fra punktet $(1,0)$ til et vilkårligt givet punkt på cirklen danner en vinkel θ med $x-$aksen, dvs. $\measuredangle(\mathbf{i},\mathbf{q}) = \theta$. Men så kan $\mathbf{q}$ skrives som

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta),\sin(\theta)) \quad , \tag{1.16}$$

og dermed er stedvektoren fra $(0,0)$ til det givne punkt på cirklen:

$$\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{q} = (1+\cos(\theta),\sin(\theta)) \quad . \tag{1.17}$$

Den faste kant-vektor for trekanten er givet ved

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} = (2,0) \quad , \tag{1.18}$$

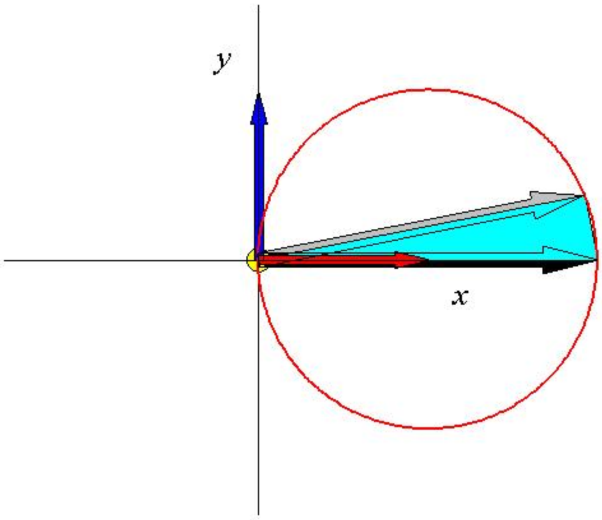
så vi kan konkludere, at trekantens areal er givet ved

$$\text{Areal}(\theta) = \frac{1}{2}|\det([\mathbf{a}^* \; \mathbf{b}^*])| = \frac{1}{2}\cdot\left| \begin{vmatrix} 2 & 1+\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} \right| \quad , \tag{1.19}$$

hvor vi tillader θ at antage alle vinkel-værdierne, $\theta \in [0,2\pi]$. Men den determinant er let at udregne:

$$\text{Areal}(\theta) = |\sin(\theta)|. \tag{1.20}$$

Det vil sige, at det største areal opnås, når $|\sin(\theta)|$ er størst, og det opnås for $\theta = \pi/2$ og for $\theta = 3\pi/2$, fordi der – og kun der – er $|\sin(\theta)|$ præcis 1.



Figur 1.10: Hvilken trekant har størst areal i forhold til sin omkreds? Det oplyses og ses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en cirkel, se eksempel 1.11. Animeret: Klik på figuren.

De største trekanter i familien får vi nu ved at indsætte de to fundne $\theta-$værdier i udtrykket (1.17) for **b** ovenfor: Den ene trekant er udspændt fra origo $(0,0)$ af $\mathbf{a} = (2,0)$ og $\mathbf{b} = (1,1)$ og den anden trekant er udspændt af $\mathbf{a} = (2,0)$ og $\mathbf{b} = (1,-1)$. De har begge arealet $A(\pi/2) = A(3\pi/2) = 1$.

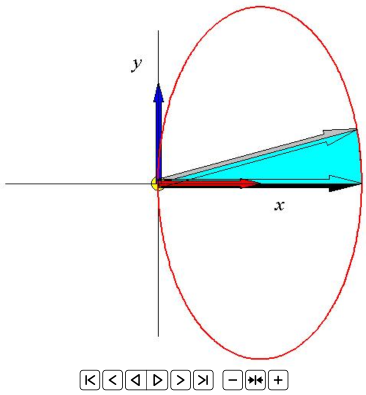
OPGAVE 1.12

En ellipse i planen har ligningen

$$E \quad : \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad , \tag{1.21}$$

hvor a og b er positive tal, de såkaldte halvakser. En sådan ellipse er symmetrisk omkring akserne og har centrum i Origo, $(0,0)$.

1. Angiv koordinaterne for de to punkter, hvor ellipsen skærer $x-$aksen.
2. Hvor skærer den $y-$aksen?
3. Hvad er arealet af det område i planen som afgrænses af ellipsen E?



Figur 1.11: Hvilken trekant har størst areal i forhold til omkreds? Det oplyses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en ellipse med halvakserne 1 og $\sqrt{3}$. Opgaven er formuleret mere præcist i opgave 1.13. Figuren er animeret.

OPGAVE 1.13

En familie af trekanter er defineret som i figur 1.11. Opstillingen er magen til den i figur 1.10 bortset fra, at "styrekurven" for $\mathbf{q}$ nu er en ellipse med centrum i $(1,0)$ og halvakserne er 1 (i $x-$akseretningen) og $\sqrt{3}$ (i $y-$akseretningen). Ellipsens ligning er:

$$E \quad : \quad \left(\frac{x-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \quad , \tag{1.22}$$

1. Begrund, at med den metode, som er gennemgået i eksempel 1.11, kan følgende udtryk nu benyttes for vektoren $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{b} = (1+\cos(\theta), \sqrt{3}\sin(\theta)) \quad , \tag{1.23}$$
dvs. begrund, at alle de punkter, der har sådan en stedvektor, ligger på ellipsen med den givne ligning og vis, at alle punkter på hele ellipsen 'rammes' når $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Find de trekanter i familien, som har det største areal A. Angiv også det areal.

3. Find de trekanter i familien, som har den største *omkreds* L. Angiv også den omkreds.

4. Find de trekanter i familien, som har det største *forhold* A/L imellem areal A og omkreds L. Angiv også det forhold.

1.3.1 Heron's formel

En af de mest forbavsende sætninger om trekanter er følgende, som er opkaldt efter Heron, der var ingeniør og matematiker i Alexandria; se Wikipedia: Heron:

Sætning 1.14 Lad $\triangle$ betegne en trekant med kant-længderne a, b, og c. Sæt nu s til at være den *halve* omkreds af trekanten, altså

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad . \tag{1.24}$$

Så er arealet af trekanten givet ved den simple formel:

$$\text{Areal}(\triangle) = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \quad . \tag{1.25}$$

Bevis. Se evt. Wikipedia: Heron's formula eller [VLH]. □

OPGAVE 1.15

Lad $\triangle$ have kantlængderne 3, 5, og 6.

1. Brug Heron's formel til bestemmelse af arealet af trekanten.
2. Hvis du ikke kendte Heron's formel, hvordan ville du så finde arealet?
3. Antag, at trekanten er placeret i det sædvanlige koordinatsystem i planen sådan at $\triangle = \triangle(O,(0,3),(\star_1,\star_2))$. Bestem alle mulighederne for udfyldning af de manglende koordinater $(\star_1,\star_2)$ ud fra de givne oplysninger, og angiv for hver løsning, om $\triangle(O,(0,3),(\star_1,\star_2))$ er positivt orienteret eller negativt orienteret.
4. Benyt een af fremstillingerne $\triangle(O,(0,3),(\star_1,\star_2))$ til at checke arealberegningen – ved hjælp af areal-ligningen (1.9).

OPGAVE 1.16

Blandt de *ligebenede* trekanter med omkreds $L = 1$ er det præcis de *ligesidede* trekanter, der har *størst areal* A. Bevis den påstand og angiv værdien af det største areal.

OPGAVE 1.17

Vis, at en trekant $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$ er regulær hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært uafhængige.

OPGAVE 1.18

I Heron's formel, ligning (1.25), forudsættes det ikke, at trekanten er regulær. Af formlen fås direkte at trekanten er regulær hvis blot $s > \max\{a,b,c\}$. Vis, at der for alle trekanter gælder, at $s \geq \max\{a,b,c\}$.

Kapitel 2

2D Matrix-operationer

I dette kapitel vil vi deformere plane trekanter ved hjælp af $2 \times 2-$matricer.

2.1 Algebraisk opsætning

Vi antager, at vi har givet en eller anden vilkårlig matrix, som vi herefter vil kalde en deformations-matrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad . \tag{2.1}$$

Dernæst tager vi en trekant, der er givet på hængsel-formen $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ som indført i kapitel 1.

Vi vil så deformere hængslet og dermed trekanten til et nyt hængsel, en ny trekant, med det samme hjørnepunkt p, men med nye udspændende kant-vektorer, $\widetilde{\mathbf{a}}$ og $\widetilde{\mathbf{b}}$, men hvordan? Det vil vi nu beskrive:
Den nye trekant kan skrives som $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, hvor $\widetilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2)$ og $\widetilde{\mathbf{b}} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2)$ konstrueres ved hjælp af $\mathbf{K}$ og de givne kant-vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ på følgende måde:

De nye kant-vektorer til konstruktion af det deformerede hængsel defineres ved at gange matricen $\mathbf{K}$ på hver af koordinatsøjlerne for de to kant-vektorer ud fra p i det gamle hængsel:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 \\ k_{21}a_1 + k_{22}a_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

og tilsvarende fås $\widetilde{\mathbf{b}}$ fra $\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}b_1 + k_{12}b_2 \\ k_{21}b_1 + k_{22}b_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.3}$$

De to definitionsligninger kan samles til een matrix-ligning:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

På kort form har vi altså, som en alternativ måde at skrive (2.2) og (2.3):

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{a}}^* &= \mathbf{K}\mathbf{a}^* \\ \widetilde{\mathbf{b}}^* &= \mathbf{K}\mathbf{b}^* \end{aligned} \tag{2.5}$$

eller på endnu kortere, kompakt matrix form for ligning (2.4):

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}^* & \widetilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \quad . \tag{2.6}$$

|||| Eksempel 2.1

For trekanten $\triangle = \triangle(O,(2,1),(1,2))$ og deformationsmatricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

får vi

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \tag{2.8}$$

sådan at den deformerede trekant er givet ved: $\widetilde{\triangle} = \triangle(O,(8,4),(7,5))$.

|||| OPGAVE 2.2

Lad **K** betegne de nedenfor angivne deformationsmatricer og bestem i hvert tilfælde de trekanter der fremkommer ved deformationerne af de angivne trekanter:

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} && \triangle_1 = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ &\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && \triangle_2 = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ &\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} && \triangle_3 = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ &\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} && \triangle_4 = \triangle((2,1),(1,2),(2,4)) \\ &\mathbf{K}_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} && \triangle_5 = \triangle((2,1),(1,2),(2,-4)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

|||| OPGAVE 2.3

Find i hver enkelt tilfælde nedenfor den deformationsmatrix $\mathbf{K}_i$, som deformerer den givne trekant $\triangle_i$ over i den givne trekant $\widetilde{\triangle}_i$

$$
\begin{aligned}
\triangle_1 &= \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \quad , \quad \widetilde{\triangle}_1 = \triangle(O,(2,1),(-1,2)) \\
\triangle_2 &= \triangle(O,(2,1),(-1,2)) \quad , \quad \widetilde{\triangle}_2 = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \\
\triangle_3 &= \triangle(O,(2,1),(-1,2)) \quad , \quad \widetilde{\triangle}_3 = \triangle(O,(-1,2),(2,1))
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

|||| OPGAVE 2.4

Find i hvert enkelt tilfælde den deformerede trekant $\widetilde{\triangle}$ når den givne trekant $\triangle$ deformeres først med $\mathbf{K}_1$ og dernæst den nye trekant med $\mathbf{K}_2$.

$$
\begin{aligned}
&\triangle_a = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \ , \ \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&\triangle_b = \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \ , \ \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \\
&\triangle_c = \triangle(O,(2,1),(2,2)) \ , \ \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&\triangle_d = \triangle(O,(2,1),(2,2)) \ , \ \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

2.2 Geometrisk tolkning

Hvad betyder ovenstående i geometrisk forstand? Hvordan ser disse deformationer faktisk ud? Og hvordan afhænger deformationerne af $\mathbf{K}$ og af de kant-vektorer vi starter med?

Deformationsmatricen $\mathbf{K}$ kan betragtes som en maskine, der drejer, trækker og strækker i et hængsel for en trekant og som giver et nyt hængsel og dermed en ny trekant.

Det første vi kan se umiddelbart er, at arealet af den nye trekant er givet ved arealet af den gamle trekant ganget med den numeriske værd af determinanten af deformationsmatricen:

|||| Sætning 2.5

$$
\text{Areal}(\triangle(p,\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}})) = |\det(\mathbf{K})| \cdot \text{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})) \quad . \tag{2.12}
$$

Specielt fås, at den deformerede trekant er regulær hvis og kun hvis den gamle er regulær (dvs. har areal > 0) og deformationsmatricen $\mathbf{K}$ også er regulær (altså $\det(\mathbf{K}) \neq 0$) .

Bevis. Aflæses direkte af ligning (2.6) sammenholdt med arealformlen (1.9). □

Eksempel 2.6

I fortsættelse af eksempel 2.1: Den gamle trekant $\triangle$ har arealet 3, og da determinanten af $\mathbf{K}$ er 4, så har den nye trekant arealet 12 i henhold til sætning 2.5. Og det stemmer med en direkte udregning af arealet af den nye trekant.

2.2.1 Hele trekanten deformeres

Vi har indirekte antaget, at det er tilstrækkeligt at definere hvordan en trekants hængsel - dvs. de to kant-vektorer ud fra det fælles hjørnepunkt p - deformeres. Men kan vi være sikre på, at hele trekanten selv 'følger med' ved deformationen?

Vi vil kort indse, at det faktisk *er* tilfældet, som forventet, altså at der gælder følgende:

Sætning 2.7 Hvis $\mathbf{w}$ er en vektor med fodpunkt p og spidspunkt inde i den trekant, der er repræsenteret ved hængslet $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$, så er $\widetilde{\mathbf{w}}$ også en vektor, der har fodpunkt p og spidspunkt inde i den deformerede trekant $\triangle(p,\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}})$, når $\widetilde{\mathbf{w}}$ defineres (på samme måde og med samme opskrift som $\widetilde{\mathbf{a}}$ og $\widetilde{\mathbf{b}}$) ved

$$\widetilde{\mathbf{w}^*} = \mathbf{K}\mathbf{w}^* \quad . \tag{2.13}$$

Bevis. Deformation med en matrix er en lineær afbildning. Hvis $\mathbf{w}$ som angivet har spidspunkt inde i den regulære trekant $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$, så kan $\mathbf{w}$ skrives som en (og kun en) linear-kombination af de to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$: Der findes to entydigt givne værdier $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$ med $\alpha+\beta \leq 1$ sådan at

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \quad . \tag{2.14}$$

Overvej ulighederne $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$ med $\alpha+\beta \leq 1$! Hvor kommer de fra? Og for hvilke $\mathbf{w}$ er der lighedstegn $[=]$ i de enkelte uligheder?
Derfor er også

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{w}^*} = \mathbf{K}\mathbf{w}^* &= \mathbf{K}\,(\alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^*) \\
&= \mathbf{K}\,(\alpha\mathbf{a}^*) + \mathbf{K}\,(\beta\mathbf{b}^*) \\
&= \alpha\mathbf{K}\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{K}\mathbf{b}^* \\
&= \alpha\widetilde{\mathbf{a}}^* + \beta\widetilde{\mathbf{b}}^* \quad ,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

sådan at $\widetilde{\mathbf{w}}$ er en tilsvarende (med de samme koefficienter $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \leq 1$) linearkombination af det nye hængsels kant-vektorer $\widetilde{\mathbf{a}}$ og $\widetilde{\mathbf{b}}$. Spidspunktet af vektoren $\widetilde{\mathbf{w}}$ med fodpunktet

p ligger derfor inde i (eller på en af kanterne i) trekanten $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, og det var det, vi skulle vise. $\square$

Det giver herefter mening at bruge en notation, der direkte fortæller, at trekanten $\widetilde{\triangle} = \triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$ fås ved for eksempel at bruge deformationsmatricen $\mathbf{K}$ på trekanten $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, idet begge trekanter repræsenteres ved de respektive hængsler. Vi vil benytte følgende notation:

$$\widetilde{\triangle} = \triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K} \cdot \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \tag{2.16}$$

2.2.2 Rotationer

Rotationsmatricer er specielle typer af deformationsmatricer. Alle 2D rotationsmatricer har følgende struktur - de er givet ved en rotations-vinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ således:

$$\mathbf{U}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad . \tag{2.17}$$

Bemærk især, at $\mathbf{U}(\varphi)$ besidder følgende karakteristiske egenskaber: $\mathrm{Det}(\mathbf{U}(\varphi)) = +1$, $\mathbf{U}^*(\varphi) \cdot \mathbf{U}(\varphi) = \mathbf{E}$, og derfor også $\mathbf{U}^{-1}(\varphi) = \mathbf{U}^*(\varphi)$.

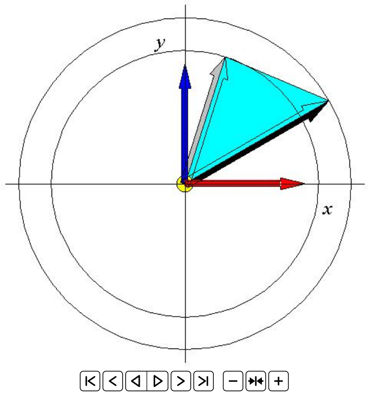
Når vi betragter $\mathbf{U}(\varphi)$ som en deformationsmatrix, der 'ganges på' et hængsel $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, så består 'deformationen' i at hængslet roteres vinklen φ omkring fodpunktet p. Det kan vi se på følgende måde:

For enhver givet enhedsvektor $\mathbf{e}$ på formen $\mathbf{e} = (\cos(v), \sin(v))$ får vi billedvektoren $\widetilde{\mathbf{e}}$ ved at deformere med $\mathbf{U}(\varphi)$ således:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) \cdot \cos(\varphi) - \sin(v) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(v) \cdot \sin(\varphi) + \sin(v) \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v + \varphi) \\ \sin(v + \varphi) \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.18}$$

hvor vi ved det sidste lighedstegn har benyttet additionsformlerne for cosinus og sinus. Det ses altså at $\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{e}^*$ er koordinatsøjlematrix for præcis den vektor $\widetilde{\mathbf{e}} = (\cos(v + \varphi), \sin(v + \varphi))$ der fremkommer ved at rotere vektoren $\mathbf{e} = (\cos(v), \sin(v))$ vinklen φ i positiv omløbsretning.

I figur 2.1 vises en (animeret) rotation af et hængsel $\triangle(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ med rotationsvinkel φ der gennemløber intervallet $\varphi \in [0, 2\pi]$; det svarer til at rotere en hel omgang rundt om Origo O i positiv omløbsretning.



Figur 2.1: Rotation af hængsel. Animeret.

2.2.3 Skaleringer i koordinatakseretningerne

Skaleringsmatricerne for skalering i henholdsvis $x-$akse-retning og i $y-$akse-retning er, med de respektive skaleringskonstanter σ_1 og σ_2:

$$\mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.19}$$

og

$$\mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.20}$$

Bemærk, at vi kan udføre begge skaleringer på een gang ved:

$$\mathbf{S}_{xy}(\sigma_1, \sigma_2) = \mathbf{S}_x(\sigma_1) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.21}$$

Se animationerne af de to typer skaleringer i figurerne 2.2 og 2.3.

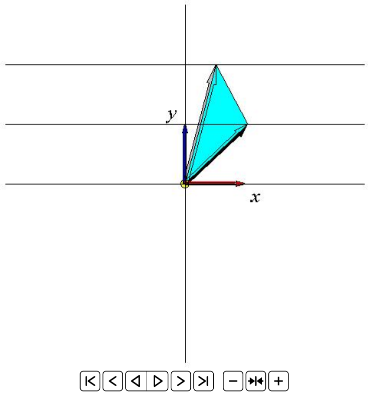
OPGAVE 2.8

Vis, at $\mathbf{S}_x(\sigma_1) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \mathbf{S}_y(\sigma_2) \cdot \mathbf{S}_x(\sigma_1)$.

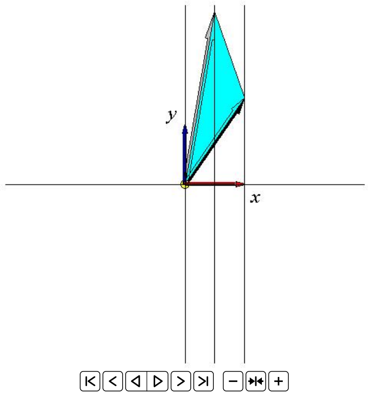
2.2.4 Flip

Flipmatricen $\mathbf{F}$ er betegnelsen for følgende specielle deformationsmatrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.22}$$



Figur 2.2: Skalering af hængsel i $x-$akse-retning med faktorer σ_1 der gennemløber $\sigma_1 \in [1,3]$. Animeret.



Figur 2.3: Skalering af hængsel i $y-$akse-retning med faktorer σ_2 der gennemløber $\sigma_2 \in [-1,1]$. Animeret.

Bemærk, at

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E} \quad \text{sådan at} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \quad , \tag{2.23}$$

men $\mathbf{F}$ er *ikke en rotationsmatrix da* $\det(\mathbf{F}) = -1$.

OPGAVE 2.9

Hvorfor kan vi tillade os at kalde denne matrix $\mathbf{F}$ en flipmatrix når vi betragter den som en deformationsmatrix, der 'ganges på' hængsler og trekanter?

2.3 Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer

Der gælder et fantastisk resultat om alle matricer, som vi foreløbig vil nøjes med at formulere her for regulære $2 \times 2-$matricer - for at få en første fornemmelse af, hvad det hele går ud på:

Sætning 2.10 Enhver regulær (deformations-)matrix $\mathbf{K}$ kan skrives som et produkt af 4 regulære matricer således:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{2.24}$$

hvor $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ er rotationsmatricer, $\mathbf{\Sigma}$ er en entydig bestemt diagonalmatrix med positive diagonal-elementer, og $\widehat{\mathbf{F}}$ er enten flip-matricen (hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$) eller enhedsmatricen (hvis $\det(\mathbf{K}) > 0$):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_U) & -\sin(\varphi_U) \\ \sin(\varphi_U) & \cos(\varphi_U) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \varphi_U \in [-\pi, \pi] \quad , \tag{2.25}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \quad , \tag{2.26}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & -\sin(\varphi_V) \\ \sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \varphi_V \in [-\pi, \pi] \quad , \tag{2.27}$$

sådan at den transponerede rotationsmatrix ser således ud

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & \sin(\varphi_V) \\ -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.28}$$

$$\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvis} \quad \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \tag{2.29}$$

og

$$\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvis} \quad \det(\mathbf{K}) > 0 \quad . \tag{2.30}$$

Bemærkning 2.11 Der er et par observationer, som det er værd at lægge mærke til:

1. Den transponerede rotationsmatrix $\mathbf{V}^*$, som skal bruges i produktet (2.24), er selv en rotations-matrix – den roterer samme vinkel som $\mathbf{V}$, bare i modsat retning. De to matricer er hinandens inverse: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* = \mathbf{E}$ sådan at $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$.

2. Hvis $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ og $\det(\mathbf{K}) > 0$, så er $\mathbf{K}$ selv en rotationsmatrix.

3. Hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$ så er $\det(\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}}) > 0$ fordi $\det(\widehat{\mathbf{F}})$ jo i så fald er negativ. Men det betyder ifølge sætningen ovenfor (om dekomponering af matricer med positiv determinant), at $\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$ kan skrives som et produkt således:

$$\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \tag{2.31}$$

sådan at

$$\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \tag{2.32}$$

Men $\widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$, så vi får dermed direkte:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{2.33}$$

og det er så netop sætningen for dekomponering af matricer med negativ determinant! Dvs. ved på denne måde at gange $\widehat{\mathbf{F}}$ på $\mathbf{K}$ behøver vi kun at kunne dekomponere matricer med *positiv* determinant.

OPGAVE 2.12

Vis, at hvis $\mathbf{V}$ er en rotationsmatrix med rotationsvinkel φ_V, så er $\mathbf{V}^*$ også en rotationsmatrix, som defineret i (2.20), og rotationsvinklen for $\mathbf{V}^*$ er $-\varphi_V$. Vis, at det heraf følger, at $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$.

2.4 Hvordan dekomponeres en matrix?

Der er to oplagte spørgsmål: Hvordan viser man sådan en sætning og hvordan bruger man den? Det sidste spørgsmål (som vi indtil videre vil nøjes med at besvare, men som næsten også er et bevis for sætningen) handler om at kunne finde faktorerne, ingredienserne, $\widehat{\mathbf{F}}$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{\Sigma}$, og $\mathbf{U}$ i ovenstående ligning (2.24), når matricen $\mathbf{K}$ er givet.

Det er ikke vanskeligt; metoden hedder Singular Value Decomposition eller kort SVD, og benyttes i utallige anvendelser, se f.eks. [S, ND].

Metode 2.13 Vi skitserer først SVD metoden i punktform, og henviser iøvrigt til eksempel 2.14 nedenfor, hvor alle punkterne gennemgås i detalje for en konkret matrix $\mathbf{K}$.

Først bestemmes $\widehat{\mathbf{F}}$. Den fås direkte ved blot at finde ud af, om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ og så bruge (2.30) henholdsvis (2.29).

1. Hvis $\det(\mathbf{K}) > 0$ sådan at $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ så er proceduren følgende:

   (a) $\mathbf{\Sigma}$ fås ud fra egenværdierne for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$. (Hvorfor er det produkt en symmetrisk matrix? Dvs. Hvorfor er $(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K})^* = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$?) De egenværdier er altid positive (hvorfor det?) - lad os kalde dem σ_1^2 og σ_2^2 og lad os nummerere dem i størrelse, sådan at $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$. De respektive positive *kvadratrødder af disse egenværdier* for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ er så $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$.

   (b) Søjlerne i $\mathbf{V}$ er ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ svarende til egenværdierne σ_1^2 og σ_2^2 for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$. Egenvektorerne skal vælges sådan at $\mathbf{V}$ har positiv determinant (det er altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på én af egenvektorerne):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* & \mathbf{v}_2^* \end{bmatrix} \quad . \tag{2.34}$$

Matricen $\mathbf{V}^*$, som jo er den, vi har brug for i dekomponeringen fås selvfølgelig dernæst ved at transponere den fundne $\mathbf{V}$.

(c) Søjlerne i $\mathbf{U}$ er de koordinat-søjlevektorer $\mathbf{u}_1^*$ og $\mathbf{u}_2^*$, som fås direkte ved at udregne

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{K}\mathbf{v}_2^* \end{aligned} \tag{2.35}$$

og indsætte dem som søjler i $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_2^* \end{array}\right] \quad . \tag{2.36}$$

2. Hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$ sådan at $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$, så er proceduren følgende (se sidste punkt i bemærkning 2.11):

(a) Sæt $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$. Så er $\det(\widetilde{\mathbf{K}}) > 0$ og vi kan dekomponere $\widetilde{\mathbf{K}}$ ved at indsætte $\widetilde{\mathbf{K}}$ på $\mathbf{K}$'s plads i de tre punkter (a), (b), og (c) ovenfor i 1. procedure for matricer med positiv determinant. Lad os notere resultatet, den resulterende dekomponering, på følgende måde:

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \tag{2.37}$$

(b) Så kan $\mathbf{K}$ selv direkte skrives på dekomponeret form således:

$$\mathbf{K} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \tag{2.38}$$

Der foregår rigtig mange ting i den metode og strategi, men hvert step er rimelig simpelt. Vi illustrerer med et konkret eksempel:

|||| Eksempel 2.14

Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \quad . \tag{2.39}$$

Vi vil finde dekompositionen af $\mathbf{K}$ som et produkt af 4 matricer som i (2.24).

Determinanten af $\mathbf{K}$ er positiv, så $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$, enhedsmatricen. Desuden er

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{array}\right] \quad , \tag{2.40}$$

som har egenværdierne $\sigma_1^2 = 8$ og $\sigma_2^2 = 2$. Lad os lige repetere: Egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ findes ved at trække λ fra i diagonalen og finde rødderne i det tilhørende karakteristiske polynomium:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} - \lambda\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{array}\right] \quad , \tag{2.41}$$

som har determinanten

$$\det\left(\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E}\right)=(5-\lambda)\cdot(5-\lambda)-9=\lambda^2-10\lambda+16=(\lambda-2)\cdot(\lambda-8) \quad . \tag{2.42}$$

Dette polynomium er pr. definition det karakteristiske polynomium for $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$, og rødderne er netop: $\lambda_1=8$ og $\lambda_2=2$, sådan at $\sigma_1^2=8$ og $\sigma_2^2=2$ og derfor $\sigma_1=\sqrt{8}$, $\sigma_2=\sqrt{2}$, således at:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{8} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix} \quad . \tag{2.43}$$

Lad os repetere hvordan vi dernæst finder egenvektorerne hørende til egenværdien $\lambda_1=\sigma_1^2$: Først trækkes λ_1 fra i diagonalen i $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}-\lambda_1\mathbf{E}=\begin{bmatrix}5-\lambda_1 & 3\\ 3 & 5-\lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-8 & 3\\ 3 & 5-8\end{bmatrix} \quad , \tag{2.44}$$

og da vi ved, at determinanten er 0, så findes der uendelig mange løsninger til det homogene lineære ligningssystem, der har $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}-\lambda_1\mathbf{E}$ som koefficientmatrix:

$$\begin{aligned}(-3)x+3y&=0\\ 3x+(-3)y&=0 \quad .\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ved at løse dette system finder vi let, at *en* løsning er $(1,1)$ som normeres ved at dividere med længden til $\mathbf{v}_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$; denne sidstnævnte vektor er også en løsning til ligningssystemet.

NB: Vektoren $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ er tilsvarende en enhedsvektor-løsning til det samme ligningssystem, men her *vælger* vi den først fundne og arrangerer dernæst nedenfor fortegnet på egenvektoren $\mathbf{v}_2$ hørende til $\lambda_2=2$ således at den resulterende matrix $\mathbf{V}$ får den korrekte determinant $+1$.

Helt tilsvarende opstilles ligningssystemet for egenvektorerne hørende til egenværdien $\lambda_2=2$ og vi finder en enhedsvektor-løsning $\mathbf{v}_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ som normeret egenvektor hørende til egenværdien $\lambda_2=2$.

De ortogonale enheds-egenvektorer for $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$ som vi herefter vil bruge er altså: $\mathbf{v}_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ og $\mathbf{v}_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

Summa summarum har vi derfor:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{8} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix} \quad , \tag{2.46}$$

og ved at bemærke, at $1/\sqrt{2}=\cos(\pi/4)$ får vi følgende rotationsmatrix:

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{bmatrix} \quad . \tag{2.47}$$

og hermed den *transponerede* matrix $\mathbf{V}^*$:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \quad . \tag{2.48}$$

Søjlerne i $\mathbf{U}$ er til sidst – i henhold til forskriften ovenfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.49}$$

som betyder, at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{2.50}$$

som igen klart er en rotationsmatrix, nemlig med $\varphi_U = 0$.

Vi kan for en ordens skyld lige checke, at den faktorisering, vi har fundet, faktisk virker og er korrekt – simpelthen ved at regne efter:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \quad . \end{aligned} \tag{2.51}$$

OPGAVE 2.15

Dekomponér følgende matricer på samme måde som i eksempel 2.14 og husk at prøve efter til sidst, om produktet af de 4 matricer giver den ønskede $\mathbf{K}$-matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1/100 & 2/100 \\ 3/100 & 1/100 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_7 &= \begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 3 & 1/100 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{2.52}$$

2.5 Deformations-energi

Vi forestiller os en fabrik M_P, der omdanner basis-trekanter $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ til deformerede trekanter efter vilkårlige ønskede deformations-matricer $\mathbf{K}$. Basistrekanterne haves på lager en masse og er gratis! Men hvad koster deformationerne? Fabrikken har maskiner, der kan rotere, skalere i akseretningerne, og vende trekanterne (med $\mathbf{F}$) med fastholdt basispunkt O.

Det er kun skaleringerne der ikke er gratis på den fabrik:

Definition 2.16 Prisen på hver enkelt deformeret trekant (dvs. et mål for den energi det koster at deformere et standard hængsel med deformationsmatricen $\mathbf{K}$) er på fabrikken M_P bestemt ved σ-værdierne for $\mathbf{K}$, altså $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{K})$ og $\sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{K})$ således:

$$P(\mathbf{K}) = (1-\sigma_1(\mathbf{K}))^2 + (1-\sigma_2(\mathbf{K}))^2 \quad . \tag{2.53}$$

Bemærkning 2.17 Husk, at egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ er $\sigma_i^2(\mathbf{K})$, så for at finde $\sigma_i(\mathbf{K})$ er det nødvendigt at tage kvadratroden af disse egenværdier. Bemærk stadig, at $\sigma_i(\mathbf{K})$ *sædvanligvis ikke* er egenværdier for $\mathbf{K}$ selv!

OPGAVE 2.18

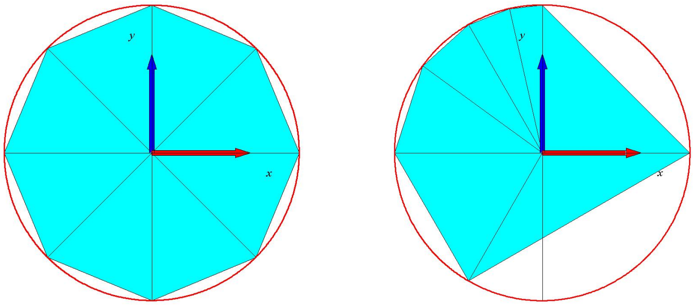
Hvad koster det fabrikken M_P at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven (med radius $3/2$) til venstre i figur 2.4 når alle trekanterne antages konstrueret ved deformation af $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ og placeret uden translation, dvs. med fastholdt fodpunkt O?

OPGAVE 2.19

Hvad koster det fabrikken at producere trekanterne til fliselægningen vist til højre i figur 2.4? Det oplyses, at delepunkterne på den omskrevne cirkel er givet ved

$$q_i = \left(\frac{3}{2}\cos(\theta_i), \frac{3}{2}\sin(\theta_i)\right) \qquad \text{hvor} \quad \theta_i \in \{0, 4\pi/3, \pi, 4\pi/5, 2\pi/3, 4\pi/7, \pi/2\} \quad , \tag{2.54}$$

og alle trekanterne antages igen at være konstrueret ved deformation af $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ og placeret uden translation, dvs. med fastholdt fodpunkt O.



Figur 2.4: Trianguleringer af (dele af) en cirkelskive med ligebenede trekanter.

OPGAVE 2.20

Antag, at vi har en stak ens trekanter, som ikke er basis-trekanter, men givet ved $\triangle = \triangle(O,(1,1),(2,1))$ og ønsker dem lavet om til nye trekanter $\triangle = \triangle(O,(1,-1),(2,1))$. Hvordan kan vi benytte fabrikkens maskiner til det, og hvad er prisen for hver trekant?

En anden, konkurrerende, fabrik M_Q prissætter deformationerne på en noget anden måde. Basis-trekanterne haves også her på lager en masse og er stadig gratis, men:

Definition 2.21 Prisen på hver enkelt deformeret basis-trekant (givet ved deformationsmatricen $\mathbf{K}$) fra fabrikken M_Q defineres også her ud fra σ-værdierne for $\mathbf{K}$, men nu efter følgende formel:

$$Q(\mathbf{K}) = \left(\frac{1}{\sigma_1(\mathbf{K})} - \sigma_1(\mathbf{K})\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2(\mathbf{K})} - \sigma_2(\mathbf{K})\right)^2 \quad . \tag{2.55}$$

OPGAVE 2.22

Hvad koster det at få fabrikken M_Q til at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven til venstre i figur 2.4 (uden translation)?

OPGAVE 2.23

Hvilken fabrik er i hvert enkelt tilfælde billigst ved produktionen af de trekanter, der fremkommer ved brug af de deformationsmatricer $\mathbf{K}_i$, der er angivet i opgave 2.15? Vink: Det er tilstrækkeligt at se på et par tilfælde og dernæst generalisere ud fra dem.

OPGAVE 2.24

I denne opgave er det en del af øvelsen selv at definere *stort* og *småt*:

1. Hvis man skal have lavet 1000 forskellige meget *små* trekanter, hvilken fabrik er så billigst?
2. Hvis man skal have lavet 1000 forskellige meget *store* trekanter, hvilken fabrik er så billigst?

Fabrikken M_Q har specialiseret sig i at deformere gamle brugte trekanter om til standard-basistrekanter. Dvs. hvis man kommer med sin gamle deformerede trekant $\triangle = \triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b})$, så finder fabrikken først ud af, hvilken deformationsmatrix $\mathbf{L}$, der deformerer denne trekant $\triangle$ tilbage til standardtrekanten $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, udfører deformationen, og tager til sidst prisen $Q(\mathbf{L})$ for det.

OPGAVE 2.25

Vis, at på fabrikken M_Q er prisen for deformationen $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) \longmapsto \triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b})$ den samme som prisen for deformationen tilbage igen $\triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b}) \longmapsto \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$. Hvis den anden fabrik M_P fandt på at tilbyde tilbage-transformationer på samme måde, men ved brug af prissætningen $P(\mathbf{K})$, ville der så også der være den samme symmetri i priserne? Giv eksempler!

OPGAVE 2.26

Lad $\mathcal{T}$ betegne mængden af regulære positivt orienterede trekanter i planen, og lad $\triangle_1$ og $\triangle_2$ betegne to vilkårlige trekanter i $\mathcal{T}$. Vis – i forlængelse af opgave 2.25 – at på fabrikken M_Q er prisen $d(\triangle_1,\triangle_2)$ for deformationen $\triangle_1 = \triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b}) \longmapsto \triangle_2 = \triangle(O,\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}})$ den samme som prisen $d(\triangle_2,\triangle_1)$ for deformationen tilbage igen $\triangle_2 = \triangle(O,\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}) \longmapsto \triangle_1 = \triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b})$. Så har vi dermed defineret en positiv, symmetrisk funktion d på $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Vis, at hvis $d(\triangle_1,\triangle_2) = 0$ så findes der en rotation om O som drejer $\triangle_1$ over i $\triangle_2$. Vis også omvendt, at hvis der findes sådan en rotation, så er $d(\triangle_1,\triangle_2) = 0$. Undersøg, om der gælder trekantsulighed: $d(\triangle_1,\triangle_2) + d(\triangle_2,\triangle_3) \geq d(\triangle_1,\triangle_3)$ for alle $\triangle_1$, $\triangle_2$, og $\triangle_3$ i $\mathcal{T}$ således at d er en *metrik* på det betragtede rum af trekanter.

OPGAVE 2.27

Hvad koster det fabrikken M_P at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven (med radius $3/2$) til venstre i figur 2.4 når translation *er* tilladt? Kan det så gøres billigere (end hvis translation af tetraedrene *ikke* er tilladt som i opgave 2.18) og i så fald hvor meget billigere?

OPGAVE 2.28

Lad $\mathbf{K}$ være en regulær 2×2-matrix og sæt $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}$. Vis, at $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$ har de samme egenværdier som $\widetilde{\mathbf{K}}^*\cdot\widetilde{\mathbf{K}}$, således at de to matricer ligeledes har den samme $\mathbf{\Sigma}$-matrix.

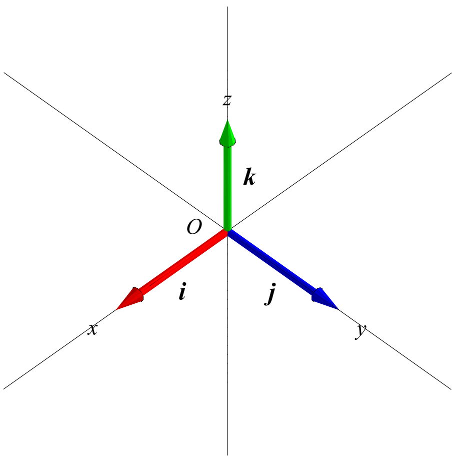
Kapitel 3

Tetraedre

Tetraedre er fællesbetegnelsen for de objekter, der i 3D svarer til trekanterne i 2D. Ligesom en trekant, der er udspændt af et hængsel, et to-ben, som er bestemt ved to vektorer med et fælles fodpunkt, så er et tetraeder udspændt af et tre-ben, altså tre vektorer **a**, **b**, og **c** med et fælles fodpunkt.

3.1 Det sædvanlige koordinatsystem i rummet

For effektivt at kunne beskrive hvad der foregår i rummet, og for præcist at kunne analysere treben og tetraedre etc. har vi brug for et 3D koordinatsystem. Koordinatsystemet i rummet er givet ved et fast valg af sædvanlige retvinklede koordinatakser ud fra et givet fast Origo, samt de tilhørende basisvektorer i akse-retningerne: $\{O, x, y, z\}$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Se figur 3.1.



Figur 3.1: Det sædvanlige koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$ i rummet med basisvektorer $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Ligesom i planen kan vi nu præcisere beliggenhed af punkter og forbindelsesvektorer mellem punkter. Hvis punktet p har koordinaterne $p = (p_1, p_2, p_3)$ og punktet q har koordinaterne $q =$

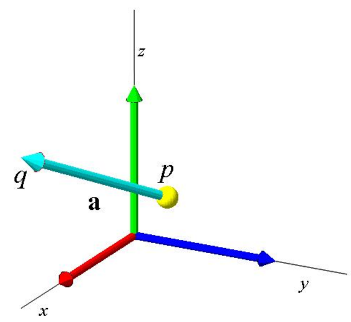
(q_1, q_2, q_3), så har vi dermed også koordinaterne for den vektor **a**, der forbinder p med q:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \quad . \tag{3.1}$$

Vektoren **a** kan betragtes som en pil (nu i rummet) med fodpunkt p og spidspunkt q, se figur 3.2.

I kapitel 4 vil vi se nærmere på $3 \times 3-$matrix-deformationer af tetraedre i rummet og har derfor ligesom i kapitel 2 (hvor vi studerede $2 \times 2-$matrix-deformationer af trekanter i planen) brug for at repræsentere vektorer ved deres koordinat-søjle-matricer:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$



Figur 3.2: Vektoren $\mathbf{a} = (1.0, -0.5, 0.5)$ med fodpunkt $p = (0.5, 0.5, 0.5)$ og spidspunkt $q = (1.5, 0.0, 1.0)$.

3.1.1 Tetraedre

Tetraedre vil vi som allerede nævnt beskrive ved hjælp af treben. Et treben består af et punkt p og tre kantvektorer **a**, **b**, og **c** med det fælles fodpunkt p, se figur 3.4. Et sådant treben vil vi betegne på denne måde:

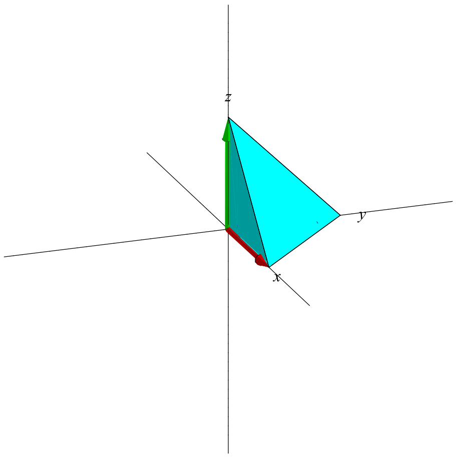
$$\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad . \tag{3.3}$$

Et specielt tetraeder er basis-tetraederet, se figur 3.3:

$$\boxtimes = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad . \tag{3.4}$$

For at være præcis (som for trekanter i planen): Ved et tetraeder vil vi forstå det rumlige område, der er afgrænset af de 4 trekanter, som er udspændt af det valgte trebens toppunkt og de 3 spidspunkter. Læg mærke til, at de tre spidspunkter selv udspænder den ene af de 4 trekanter. Se figurerne 3.4 og 3.3.

For et givet tetraeder er der altså 4 mulige valg af toppunkter til et udspændende treben og for hvert af de 4 valg af toppunkt er der dernæst 6 muligheder for at vælge *rækkefølgen* af de tre kantvektorer, der udgår fra det valgte toppunkt. Det vil sige, at et givet tetraeder kan skrives på formen (3.3) på ialt 24 måder.



Figur 3.3: Basistetraederet i rummet $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

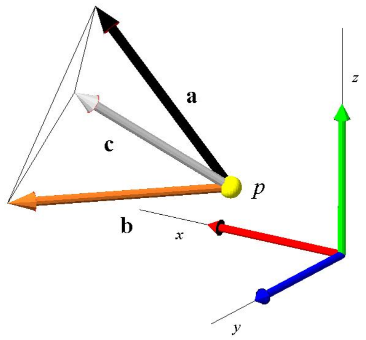
3.2 Arealet af trekanter i rummet

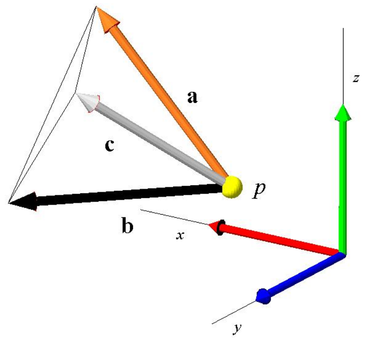
I dette kapitel er vi egentlig mest interesseret i at finde rumfang af tetraedre, se næste afsnit nedenfor. Tetraedre er pyramider og derfor er deres rumfang en tredjedel af grundfladens areal gange højden af pyramiden over den valgte grundflade. Se sætning 3.5, som vi vil bevise nedenfor.

For et helt generelt tetraeder $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ kan vi som grundflade vælge den trekant, der er udspændt af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, altså den trekant, der er givet ved hængslet $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Læg mærke til, at det hængsel og den trekant er fuldstændig veldefineret - selvom der nu er tale om en trekant i rummet som ikke nødvendigvis ligger i $(x, y)-$planen.

For at bestemme det ovennævnte grundfladeareal for tetraederet får vi altså først brug for at bestemme arealet af den trekant der er udspændt af hængslet $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ i *rummet*.

Til den ende vil vi bruge krydsproduktet af de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$:





Figur 3.4: To treben, begge med fodpunkt $p = (0.5, 0.5, 0.5)$ og kantvektorerne $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, og $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$. Trebenet til venstre er $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ og det til højre er $\boxtimes(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$. Farvekoden følger rækkefølgen af de indgående kant-vektorer: Sort for førstnævnte, chokoladefarvet for nummer to, og grå for sidstnævnte kant-vektor.

Definition 3.1 Krydsproduktet af $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ defineres som den vektor der har koordinaterne:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad . \tag{3.5}$$

Krydsproduktet mellem to vektorer **a** og **b** kan udtrykkes som en *determinant* hvis vi udvider determinant-begrebet en anelse således, hvor den første række består af basisvektorerne **i**, **j**, og **k**:

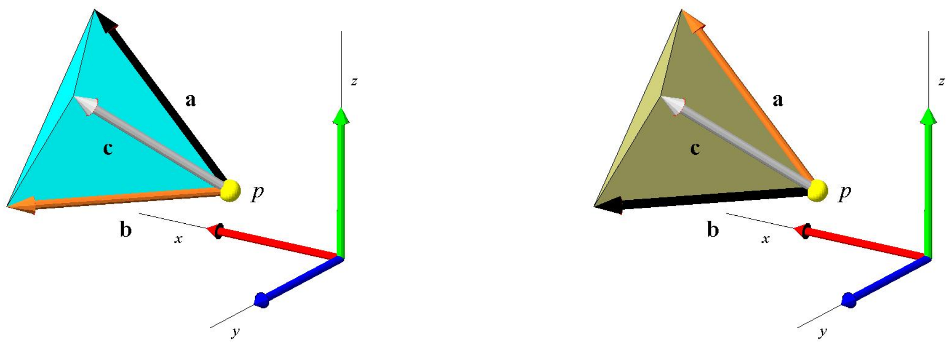
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) \quad . \tag{3.6}$$

Hvis vi nemlig *opløser den determinant* efter første række får vi:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{i} \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{j} \cdot (-(a_1 b_3 - a_3 b_1)) + \mathbf{k} \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \ , \tag{3.7}$$

og det er jo præcis den vektor der har koordinaterne som angivet i definition 3.1.

Vi har dermed vist, at vi kan bestemme krydsproduktet således:



Figur 3.5: Tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ med $p = (0.5, 0.5, 0.5)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, og $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$ som i figur 3.4. Til venstre vises det tilsvarende negativt orienterede tetraeder $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$. Den eneste forskel er farverne, som defineres i afsnit 3.4 nedenfor, og som er defineret ved den rækkefølge som kantvektorerne optræder med i det udpændende treben, jvf. Kapitel 1.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) \quad . \tag{3.8}$$

OPGAVE 3.2

Vis direkte ud fra definitionen i ligning (3.5) eller ved brug af (3.8), at der for vilkårligt givne vektorer **a** og **b** gælder

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står vinkelret på **a**, og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står vinkelret på **b**; altså:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{og} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad . \tag{3.9}$$

2. Ved ombytning af faktorerne skifter krydsproduktet fortegn:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad . \tag{3.10}$$

3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ hvis og kun hvis der enten gælder at mindst en af de to vektorer **a** eller **b** er **0** eller at de to vektorer er proportionale. Det sker netop aldrig i en regulær trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Krydsproduktet giver arealet af en (rumlig) trekant således:

Sætning 3.3 Arealet af en rumlig trekant $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er givet ved:

$$\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad , \tag{3.11}$$

hvor $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ betegner længden af krydsproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Bevis.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\left(1 - \cos^2(\theta)\right) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2(\theta) \\ &= (2\,\text{Areal}(\triangle))^2 \quad , \end{aligned} \tag{3.12}$$

hvor vi igen har benyttet at trekantens areal er grundlinjen $\|\mathbf{a}\|$ gange højden $\|\mathbf{b}\|\sin(\theta)$ (hvor θ er vinklen mellem de to vektorer **a** og **b**).

□

OPGAVE 3.4

Bestem arealet af hver af følgende trekanter i rummet og check resultaterne med Heron's formel:

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\ \triangle_2 &= \triangle((1,0,0), (-1,0,1), (-1,1,0)) \\ \triangle_3 &= \triangle((1,2,3), (4,1,2), (8,2,-4)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O, (4,1,2), (8,2,4)) \\ \triangle_5 &= \triangle((-1,1,0), (-1,0,1), (-1,1,0)) \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3 Rumfang af tetraedre

Som ovenfor nævnt er rumfanget af et tetraeder en tredjedel af grundfladens areal gange højden af tetraederet over den valgte grundflade.

Rumfanget af en hvilken som helst pyramide med grundflade G og højde h kan findes på den måde. En massiv pyramide består af en grundflade, et plant område G, samt af foreningsmængden af de rette linjestykker, der forbinder hver enkelt punkt i G med et givet toppunkt som ikke selv ligger i den plan der indeholder G, se figur 3.6.

Sætning 3.5 Lad $\mathcal{P}$ betegne en pyramide med et plant område G som grundflade og højden h over den grundflade. Så er rumfanget af $\mathcal{P}$

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \mathrm{Areal}(G) \quad . \tag{3.14}$$

Bevis. Hver enkelt horisontalt tværsnit i pyramiden er en skaleret version af grundplanen, se figur 3.6. Skalerings-faktoren går fra 0 i toppen til 1 i grundplanen, og er iøvrigt en lineær funktion af højden over grundplanen. Skaleringsfunktionen er derfor som funktion af højden z over grundplanen:

$$k(z) = 1 - \frac{z}{h} \tag{3.15}$$

Arealet af det horisontale snit i højden z over grundplanen er derfor

$$S(z) = k^2(z) \cdot \mathrm{Areal}(G) = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \cdot \mathrm{Areal}(G) \quad . \tag{3.16}$$

Ifølge snitmetoden til bestemmelse af rumfang af rumlige områder har vi så:

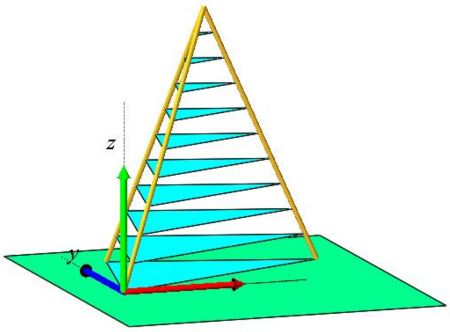
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) &= \int_0^h S(z)\, dz \\
&= \mathrm{Areal}(G) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\
&= \mathrm{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h (h-z)^2\, dz \\
&= \mathrm{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[-(h-z)^3\right]_0^h \\
&= \mathrm{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3 \\
&= \mathrm{Areal}(G) \cdot \frac{1}{3} \cdot h \quad .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

□

Vi er nu klar til at beregne rumfang af vore specielle pyramider, de rumlige *tetraedre*.

Arealet af grundfladen, $G = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ har vi bestemt i (3.11) for tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Højden $h = h(\boxtimes, G)$ kan vi dernæst bestemme som skalarproduktet af den sidste kant-vektor $\mathbf{c}$ med en enhedsvektor, som står vinkelret på grundtrekanten:

Men $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står netop vinkelret på grundtrekanten (fordi krydsproduktet er vinkelret på grundtrekantens kant-vektorer), så den kan vi bruge:



Figur 3.6: En pyramide med antydede horisontale tværsnit.

$$h(\boxtimes, G) = |\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}\cdot\mathbf{c}| = \frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|} \quad . \tag{3.18}$$

således at

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\boxtimes(p,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})) &= \frac{1}{3}\,\mathrm{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b}))\cdot h(\boxtimes, G) \\ &= \frac{1}{3}\,\mathrm{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b}))\cdot\frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\cdot\frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|} \\ &= \frac{1}{6}|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}| \end{aligned} \tag{3.19}$$

hvor vi har benyttet (3.11).

NB: Betegnelsen $|r|$ benyttes for absolutværdien, den numeriske værdi, af det reelle tal r. Betegnelsen $\|\mathbf{a}\|$ benyttes for længden af vektoren $\mathbf{a}$.

Dette udtryk for volumenet af et tetraeder giver anledning til at indføre følgende betegnelse:

Definition 3.6 Rumproduktet $\mathrm{Rum}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ af tre vektorer $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, og $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$ (i den rækkefølge) defineres ved:

$$\mathrm{Rum}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \quad . \tag{3.20}$$

Rumproduktet kan udtrykkes på determinant-form:

Sætning 3.7

$$\begin{aligned}\mathrm{Rum}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left([\mathbf{a}^*\,\mathbf{b}^*\,\mathbf{c}^*]\right) \quad .\end{aligned} \tag{3.21}$$

Bevis. Det følger direkte af udregningen

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1) \quad , \tag{3.22}$$

og ved at bemærke, at determinanten af matricen i (3.21) giver præcis det samme udtryk når determinanten opløses efter sidste søjle. $\square$

Ved at sammenholde dette med (3.19) har vi nu rumfanget af et tetraeder skrevet kort på 'determinant-form' og 'rumprodukt-form':

Sætning 3.8 Rumfanget af tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ kan beregnes således:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\boxtimes(p,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})) &= \frac{1}{6}\left|\det\left([\mathbf{a}^*\,\mathbf{b}^*\,\mathbf{c}^*]\right)\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\mathrm{Rum}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\right| \quad .\end{aligned} \tag{3.23}$$

Bemærk, at rumproduktet skifter fortegn ved ombytning af to af vektorerne. Derfor er der brug for absolut-værdi-tegnene i volumen-udtrykket i sætningen.

Definition 3.9 Et regulært tetraeder er et tetraeder, der har et egentligt rumfang, altså et rumfang, der er skarpt større end 0.

Et tetraeder $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ har rumfang 0, er kollapset, og dermed *singulær*, netop når determinanten i (3.23) er 0, og det forekommmer præcis når een af vektorerne i trebenet kan skrives som en linearkombination af de to andre, f.eks. $\mathbf{a} = 3 \cdot \mathbf{b} + 7 \cdot \mathbf{c}$, sådan at $\mathbf{a} - 3 \cdot \mathbf{b} - 7 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

OPGAVE 3.10

Vis den påstand ved hjælp af din viden om determinanter af matricer:
Hvis der findes konstanter α_1, α_2, og α_3 således at

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_2 \cdot \mathbf{b} + \alpha_3 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad , \tag{3.24}$$

så er

$$\mathrm{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = 0 \quad . \tag{3.25}$$

Gælder det omvendte også? Dvs. hvis rumfanget af $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er 0, findes der så konstanter α_1, α_2, og α_3 sådan at ligningen (3.24) er opfyldt?

3.4 Orientering af tetraeder ved valg af treben

På samme måde som for trekanter i planen har vi nu mulighed for at definere orienteringen af et tetraeder i rummet:

Definition 3.11 Et tetraeder, som er givet ved et treben $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er *positivt orienteret* hvis rumproduktet $\mathrm{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ i (3.21) er positivt; hvis rumproduktet $\mathrm{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er negativt, siges tetraederet at være *negativt orienteret*.

Læg mærke til, at rumproduktet er en determinant som netop skifter fortegn når to af søjlerne ombyttes, hvilket svarer til en ombytning i rækkefølgen af kant-vektorerne i $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

I figurerne 3.5 og 3.3 er orienteringen af de givne tetraedre markeret ved farven på de afgrænsende trekanter: De 4 trekanter, som afgrænser tetraederet er alle cyan-farvede hvis tetraederet er positivt orienteret, og hvis tetraederet er negativt orienteret er de 4 afgrænsende trekanter alle khaki-farvede.

Bemærkning 3.12 Standard-tetraederet $\boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ er *positivt orienteret* fordi

$$\det\left([\mathbf{i}^{*}\,\mathbf{j}^{*}\,\mathbf{k}^{*}]\right) = 1 > 0 \quad . \tag{3.26}$$

Krydsproduktet af to lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i rummet kan vi nu beskrive *geometrisk* på følgende måde: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ er den vektor i rummet, som står vinkelret på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, har en længde som er det dobbelte af arealet af $\triangle(O,\mathbf{a},\mathbf{b})$ og iøvrigt peger i den retning, der gør tetraederet $\boxtimes(O,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ til et positivt orienteret tetraeder.

OPGAVE 3.13

Bestem rumfang, regularitet, og orientering for hver af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned}
\boxtimes_1 &= \boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{k},\mathbf{j}) \\
\boxtimes_2 &= \boxtimes((1,1,1),(-1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)) \\
\boxtimes_3 &= \boxtimes((1,1,4),(-1,1,0),(1,1,1),(0,1,1)) \quad .
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.5 Rumfang versus overfladeareal

Nogle tetraedre er *federe* end andre, sammenlign med afsnit 1.3 i kapitel 1 om trekanterne i planen. Det skal igen her forstås sådan at nogle tetraedre har større rumfang i forhold til deres totale overfladeareal end andre.

Vi har ovenfor beregnet rumfanget af et vilkårligt tetraeder, og da overfladearealet simpelthen er summen af arealerne af de 4 trekanter, der afgrænser tetraederet, kan vi nu beregne forskellige tilfælde.

OPGAVE 3.14

Bestem forholdet $(\mathrm{Vol}\,/\,\mathrm{Areal})$ mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned}
\boxtimes_1 &= \boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) \\
\boxtimes_2 &= \boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},2\mathbf{k}) \\
\boxtimes_3 &= \boxtimes(O,2\mathbf{i},\mathbf{j},2\mathbf{k}) \\
\boxtimes_4 &= \boxtimes(O,2\mathbf{i},2\mathbf{j},2\mathbf{k}) \\
\boxtimes_5 &= \boxtimes(O,(\cos(\pi/6),\sin(\pi/6),0),(\cos(\pi/6),-\sin(\pi/6),0),(0,0,1)) \quad .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

OPGAVE 3.15

Bestem forholdet $(\mathrm{Vol}\,/\,\mathrm{Areal})$ mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre, hvor u er en positiv reel variabel, således at Vol / Areal derved bliver en funktion af $u \geq 0$:

$$\boxtimes_u = \boxtimes((0,0,0), \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}(u)) \quad , \tag{3.29}$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{b} &= (\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{c}(u) &= (\frac{2}{3} \cdot \cos(\pi/6), 0, u) \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Bestem (om muligt) den værdi af u for hvilken Vol / Areal er størst mulig.

OPGAVE 3.16

Vi ser på en familie af tetraedre, som er defineret ved hjælp af *to* parametre α og u således:

$$\boxtimes_{\alpha,u} = \boxtimes((0,0,0), \mathbf{a}(\alpha), \mathbf{b}(\alpha), \mathbf{c}(\alpha,u)) \quad , \tag{3.31}$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\alpha) &= (\alpha \cdot \cos(\pi/6), \alpha \cdot \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{b}(\alpha) &= (\alpha \cdot \cos(\pi/6), -\alpha \cdot \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{c}(\alpha,u) &= (\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \cos(\pi/6), 0, u) \quad . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Antag, at det totale overfladeareal af $\boxtimes_{\alpha,u}$ er fast og er givet ved

$$\mathrm{Areal}(\boxtimes_{\alpha,u}) = 1 \quad . \tag{3.33}$$

Bestem – under den betingelse – de to parameterværdier α og u således at rumfanget af $\boxtimes_{\alpha,u}$ er størst muligt.

OPGAVE 3.17

Bestem mængden af alle de rumlige tetraedre, der har følgende egenskab: Der findes en vinkelret projektion af tetraederet på en given plan (vælg blot (x,y)-planen), således at tetraederets 6 kanter projiceres i en figur, der (pånær størrelse) ser præcis således ud: $\boxtimes$.

Kapitel 4

3D Matrix-operationer

Matrixdeformationer af tetraedre og af rumlige trekanter foregår på helt samme måde som vi har set det for trekanter i planen. Vi antager, at vi har givet en vilkårlig matrix $\mathbf{K}$, som nu er en $3 \times 3-$matrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.1}$$

Denne matrix 'virker' på en rumlig vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og giver en billedvektor $\widetilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3)$ på sædvanlig måde ved at danne matrixproduktet med $\mathbf{a}$-vektorens koordinatsøjlematrix $\mathbf{a}^*$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.2}$$

eller på kompakt form:

$$\widetilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{K}\,\mathbf{a}^* \quad . \tag{4.3}$$

Rumlige trekanter deformeres tilsvarende med $\mathbf{K}$ ved at lade $\mathbf{K}$ virke på begge kantvektorerne i et af de hængsler, der repræsenterer trekanten, $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.4}$$

eller på kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}^* & \widetilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \quad . \tag{4.5}$$

Den deformerede trekant er altså givet ved hængslet $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, og vi vil igen, når det ikke kan misforstås, skrive

$$\widetilde{\triangle} = \triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K}\,\triangle\,(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \tag{4.6}$$

Tetraedre deformeres selvsagt tilsvarende ved at lade $\mathbf{K}$ virke på de tre kantvektorer i et repræsenterende treben $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.7}$$

På kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}^* & \widetilde{\mathbf{b}}^* & \widetilde{\mathbf{c}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix} \quad . \tag{4.8}$$

Det deformerede tetraeder er givet ved trebenet $\boxtimes(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}, \widetilde{\mathbf{c}})$, og vi skriver

$$\widetilde{\boxtimes} = \boxtimes(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}, \widetilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{K} \boxtimes (p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad . \tag{4.9}$$

Figur 4.1: Tetraeder og et udspændende treben.

4.1 Geometrisk tolkning af 3D matrix-operationer

Et oplagt resultat, som vi direkte aflæser fra (4.8) eller (4.7) er, at rumfanget af et deformeret tetraeder er lig med den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der bruges til deformationen, ganget med rumfanget af det gamle tetraeder.

Det afgørende er, at rumfanget af et tetraeder jo essentielt netop er (pånær faktoren $1/6$) determinanten af den matrix hvis søjler er de tre kantvektorers koordinatsøjlematricer.

Sætning 4.1

$$\mathrm{Vol}(\boxtimes(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}, \widetilde{\mathbf{c}})) = |\det(\mathbf{K})| \cdot \mathrm{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) \quad . \tag{4.10}$$

Dette generaliserer altså direkte den tilsvarende sætning om arealet af plane trekanter, se sætning 2.5.

Bevis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\boxtimes(p,\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}},\widetilde{\mathbf{c}})) &= \frac{1}{6}\cdot|\det\left(\left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{a}}^* & \widetilde{\mathbf{b}}^* & \widetilde{\mathbf{c}}^* \end{array}\right]\right)| \\
&= \frac{1}{6}\cdot|\det\left(\mathbf{K}\cdot\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{array}\right]\right)| \\
&= \frac{1}{6}\cdot|\det(\mathbf{K})|\cdot|\det\left(\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{array}\right]\right)| \\
&= |\det(\mathbf{K})|\cdot\frac{1}{6}\cdot|\det\left(\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{array}\right]\right)| \\
&= |\det(\mathbf{K})|\cdot\mathrm{Vol}(\boxtimes(p,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})) \quad .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

□

4.1.1 Hele tetraederet deformeres

Som vi allerede har noteret ovenfor med notationen $\widetilde{\boxtimes} = \mathbf{K}\boxtimes(p,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, så følger hele tetraederet med ved deformationen af det udspændende treben. Strengt taget bør vi overveje dette på samme måde som vi gjorde for plane trekanter, men argumentet er præcis det samme, og handler om at bruge lineariteten af den afbildning, der svarer til at lade $\mathbf{K}$ virke på de vektorer, der har fodpunkt i p og spidspunkter inde i tetraederet.

OPGAVE 4.2

Gennemfør det argument, der viser, at hvis $\mathbf{K}$ afbilder kantvektorer i kantvektorer, så afbildes hele det rumlige udspændte tetraeder også på det rumlige udspændte tetraeder.

4.1.2 Skaleringer i akseretningerne

De egentligt deformerende matricer er klart dem, der strækker og trækker eller skubber og komprimerer tetraederne. Ligesom i kapitel 2 er ideen her at isolere disse matricer som skaleringsmatricer der udelukkende virker i akseretningerne. Det vil vi gøre ved hjælp af en SVD dekomposition af en given matrix, sådan at 'resten' af faktorerne 'kun' roterer (eller flipper) tetraederne i rummet.

Med andre ord: Vi får brug for følgende specielle deformationsmatricer (bemærk, at de naturligvis nu er $3 \times 3-$matricer):

$$\mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{S}_z(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad .$$

En samtidig skalering i alle akseretningerne med skaleringskonstanterne σ_1, σ_2, og σ_3 fås naturligvis med matricen

$$\mathbf{S}_{xyz}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mathbf{S}_z(\sigma_3) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) \cdot \mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.13}$$

OPGAVE 4.3

Vis, at matrix-faktorernes orden er ligegyldig i ligning (4.13).

4.1.3 Flip

Med henblik på at kunne præcisere at en given $\mathbf{K}-$matrix skifter orientering på et givet tetraeder, vil vi igen bruge en flip-matrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.14}$$

Bemærk specielt, at ligesom $2 \times 2-$flipmatricen har også denne 3×3 version determinanten -1, samt at vi stadig har følgende egenskaber, der viser, at også (3×3)-matricen $\mathbf{F}$ er sin egen inverse matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^2 &= \mathbf{E} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{F} \quad . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Flip-matricen afbilder en vektor $\mathbf{a}$ med koordinaterne (a_1, a_2, a_3) på den vektor, der har koordinaterne (a_2, a_1, a_3). Det svarer til en spejling i den *plan*, der har ligningen $y = x$.

OPGAVE 4.4

Diskutér igen (som for 2×2-flipmatricen) rimeligheden af betegnelsen *flipmatrix*. Find andre alternative muligheder for valg af simple 3×3-flip-matricer, der udelukkende har til formål at skifte orientering på et givet tetraeder, og intet andet.

4.1.4 Rotationer i 3D rummet

Rotationer i rummet er generelt mere komplicerede end rotationerne i planen.

Vanskeligheden ligger ikke i definitionen af rotationsmatricer – definitionen følger den opskrift, som vi allerede kender og har brugt for 2×2 rotationsmatricer:

Definition 4.5 En $3 \times 3-$rotationsmatrix $\mathbf{R}$ er en matrix, der opfylder de to egenskaber:

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \tag{4.16}$$

og

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^* \quad \text{som er ækvivalent med } \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} = \mathbf{E} \quad , \tag{4.17}$$

hvor $\mathbf{E}$ betegner enhedsmatricen af type 3×3.

Problemet er, at der er mange flere af dem – de er ikke bestemt ved én rotationsvinkel, men ved tre rotationsvinkler som vi skal se nedenfor.

Bemærk specielt, at ligningerne (4.17) betyder, at søjlevektorerne i $\mathbf{R}$ er parvis ortogonale og har længde 1. Se opgave 4.25.

Nogle rotationer er særligt simple - det er akserotationerne. De er repræsenterede ved følgende matricer, og drejer de angivne vinkler, nemlig henholdsvis u, v og w, om de angivne akser, henholdsvis $x-$aksen, $y-$aksen, og $z-$aksen.

$$
\mathbf{R}_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_y(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & -\sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix} \tag{4.18}
$$

$$
\mathbf{R}_z(w) = \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .
$$

OPGAVE 4.6

Vis ved direkte udregninger, at de tre akserotationsmatricer virkelig *er* rotationsmatricer som defineret i definition 4.5. Vis også, der gælder følgende identiteter for de tilhørende inverse akse-rotationsmatricer:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_x^{-1}(u) &= \mathbf{R}_x^{*}(u) = \mathbf{R}_x(-u) \\
\mathbf{R}_y^{-1}(v) &= \mathbf{R}_y^{*}(v) = \mathbf{R}_x(-v) \\
\mathbf{R}_z^{-1}(w) &= \mathbf{R}_z^{*}(w) = \mathbf{R}_x(-w) \quad .
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

OPGAVE 4.7

Find billedvektorerne ved brug af de angivne rotationsmatricer $\mathbf{K}_i$ på hver af de angivne vektorer **a**, **b**, og **c**:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{K}_2 = \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,1,1),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{K}_3 = \mathbf{R}_z(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,1,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{K}_4 = \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1) \\
&\mathbf{K}_5 = \mathbf{R}_x(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0),\ \mathbf{c} = (0,0,1)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Sammensætning af rotationer om koordinatakserne med givne drejningsvinkler u, v, og w om henholdsvis $x-$aksen, $y-$aksen, og $z-$aksen fås ved at finde matrixproduktet af de tre tilsvarende rotationsmatricer.

Her er det helt generelle udtryk for det matrixprodukt for alle værdier af u, v og w:

$$\mathbf{R}_{xyz}(u,v,w) = \mathbf{R}_z(w)\cdot\mathbf{R}_y(v)\cdot\mathbf{R}_x(u)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(w)\cos(v) & -\sin(w)\cos(u)-\cos(w)\sin(v)\sin(u) & \sin(w)\sin(u)-\cos(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(w)\cos(v) & \cos(w)\cos(u)-\sin(w)\sin(v)\sin(u) & -\cos(w)\sin(u)-\sin(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(v) & \cos(v)\sin(u) & \cos(v)\cos(u) \end{bmatrix} .$$

Der gælder nu følgende behagelige sætning, som siger, at selv om der er mange rotationsmatricer, så kan hver enkelt af dem skrives om et produkt af akserotationsmatricer:

Sætning 4.8 Enhver rotationsmatrix $\mathbf{R}$ kan skrives på formen $\mathbf{R}(u,v,w)$, dvs. virkningen af enhver rotationsmatrix kan repræsenteres ved tre på hinanden følgende rotationer om koordinatakserne. Med andre ord: For enhver given rotationsmatrix $\mathbf{R}$ findes der vinkelværdier u, v, og w således at

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz}(u,v,w) = \mathbf{R}_z(w)\cdot\mathbf{R}_y(v)\cdot\mathbf{R}_x(u) \quad . \tag{4.21}$$

Når $\mathbf{R}$ er givet (med sine matrix-elementer r_{ij}), er det heller ikke svært at finde disse akserotations-vinkler. Som det fremgår af matrixproduktet ovenfor er f.eks. $\sin(v) = r_{31}$ sådan at $v = \arcsin(r_{31})$ eller $v = \pi - \arcsin(r_{31})$, og $\cos(w)\cos(v) = r_{11}$ sådan at $w = \pm\arccos(r_{11}/\cos(v))$ når blot $\cos(v) \neq 0$ dvs. når blot $v \neq \pm\pi/2$.

OPGAVE 4.9

Vis, at hvis $v = \pi/2$ eller $v = -\pi/2$, så er der mange værdier af u og w som giver den *samme* $\mathbf{R}(u,v,w)$. Det vil sige, at vinkelværdierne ikke i alle tilfælde er entydigt bestemte i intervallet $]-\pi,\pi]$ for enhver givet rotationsmatrix $\mathbf{R}$.

OPGAVE 4.10

Vis, at hvis $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix, så er $\mathbf{R}^*$ også en rotationsmatrix, og omvendt, hvis $\mathbf{R}^*$ er en rotationsmatrix, så er $\mathbf{R}$ også en rotationsmatrix.

OPGAVE 4.11

Vis, at hvis $\mathbf{R}_1$ og $\mathbf{R}_2$ er rotationsmatricer, så er $\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2$ og $\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_1$ også rotationsmatricer. Giv eksempler på, at $\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2$ ikke nødvendigvis er den samme rotationsmatrix som $\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_1$.

OPGAVE 4.12

Opgaven, eksemplet, her går ud på at vise, at alle rotationsmatricer *bevarer skalar-produkter* og dermed også længder og vinkler. Lad $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være to vektorer i rummet, f.eks. kantvektorer i en trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ og lad $\mathbf{R}$ betegne en vilkårlig rotations-matrix.

Vi bruger $\mathbf{R}$ som deformationsmatrix på $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ og får derved den nye 'deformerede' trekant: $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, hvor

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{a}}^* &= \mathbf{R}\,\mathbf{a}^* \\ \widetilde{\mathbf{b}}^* &= \mathbf{R}\,\mathbf{b}^* \quad , \end{aligned} \tag{4.22}$$

og vil vise, at skalarprodukterne $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og $\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}}$ har samme værdi:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}} \quad . \tag{4.23}$$

Ligningen (4.22) kan 'skrives ud' på følgende måde:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Hvis vi transponerer på begge sider af lighedstegnene får vi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \widetilde{a}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^* \\ \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{b}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^* \quad , \end{aligned} \tag{4.25}$$

Vis nu først, at skalarprodukterne $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og $\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}}$ kan skrives som matrix-produkter:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \widetilde{a}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{4.26}$$

og benyt dette sammen med ovenstående og rotationsmatricens egenskaber til at indse:

$$\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad . \tag{4.27}$$

Så gælder specielt også

$$\|\widetilde{\mathbf{a}}\|^2 = \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \tag{4.28}$$

og derfor ligeledes

$$\begin{aligned} \cos(\measuredangle(\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})) &= \frac{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}}}{\|\widetilde{\mathbf{a}}\| \cdot \|\widetilde{\mathbf{b}}\|} \\ &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \cos(\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad , \end{aligned} \tag{4.29}$$

således at både længder og vinkler bevares ved 'deformation' med en rotationsmatrix.

4.2 Hovedsætningen for 3D (deformations-)matricer

Ligesom for $2 \times 2-$matricer gælder der for $3 \times 3-$matricer, at de kan dekomponeres i et produkt af 4 standard deformationsmatricer:

Sætning 4.13 Enhver regulær $3 \times 3-$(deformations-)matrix $\mathbf{K}$ kan skrives som et produkt af 4 matricer således:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{4.30}$$

hvor $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ er $3 \times 3-$rotationsmatricer, $\boldsymbol{\Sigma}$ er en entydigt bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer, altså en akseskaleringsmatrix:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0 \quad , \tag{4.31}$$

og $\widehat{\mathbf{F}}$ er flip-matricen (hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$) eller enhedsmatricen (hvis $\det(\mathbf{K}) > 0$):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvis} \quad \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \\ \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvis} \quad \det(\mathbf{K}) > 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Da både $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, og $\mathbf{V}^*$ er rotationsmatricer, kan de selv dekomponeres/faktoriseres i 3 basisrotationer om koordinatakserne. Specielt for de tre rotationsmatricer $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, og $\mathbf{V}^*$ har vi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \mathbf{R}_z(w_U)\cdot\mathbf{R}_y(v_U)\cdot\mathbf{R}_x(u_U) = \mathbf{R}_{xyz}(u_U, v_U, w_U) \\
\mathbf{V} &= \mathbf{R}_z(w_V)\cdot\mathbf{R}_y(v_V)\cdot\mathbf{R}_x(u_V) = \mathbf{R}_{xyz}(u_V, v_V, w_V) \\
\mathbf{V}^* &= \mathbf{R}_z(w_{V^*})\cdot\mathbf{R}_y(v_{V^*})\cdot\mathbf{R}_x(u_{V^*}) = \mathbf{R}_{xyz}(u_{V^*}, v_{V^*}, w_{V^*}) \\
&= \mathbf{R}_z(-w_V)\cdot\mathbf{R}_y(-v_V)\cdot\mathbf{R}_x(-u_V) = \mathbf{R}_{xyz}(-u_V, -v_V, -w_V)
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

for passende værdier af drejningsvinkler u_U, v_U, w_U og $u_{V^*} = -u_V$, $v_{V^*} = -v_V$, $w_{V^*} = -w_V$.

Det er dog især deformationsfaktoren $\mathbf{\Sigma}$ vi er interesserede i, fordi det er skaleringerne i akse-retningerne, der egentlig deformerer *geometrien* af de objekter vi 'bruger' matricen $\mathbf{K}$ på, se opgaverne nedenfor.

|||| Metode 4.14

Metoden til at bestemme faktorerne i dekompositionen, SVD af $3\times 3-$matricer, er præcis den samme som for 2×2-matricer, nu blot generaliseret til 3D:

1. Hvis $\det(\mathbf{K}) > 0$ sådan at $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ så er proceduren følgende:

   (a) $\mathbf{\Sigma}$ fås ud fra egenværdierne for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$. De egenværdier er igen altid positive - vi kalder dem σ_1^2, σ_2^2 og σ_3^2 og nummererer dem i størrelse, sådan at $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2$. De respektive positive *kvadratrødder af disse egenværdier* for $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$ er så $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

   (b) Søjlerne i $\mathbf{V}$ er ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ svarende til egenværdierne σ_1^2, σ_1^2, og σ_3^2 for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$. Egenvektorerne skal vælges sådan at $\mathbf{V}$ har positiv determinant (det er igen altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på én af egenvektorerne):

   $$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* & \mathbf{v}_2^* & \mathbf{v}_3^* \end{bmatrix} \quad . \tag{4.34}$$

   Matricen $\mathbf{V}^*$ (til dekomponeringen) fås ved at transponere den fundne $\mathbf{V}$.

   (c) Søjlerne i $\mathbf{U}$ er de koordinat-søjlevektorer $\mathbf{u}_1^*$, $\mathbf{u}_2^*$ og $\mathbf{u}_3^*$, som fås direkte ved at udregne

   $$
   \begin{aligned}
   \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* \\
   \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{K}\mathbf{v}_2^* \\
   \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{\sigma_3}\mathbf{K}\mathbf{v}_3^*
   \end{aligned}
   \tag{4.35}
   $$

   og indsætte dem som søjler i $\mathbf{U}$:

   $$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_2^* & \mathbf{u}_3^* \end{bmatrix} \quad . \tag{4.36}$$

2. Hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$ sådan at $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$, så er proceduren følgende:

   (a) Sæt $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$. Så er $\det(\widetilde{\mathbf{K}}) > 0$ og vi kan dekomponere $\widetilde{\mathbf{K}}$ ved at indsætte $\widetilde{\mathbf{K}}$ på $\mathbf{K}$'s plads i de tre punkter (a), (b), og (c) ovenfor i 1. procedure for 3×3-matricer med positiv determinant. Vi kan notere resultatet, den resulterende dekomponering, på følgende måde:

   $$\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \tag{4.37}$$

   (b) Så kan $\mathbf{K}$ selv direkte skrives på dekomponeret form således:

   $$\mathbf{K} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \tag{4.38}$$

OPGAVE 4.15

Med hensyn til metodens punkt $1b)$ vedrørende skift af fortegn på en egenvektor $\mathbf{v}$ med henblik på at opnå en positiv determinant af $\mathbf{V}$: Vis helt generelt, at hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor med tilhørende egenværdi λ, så er $-\mathbf{v}$ også en egenvektor med den *samme* tilhørende egenværdi λ.

Vi vil først se på et forholdsvist simpelt eksempel på en total faktorisering af en konkret 3×3-matrix $\mathbf{K}$.

Eksempel 4.16

Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.39}$$

og vil finde faktoriseringsmatricer $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{V}^*$, og $\widehat{\mathbf{F}}$ for $\mathbf{K}$:

Determinanten af $\mathbf{K}$ er $\det(\mathbf{K}) = 6 > 0$, så $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} =$ enhedsmatricen af type 3×3. Vi har også

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Denne matrix har egenværdierne 9, 4, og 1, så de tilsvarende σ_i værdier er $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, og $\sigma_3 = 1$, altså:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.41}$$

Matricen $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ har følgende ortogonale enheds-egenvektorer svarende til egenværdierne 9, 4, og 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \left(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2\right) \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= \left(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.42}$$

OPGAVE 4.17

Eftervis direkte, at de påstande er rigtige, altså at $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ har de påståede egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$; at de er parvis ortogonale; at de alle tre har længden 1; at de tilhørende egenværdier er de nævnte; og at $\mathbf{V} = [v_1^* \, v_2^* \, v_3^*]$ har $\det(\mathbf{V}) = 1$.

Vi har derfor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.43}$$

og dermed den transponerede matrix:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.44}$$

Vi mangler så kun at bestemme $\mathbf{U}$.

I henhold til forskriften får vi søjlerne i rotationsmatricen $\mathbf{U}$ ved

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.45}$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.46}$$

OPGAVE 4.18

Check ved direkte udregninger, at der i ovenstående eksempel 4.16 gælder

1. De fundne faktorer giver den oprindelige matrix, som påstået, altså: $\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}}$.
2. De tre matricer $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, og $\mathbf{V}^*$ har ortogonale enhedsvektorer som søjler og alle tre matricer har determinant 1. Med andre ord: De er rotationsmatricer. Se opgave 4.25.
3. Matricen $\mathbf{U}$ kan skrives som et produkt af 3 akserotationer:
$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_z(\pi/3) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)) \quad . \tag{4.47}$$
4. Matricen $\mathbf{V}$ kan også skrives som et produkt af 3 akserotationer:
$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_z(0) \cdot \mathbf{R}_y(-\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, -\frac{\pi}{4}, 0\right)) \quad . \tag{4.48}$$
5. Matricen $\mathbf{V}^*$ kan derfor ligeledes skrives som et produkt af 3 akserotationer:
$$\mathbf{V}^* = \mathbf{R}_z(0) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)) \quad . \tag{4.49}$$

OPGAVE 4.19

Dekomponér følgende matricer som i eksempel 4.16, idet der også gøres prøve til sidst for at checke, at de 4 faktorer i dekompositionen virkelig giver den ønskede matrix når de ganges sammen i den rigtige rækkefølge.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_7 &= 1000 \cdot \mathbf{K}_5 \\
\mathbf{K}_8 &= \frac{1}{1000} \cdot \mathbf{K}_5 \quad .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

4.3 Konstruktion af tetraedre, energi

Fra kapitel 2 kender vi fabrikkerne M_P og M_Q, der kan producere trekanter ud fra basistrekanter til en pris der fastsættes direkte ud fra σ_i værdierne i dekompositionen af den tilhørende deformationsmatrix.

Fabrikken M_P producerer også tetraedre - ved at deformere basistetraedre. Og prisen er - ikke overraskende - bestemt ved:

Definition 4.20 Prisen for at få et basisteraeder deformeret til et tetraeder $\widetilde{\boxtimes} = \mathbf{K} \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (med samme fodpunkt O) er:

$$P(\mathbf{K}) = (1-\sigma_1)^2 + (1-\sigma_2)^2 + (1-\sigma_3)^2 \quad , \tag{4.51}$$

hvor σ_i er diagonalelementerne i faktoren $\mathbf{\Sigma}$ for $\mathbf{K}$, altså kvadratrødderne af egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

OPGAVE 4.21

Bestem deformations-prisen på fabrikken M_P for hver af følgende tetraedre:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boxtimes}_1 &= \boxtimes(O,(3,0,0),(0,2,0),(0,0,1)) \\
\widetilde{\boxtimes}_2 &= \boxtimes(O,(2,0,0),(0,1,0),(0,0,3)) \\
\widetilde{\boxtimes}_3 &= \boxtimes(O,(\sqrt{2},0,\sqrt{2}),(0,2,0),(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})) \\
\widetilde{\boxtimes}_4 &= \boxtimes(O,(1,\sqrt{3},6),(-4\sqrt{3},4,0),(-3,-3\sqrt{3},-2)) \\
\widetilde{\boxtimes}_5 &= \boxtimes(O,(1,2,1),(1,1,0),(2,-1,-2)) \\
\widetilde{\boxtimes}_6 &= \boxtimes(O,(1,1,1),(-1,3,2),(-1,2,1)) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

OPGAVE 4.22

Formulér selv en opgave, der svarer til en 3D versionering af opgave 2.22 i kapitel 2, og løs den. Vink: Benyt et polyeder i rummet, hvor alle sideflader er lige store ligesidede trekanter.

OPGAVE 4.23

Formulér selv en opgave, der svarer til en 3D versionering af opgave 2.27 i kapitel 2, og løs den.

OPGAVE 4.24

Lad $\mathbf{K}$ være en regulær 3×3-matrix og sæt $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$. Vis, at $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ har de samme egenværdier som $\widetilde{\mathbf{K}}^* \cdot \widetilde{\mathbf{K}}$, således at de to matricer $\widetilde{\mathbf{K}}$ og $\mathbf{K}$ ligeledes har den samme $\mathbf{\Sigma}$-matrix.

OPGAVE 4.25

Lad $\mathbf{R}$ være en vilkårlig (3×3)-rotationsmatrix. Vis, at søjlevektorerne i $\mathbf{R}$ er parvis ortogonale og at de alle tre har længden 1. Vink: Benyt ligning (4.17) direkte. Vis også omvendt, at hvis søjlevektorerne i en matrix $\mathbf{A}$ er parvis ortogonale og hvis alle tre har længden 1, samt hvis determinanten af $\mathbf{A}$ er 1, så er $\mathbf{A}$ en rotationsmatrix.

4.4 Den generelle SVD hovedsætning for $(m \times n)$-matricer

Vi præsenterer i de følgende afsnit SVD (Singular Value Decomposition)-sætningen for helt generelle matricer $\mathbf{K}$ med m rækker og n søjler. Groft sagt siger resultatet at enhver matrix $\mathbf{K}$ kan 'diagonaliseres'. Lidt mere præcist gælder, at enhver matrix $\mathbf{K}$ kan skrives som et produkt af to ortogonale matricer og en 'diagonalmatrix' – se eksempel 4.32 nedenfor. En geometrisk konsekvens er at enhver lineær afbildning fra $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}^m$ kan opnås ved sammensætning dels af rotationer om koordinatakserne og dels af skaleringer i akse-retningerne som vi allerede har set eksempler på i plan og rum.

Vi skal her bruge de helt generelle $(n \times n)$-rotationsmatricer. De defineres nedenfor, men definitionen er allerede velkendt for $n = 2$ og $n = 3$ fra rotationerne i plan og rum.

4.5 Den generelle SVD delt i to

Vi deler den generelle SVD sætning i to dele.

Den ene del, sætning 4.29 handler kun om dekomposition af kvadratformede regulære matricer.

Den anden del, sætning 4.30 handler om dekomposition af alle de andre matricer, dvs. matricer, der enten ikke er kvadratformede eller ikke har maksimal rang.

I begge sætninger optræder som nævnt rotationsmatricer af forskellige størrelser. Vi repeterer:

Definition 4.26 En matrix $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix hvis den opfylder de to betingelser:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{E} \\ \det(\mathbf{R}) &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{4.53}$$

Dvs. $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix hvis søjlerne i $\mathbf{R}$ er parvis ortogonale enheds-vektorer og determinanten er 1.

OPGAVE 4.27

Vis direkte ud fra definitionen 4.26 at hvis $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix, så er $\mathbf{R}^*$ også en rotationsmatrix.

I den første sætning optræder ligeledes den velkendte flipmatrix $\mathbf{F}$, men nu i $(p \times p)$-udgave:

Definition 4.28 Flip-matricen af type $(p \times p)$ er den matrix $\mathbf{F}$ der fremkommer fra $(p \times p)$-enhedsmatricen $\mathbf{E}$ ved at bytte om på de to første søjler i $\mathbf{E}$.

Med andre ord: Når $\mathbf{F}$ ganges på en vilkårlig $(q \times p)$-matrix $\mathbf{K}$ fra højre, så er resultatet, at de to første søjler i $\mathbf{K}$ bytter plads. Når $\mathbf{F}$ ganges på en vilkårlig $(p \times q)$-matrix $\mathbf{K}$ fra venstre, så er resultatet, at de to første rækker i $\mathbf{K}$ bytter plads.

4.5.1 SVD for regulære kvadratformede matricer

Vi formulerer her først SVD dekompositionen for de regulære matricer (med $m = n$):

Sætning 4.29 Lad $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{n,n}$ betegne en kvadratformet matrix med $\det(\mathbf{K}) \neq 0$.

Så findes der en rotationsmatrix $\mathbf{U}$, en rotationsmatrix $\mathbf{V}$, samt en diagonal-matrix $\mathbf{\Sigma}$ sådan at:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{4.54}$$

hvor

$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{hvis } \det(\mathbf{K}) > 0 \quad ; \\ \mathbf{F} & \text{hvis } \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \end{cases} \tag{4.55}$$

og hvor

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

med ordnet diagonal:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0 \quad . \tag{4.57}$$

De n kvadrattal σ_i^2, $i = 1, \cdots, n$, er egenværdierne for matricen $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

De n positive diagonalelementer σ_i, $i = 1, \cdots, n$, dvs. de positive kvadratrødder af egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ kaldes de singulære værdier for $\mathbf{K}$:

Søjlerne i $\mathbf{V}$ er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende n egenværdier σ_i^2, $i = 1, \cdots, n$ og valgt (evt. ved skift af fortegn) således at $\det(\mathbf{V}) = 1$.

Rotations-matricen $\mathbf{V}$ diagonaliserer altså $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

De n egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ kaldes de højre-singulære vektorer for $\mathbf{K}$.

Den ortogonale matrix $\mathbf{U}$ bestemmes dernæst direkte således:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{-1} \quad . \tag{4.58}$$

Matricen $\mathbf{U}$ diagonaliserer $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$.

De n søjlevektorer $\mathbf{u}_j$, $j = 1, \cdots, n$, i $\mathbf{U}$ kaldes de venstre-singulære vektorer for $\mathbf{K}$.

Ovenstående sætning 4.29 bevises til sidst i dette kapitel, i afsnit 4.7. Metoden til den konkrete anvendelse af sætningen har vi allerede set tidligere med eksempler der illustrerer dekompositionen af regulære (2×2)- og (3×3)-matricer.

4.5.2 SVD for alle de andre matricer

Den generelle SVD sætning for alle andre matricer, end dem der behandles i ovenstående sætning 4.29, er lidt mere kringlet og kræver lidt mere 'lagerforvaltning', men essensen er den samme: Vi får dekomponeret en given matrix i et produkt af tre standard matricer: to rotationsmatricer og en akse-skaleringsmatrix – her *uden brug af flipmatricer*:

Sætning 4.30

Lad $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{m,n}$ betegne en matrix med m rækker og n søjler og rang $\rho > 0$.

Antag, at $m \neq n$ eller $\rho < \min\{m, n\}$. Dvs. enten er matricen ikke kvadratformet eller rangen ikke maksimal.

Så findes der en rotationsmatrix $\mathbf{U}$ af type $m \times m$, en rotationsmatrix $\mathbf{V}$ af type $n \times n$ samt en matrix $\mathbf{\Sigma}$ af type $m \times n$ sådan at

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad . \tag{4.59}$$

Hvis $m \leq n$ er

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{m,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.60}$$

og hvis $m \geq n$ fås

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{m,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.61}$$

hvor 'diagonalelementerne' er i ordnet rækkefølge:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0 \quad , \quad q = \min\{m,n\} \quad . \tag{4.62}$$

De q kvadrattal σ_i^2, $i = 1, \cdots, q$, er de første q egenværdier (fra de ialt m ordnede egenværdier) for $(m \times m)$-matricen $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

De q positive 'diagonal'-elementer σ_i, $i = 1, \cdots, q$, dvs. de positive kvadratrødder af egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ kaldes de singulære værdier for $\mathbf{K}$.

Matricen $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ (som er af type $n \times n$) og matricen $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ (af type $m \times m$) er begge symmetriske og har de samme ρ positive egenværdier σ_i^2, $i = 1, \cdots, \rho$. De resterende $n - \rho$ henholdsvis $m - \rho$ egenværdier er alle 0.

Søjlerne i $\mathbf{V}$ er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende n egenværdier σ_i^2, $i = 1, \cdots, n$, og igen valgt sådan at $\det(\mathbf{V}) = 1$.

Rotations-matricen $\mathbf{V}$ diagonaliserer altså $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

De n egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ kaldes de højre-singulære vektorer for $\mathbf{K}$.

Søjlerne i $\mathbf{U}$ er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer $\mathbf{u}_j$, $i = j, \cdots, m$, for $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$, igen arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende m egenværdier σ_j^2, $j = 1, \cdots, m$.

Rotations-matricen $\mathbf{U}$ diagonaliserer altså $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$.

De m egenvektorer $\mathbf{u}_j$, $j = 1, \cdots, m$, for $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ kaldes de venstre-singulære vektorer for $\mathbf{K}$.

Alle ingredienserne til den konkrete dekomposition af $\mathbf{K}$ er allerede nævnt i sætningerne – pånær i sætning 4.30 afgørelsen af, hvordan $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ kan organiseres sådan at de bliver til de 'korrekte' rotationsmatricer der kan bruges i dekompositionen helt uden brug af flipmatricen $\mathbf{F}$. Det vil vi se nærmere på nu i metode 4.31 nedenfor. Straks efter denne metode for implementering af sætning 4.30 vil vi se på helt konkrete anvendelser af sætningen og metoden på eksempler med generelle matricer af den slags som sætning 4.30 omhandler.

Metode 4.31 Vi kan antage, at $m \leq n$ fordi ellers (hvis $m > n$) dekomponerer vi blot $\mathbf{K}^*$ og får så dekompositionen for $\mathbf{K}$ ved bagefter at transponere tilbage igen.

Vi benytter os af, at der er ρ positive egenværdier σ_i^2, $i = 1, \cdots, \rho$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$, sådan at vi kan bestemme ρ parvis ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, \rho$ for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

Vi benytter vektorerne $\mathbf{v}_i$ til at konstruere ialt ρ parvis ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \cdots, \rho$,for $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$:

$$\mathbf{u}_i = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \mathbf{K}\mathbf{v}_i^* \quad , \quad i = 1, \cdots, \rho \quad . \tag{4.63}$$

Dernæst finder vi $m - \rho$ parvis ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{u}_j$, $j = 1, \cdots, m - \rho$, hørende til egenværdien 0 for $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$.

Hvis $\rho < m$ ændres eventuelt fortegn på en af de sidstnævnte egenvektorer, således at $\mathbf{U}$ får determinanten $+1$. Hvis $\rho = m$ ændres eventuelt fortegn på en af de ovenfor (i ligning (4.63)) anvendte egenvektorer $\mathbf{v}_i$, således at $\mathbf{U}$ får determinanten $+1$.

Dermed har vi konstrueret rotationsmatricen $\mathbf{U}$.

De ρ parvis ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, \rho$, for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ benyttes tilsvarende som søjler i $\mathbf{V}$-matricen, idet der ligeledes kompletteres med $n - \rho$ parvis ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_j$, $j = 1, \cdots, n - \rho$, hørende til egenværdien 0 for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

Hvis $\rho = m$, så gælder per antagelse også at $m < n$, hvilket betyder, at der i de tilfælde er mindst én egenvektor for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ hørende til egenværdien 0. Om nødvendigt skiftes der fortegn på denne egenvektor med henblik på ligeledes at opnå at $\mathbf{V}$ får determinanten $+1$.

Dermed har vi også konstrueret rotationsmatricen $\mathbf{V}$.

Det kan til slut kontrolleres, at de fundne ingredienser dekomponerer $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad . \tag{4.64}$$

Denne metode illustreres nedenfor via dekomposition af et par konkrete, relativt små, matricer.

4.6 Eksempler på brug af den generelle SVD

Vi ser først på et forholdsvist simpelt eksempel og gennemgår en total faktorisering af en konkret 2×3-matrix $\mathbf{K}$:

|||| Eksempel 4.32

Vi har givet (2×3)-matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad , \tag{4.65}$$

og vil finde faktoriseringsmatricer $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$ og $\mathbf{V}^*$ for $\mathbf{K}$. Vi finder først:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.66}$$

Denne matrix har egenværdierne 5, 4, og 0, så de tilsvarende σ_i værdier er $\sigma_1 = \sigma_{11} = \sqrt{5}$, $\sigma_2 = \sigma_{22} = 2$, og $\sigma_3 = \sigma_{33} = 0$. Det vil sige, at den (2×3)-'diagonal'-matrix $\mathbf{\Sigma}$-matrix vi skal bruge til dekompositionen af $\mathbf{K}$, er følgende:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.67}$$

Matricen $\mathbf{K}^*\,\mathbf{K}$ har følgende ortogonale enheds-egenvektorer svarende til egenværdierne 5, 2, og 0:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-1/2, 0, 1)\,/\,\sqrt{5/4} \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= (-2, 0, -1)\,/\,\sqrt{5} \quad . \end{aligned} \tag{4.68}$$

|||| OPGAVE 4.33

Eftervis direkte, at de påstande er rigtige, altså at $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ har de påståede egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$; at de er parvis ortogonale; at de alle tre har længden 1; at de tilhørende egenværdier er de nævnte; og at determinanten af den tilhørende matrix $\mathbf{V}$ er $+1$ som den skal være.

Vi har derfor:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad , \tag{4.69}$$

således af den transponerede matrix $\mathbf{V}^*$, som vi skal bruge i dekompositionen, er følgende – tilfældigvis den samme som $\mathbf{V}$ selv:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad , \tag{4.70}$$

Matricen $\mathbf{V}$ diagonaliserer $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

Vi mangler så kun at bestemme $\mathbf{U}$.

I henhold til forskriften får vi de to søjler i rotationsmatricen $\mathbf{U}$ ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)\mathbf{K}\mathbf{v}_2^* \end{aligned} \tag{4.71}$$

Det vil sige:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{4.72}$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.73}$$

som (heldigvis) har den korrekte determinant $+1$ (!). Se opgave 4.34 nedenfor.

Matricen $\mathbf{U}$ diagonaliserer $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$.

Vi checker til sidst, at de fundne ingredienser faktisk dekomponerer $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* &= \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sqrt{5}/2 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{15}/2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K} \quad . \end{aligned} \tag{4.74}$$

OPGAVE 4.34

Overvej nøje og beskriv, hvad der ville være sket (specielt konsekvensen for $\mathbf{U}$) i ovenstående udregninger, hvis vi i stedet for $\mathbf{V}$ havde valgt følgende matrix $\mathbf{V}_a$, hvor søjlerne ligeledes er parvis ortogonale enheds-egenvektorer for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ svarende til egenværdierne i den korrekte rækkefølge, og hvor determinanten ligeledes er $+1$, således at $\mathbf{V}_a$ derfor på det sted i udregningerne også ville have været en tilladelig kandidat for $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.75}$$

Kunne vi (også) have benyttet følgende alternativ?:

$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.76}$$

OPGAVE 4.35

I eksemplet 4.32 ovenfor: Vis ved direkte udregning, at den fundne matrix $\mathbf{U}$ diagonaliserer matricen $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$, dvs.:

$$\mathbf{U}^* \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.77}$$

Eksempel 4.36

En (2×7)-matrix er givet:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

Vi har først brug for følgende produkt til dekomposition:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.79}$$

der har de egentlige egenværdier (dem der ikke er 0): $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$ og $\sigma_1 = \sqrt{3}$ sådan at

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.80}$$

De tilhørende parvis ortogonale enheds-egenvektorer er nedenfor skrevet ind i en $\mathbf{V}$-matrix, således at den første søjle er koordinatsøjlematricen for en normeret egenvektor $\mathbf{v}_1$ hørende til egenværdien $2\sqrt{2}$ og den anden søjle er koordinatsøjlematricen for en normeret egenvektor $\mathbf{v}_2$ hørende til egenværdien $\sqrt{3}$.

De øvrige søjler er normerede parvis ortogonale egenvektorer hørende til den fælles egenværdi 0. De er løsninger til det homogene ligningssystem $(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K})\,\mathbf{x}^* = \mathbf{0}^*$. De er automatisk vinkelrette på $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/20 & 2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & -\sqrt{10}/5 & 3\sqrt{10}/20 & -\sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/20 & -2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{10}/4 & \sqrt{3}/6 \\ 3\sqrt{10}/20 & \sqrt{15}/15 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/20 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/10 & \sqrt{15}/15 & 0 & 0 & \sqrt{10}/5 & \sqrt{10}/10 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{10}/20 & \sqrt{15}/15 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/20 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/5 & 2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.81}$$

I henhold til forskriften får vi de to søjler i rotationsmatricen $\mathbf{U}$ ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)\mathbf{K}\mathbf{v}_2^* \end{aligned} \tag{4.82}$$

Det vil sige:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5) \\ \mathbf{u}_2 &= (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5) \quad , \end{aligned} \tag{4.83}$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.84}$$

som har determinanten $+1$.

Til sidst kan nu igen checkes, at de fundne ingredienser faktisk dekomponerer $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* = \mathbf{K} \quad . \tag{4.85}$$

OPGAVE 4.37

Eftervis direkte, at påstandene i eksemplet 4.36 ovenfor er rigtige, altså at $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ har de påståede egenvektorer; at de er parvis ortogonale; at alle syv har længden 1; at de tilhørende egenværdier er de nævnte; og at determinanten af $\mathbf{V}$ er $+1$, som den skal være.

OPGAVE 4.38

Brug Maple til at rekonstruere samtlige beregninger i eksemplet 4.36 ovenfor, herunder kontrollen af ligning (4.85).

Eksempel 4.39

Vi ser her på et eksempel, der er kvadratformet men som ikke har fuld rang, og som derfor er omfattet af sætning 4.30:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.86}$$

Vi beregner ligesom tidligere:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.87}$$

der har egenværdierne $\sigma_1^2 = 11$, $\sigma_2^2 = 4$, og $\sigma_3^2 = 0$, sådan at

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.88}$$

De til egenværdierne hørende parvis ortogonale enheds-egenvektorer er følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (0,0,1) \\ \mathbf{v}_2 &= (-1,1,0)/\sqrt{2} \\ \mathbf{v}_3 &= (-1,-1,0)/\sqrt{2} \quad , \end{aligned} \tag{4.89}$$

således at:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.90}$$

En beregning viser også, at $\det(\mathbf{V}) = 1$, så $\mathbf{V}$ er en rotationsmatrix.

De to første søjler i $\mathbf{U}$ får vi i henhold til forskriften således:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{11}}\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* = (1,1,3)/\sqrt{11} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{K}\mathbf{v}_1^* = (-1,1,0)/2 \quad . \end{aligned} \tag{4.91}$$

Den sidste vektor $\mathbf{u}_3$ til $\mathbf{U}$ finder vi som den egenvektor der hører til egenværdien 0 for matricen $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$,

$$\mathbf{u}_3 = (-3,-3,2)/\sqrt{22} \quad , \tag{4.92}$$

sådan at:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{22} \\ 3/\sqrt{11} & 0 & 2/\sqrt{22} \end{bmatrix} \quad , \tag{4.93}$$

der ligesom $\mathbf{V}$ har parvis ortogonale enheds-egenvektorer og determinanten $+1$, så den ligeledes er en rotationsmatrix.

Med

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

kan vi til slut checke, at de fundne ingredienser virkelig dekomponerer $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}) \cdot \mathbf{V}^* &= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K} \quad . \end{aligned} \tag{4.95}$$

OPGAVE 4.40

Bestem SVD dekompositioner for matricerne

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

og

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.97}$$

OPGAVE 4.41

Find ud af, hvordan de singulære værdier for en matrix $\mathbf{K}$ kan bruges til at finde den såkaldte Frobenius norm $||\mathbf{K}||_F$ af matricen. Vink: Se Wiki: Matrix norm.

OPGAVE 4.42

Find ud af, hvordan SVD dekompositionen af en matrix $\mathbf{K}$ kan bruges til at definere den bedste (i least squares forstand) 'inverse matrix' til $\mathbf{K}$ – også hvor $\mathbf{K}^{-1}$ slet ikke eksisterer i klassisk forstand (måske fordi $\mathbf{K}$ ikke er kvadratformet (!) eller fordi rangen af $\mathbf{K}$ ikke er maksimal). Vink: Se Wiki: Moore–Penrose pseudoinverse.

4.7 Bevis for SVD for regulære matricer

Bevis

Vi viser, at metoden virker, altså at opskriften giver den påståede dekomposition af $\mathbf{K}$ for det regulære tilfælde hvor $\mathbf{K}$ er kvadratformet med maksimal rang. Specielt skal vi indse, at $\mathbf{U}$ er en rotationsmatrix der diagonaliserer $\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^*$. Antag, at $\det(\mathbf{K}) > 0$ – ellers modificeres med $\mathbf{F}$ som anvist i sætningen 4.29. Per konstruktion ved vi, at $\mathbf{V}$ diagonaliserer $\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}$ til diagonalmatricen $\mathbf{\Sigma}^2$:

$$\mathbf{V}^*\cdot(\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K})\cdot\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}^2 \quad . \tag{4.98}$$

Per konstruktion af $\mathbf{U}$ har vi ligeledes nu, da $\mathbf{\Sigma}$ er kvadratformet, har fuld rang, positive diagonalelementer og en invers matrix $\mathbf{\Sigma}^{-1}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad , \tag{4.99}$$

hvoraf følger dels, at $\mathbf{K}$ dekomponerer som den skal:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^* \quad , \tag{4.100}$$

og dels at $\mathbf{U}$ er en rotationsmatrix:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^*\cdot\mathbf{U} &= \left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot\mathbf{V}^*\cdot\mathbf{K}^*\right)\cdot\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\right)\\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot(\mathbf{V}^*\cdot\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{V})\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot\left(\mathbf{\Sigma}^2\right)\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\\ &= \mathbf{E} \quad ,\end{aligned} \tag{4.101}$$

og da determinanten af $\mathbf{U}$ er positiv følger det, at $\mathbf{U}$ er en rotationsmatrix.

Vi skal også vise, at $\mathbf{U}$ diagonaliserer $\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^*$ til diagonalmatricen $\mathbf{\Sigma}^2$. Det følger således:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^*\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{U} &= \left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot\mathbf{V}^*\cdot\mathbf{K}^*\right)\cdot\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^*\right)\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\right)\\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot(\mathbf{V}^*\cdot\mathbf{K}^*\cdot\mathbf{K})\cdot(\mathbf{K}^*\mathbf{K}\cdot\mathbf{V})\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot\left(\mathbf{\Sigma}^2\cdot\mathbf{V}^*\right)\cdot\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^2\right)\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\cdot\mathbf{\Sigma}^2\cdot(\mathbf{V}^*\cdot\mathbf{V})\cdot\mathbf{\Sigma}^2\cdot\mathbf{\Sigma}^{-1}\\ &= \mathbf{\Sigma}^2 \quad .\end{aligned} \tag{4.102}$$

■

Kapitel 5

Deformation af generelle tetraedre

Hvis vi har givet to regulære tetraedre, der er udspændt af hvert sit treben ud fra to givne (eventuelt forskellige) fodpunkter p_1 og p_2 således:

$$\begin{aligned} \boxtimes_1 &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad , \end{aligned} \tag{5.1}$$

hvordan finder vi så den deformation, der deformerer $\boxtimes_1$ til $\boxtimes_2$, og hvad koster deformationen, altså hvad er σ_i-værdierne for den tilhørende matrix?

5.1 Bestemmelse af deformationsmatrix og flytningsvektor

Det er ikke svært: Vi skal blot bestemme den matrix $\mathbf{K}$, der afbilder $\mathbf{a}_1$ i den nye første kant-vektor $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ i den nye vektor $\mathbf{b}_2$, og $\mathbf{c}_1$ i vektoren $\mathbf{c}_2$. Når vi har gjort det har vi dermed (med fodpunkt p_1):

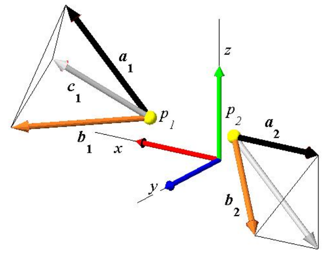
$$\begin{aligned} \widetilde{\boxtimes} &= \mathbf{K} \boxtimes (p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \\ &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Til sidst parallelforskyder vi hele tetraederet $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ fra fodpunkt p_1 til det ønskede fodpunkt p_2.

Hvis vi lader $\mathbf{k}$ betegne den vektor, der har fodpunkt p_1 og spidspunkt p_2, så svarer denne nødvendige parallelforskydning til at addere $\mathbf{k}$ til alle stedvektorerne i tetraederet $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$.

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned} \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) + \mathbf{k} \\ &= \mathbf{K} \boxtimes (p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) + \mathbf{k} \quad . \end{aligned} \tag{5.3}$$



Figur 5.1: Et treben før ($\boxtimes_1$) og efter ($\boxtimes_2$) deformation.

Vi kan bestemme **K** direkte ud fra ligning (4.8) i kapitel 4:

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{array}\right] = \mathbf{K} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{array}\right] \quad . \tag{5.4}$$

Begge matricerne $\mathbf{K}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{array}\right]$ og $\mathbf{K}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{array}\right]$ er regulære (med determinant forskellig fra 0). Med de betegnelser har vi så:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}_1 \quad . \tag{5.5}$$

Vi kan dividere med $\mathbf{K}_1$ på begge sider af ligningen, dvs. vi ganger igennem med matricen $\mathbf{K}_1^{-1}$ og får derved isoleret den ønskede matrix **K**, der deformerer $\boxtimes_1$ til det nye tetraeder $\boxtimes_2$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{array}\right]^{-1} \quad . \tag{5.6}$$

|||| **Bemærkning 5.1** Læg mærke til, at matricen $\mathbf{K}_1$ selv er en deformationsmatrix, nemlig den der deformerer basistetraederet $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ til det givne tetraeder $\boxtimes_1$ (pånær parallelforskydning af fodpunktet), og at matricen $\mathbf{K}_2$ tilsvarende selv er den deformationsmatrix, der deformerer basistetraederet til det andet givne tetraeder $\boxtimes_2$. Deformationsmatricen **K** er selv regulær med determinant forskellig fra 0. Hvorfor det?

Deformationsmatricen **K** har en SVD-dekomposition i 4 faktorer som udviklet i kapitel 4. Specielt får vi de tre σ_i-værdier for **K** som jo er kvadratrødderne af egenværdierne for følgende matrix:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \left(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K_1}^{-1}\right)^* \cdot \left(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1}\right) \quad . \tag{5.7}$$

De tidligere omtalte fabrikker M_P og M_Q, der kan deformere basistrekanter og basistetraedre til andre ønskede trekanter i planen og tilsvarende deformere tetraedre i rummet, kan ligeledes håndtere vilkårligt givne tetraedre $\boxtimes_1$ som input og deformere dem til ønskede tetraedre $\boxtimes_2$ som output ved brug af matricen $\mathbf{K}$ som fundet ovenfor.

Priserne er igen givet ved henholdsvis $P(\mathbf{K})$ og $Q(\mathbf{K})$, hvor $\mathbf{K}$ nu selvsagt er den aktuelle deformationsmatrix, bestemt ovenfor i (5.4), altså $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1}$. Bemærk, at rotationer og paralleltransporter er helt gratis, hvilket måske er en anelse urealistisk.

|||| Eksempel 5.2

Vi vil finde prisen $P(\mathbf{K})$ på den deformation som deformerer $\boxtimes_1$ til det nye tetraeder $\boxtimes_2$, når de to tetraedre er givet ved:

$$\begin{aligned} \boxtimes_1 &= \boxtimes(O,(1,1,1),(1,0,1),(0,1,-1)) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(O,(-1,0,3\sqrt{2}),(0,0,3\sqrt{2}),(-1,\sqrt{2},-3\sqrt{2}/2)) \quad . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Det gøres via følgende udregninger:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}/2 & 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 13/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (9,4,1) \ = \text{egenværdierne for } \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$$

$$P(\mathbf{K}) = (1-\sigma_1)^2 + (1-\sigma_2)^2 + (1-\sigma_3)^2 = 5 \quad .$$

OPGAVE 5.3

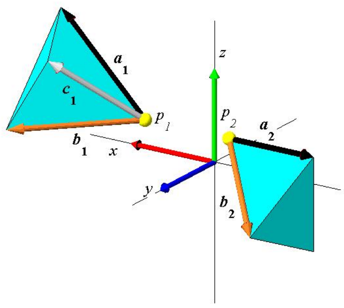
Find de deformationsmatricer **K**, som i de enkelte tilfælde nedenfor afbilder det givne tetraeder $\boxtimes_1$ i det andet givne tetraeder $\boxtimes_2$, idet det stadig underforstås, at afbildningen er bestemt ved, at det først givne treben afbildes på det andet givne treben.

i) $\boxtimes_1 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (1,1,1), (0,2,-1), (1,0,3))$

ii) $\boxtimes_1 = \boxtimes(O, (1,1,1), (0,2,-1), (1,0,3)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

iii) $\boxtimes_1 = \boxtimes(O, (3,0,0), (0,2,0), (0,0,1)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (0,0,2), (0,1,0), (3,0,0))$

iv) $\boxtimes_1 = \boxtimes(O, (2,1,3), (1,-1,1), (3,1,1)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (1,2,1), (1,0,1), (0,1,0)) \quad .$



Figur 5.2: Et tetraeder før og efter deformation, $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$.

OPGAVE 5.4

Find i hvert af tilfældene i opgave 5.3 værdierne af σ_i for hver af de fundne deformationsmatricer, og angiv priserne P og Q for de enkelte deformationer.

|||| OPGAVE 5.5

Antag at $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$ er to givne tetraedre med samme fodpunkt for de udspændende treben. Hvis $\mathbf{K}$ deformerer $\boxtimes_1$ til $\boxtimes_2$, så deformeres $\boxtimes_2$ tilbage til $\boxtimes_1$ med deformationsmatricen $\mathbf{K}^{-1}$. Hvorfor det?

|||| OPGAVE 5.6

Hvis $\mathbf{K}$ har σ_i-værdierne $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$, så er σ_i-værdierne for $\mathbf{K}^{-1}$ følgende: $1/\sigma_3 \geq 1/\sigma_2 \geq 1/\sigma_1$. Hvorfor det?

|||| OPGAVE 5.7

Find to eksempler (altså to par af tetraedre $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$), der viser, at prisen P på deformation af $\boxtimes_1$ til $\boxtimes_2$ ikke nødvendigvis er den samme som prisen på deformationen den anden vej, altså fra $\boxtimes_2$ til $\boxtimes_1$ for to givne tetraedre.

|||| OPGAVE 5.8

M_P-fabrikkens direktør vil gerne tilbyde en prissætning, der er symmetrisk, dvs. således at deformation fra $\boxtimes_1$ til $\boxtimes_2$ koster det samme (stadig udtrykt ved en anden simpel funktion af σ_1, σ_2, og σ_3) som den omvendte deformation fra $\boxtimes_2$ til $\boxtimes_1$. Har du et forslag?

5.2 Markerede og u-markerede tetraedre

Både i kapitel 4 og i ovenstående afsnit har tetraedrene $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$ været givet ved et treben, altså f.eks. de tre kant-vektorer $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, og $\mathbf{c}_1$ ud fra det fælles fodpunkt p_1, der netop optræder i den anvendte notation $\boxtimes = \boxtimes_1(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$.

Men for et givet tetraeder er der som allerede nævnt flere muligheder for at repræsentere dette tetraeder ved et treben, helt præcist er der 24 muligheder. Der er dels valget af fodpunkt og dels rækkefølgen af kantvektorerne. Hvis vi har valgt et af disse treben til at repræsentere tetraederet, så vil vi sige, at tetraederet er markeret med dette fodpunkt og de valgte kantvektorer. Hidtil har vi kun betragtet markerede tetraedre.

For hvert valg af markering (altså udspændende treben) for givne tetraedre $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$ findes en entydig bestemt deformationsmatrix $\mathbf{K}$ med entydigt givne σ_i værdier som vist ovenfor. Men hvilke(t) valg giver den mindste pris?

OPGAVE 5.9

Overvej dette spørgsmål og giv et passende simpelt eksempel der viser, at prisen afhænger af valg af markering (treben) for hver af de to givne tetraedre. Vink: Det er ikke nødvendigt at undersøge alle 24^2 tilfælde af mulige markeringer. Ét eksempel er nok.

5.3 Deformation af trekanter i rummet

Trekanter i rummet deformeres også ved matrix-operationer med (3×3)-matricer. For to givne markerede trekanter $\triangle_1 = \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ og $\triangle_2 = \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ er der mange matricer, der deformerer den ene trekant over i den anden.

Men vi kan vælge én af dem på en passende smart måde: Vi betragter trekanten $\triangle_1$ som sideflade i et tetraeder $\boxtimes_1 = \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$, hvor det ekstra ben $\mathbf{c}_1$ simpelthen defineres ved krydsproduktet af de to kantvektorer i den givne trekant:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} \quad . \tag{5.10}$$

Tilsvarende vil vi betragte trekanten $\triangle_2$ som sideflade i det tetraeder $\boxtimes_2 = \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$, hvor det ekstra ben $\mathbf{c}_2$ defineres ved:

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} \quad . \tag{5.11}$$

OPGAVE 5.10

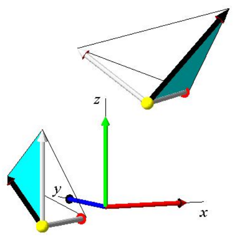
Vis, at hvis $\triangle_1$ og $\triangle_2$ er regulære, så er de ovenfor konstruerede tetraedre $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$ ligeledes regulære.

Metoderne i afsnit 5.1 benyttes nu til at finde den entydigt bestemte deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en paralleltransport-vektor $\mathbf{k}$ som tilsammen deformerer $\boxtimes_1$ til $\boxtimes_2$, altså den matrix og den vektor der giver

$$\begin{gathered} \boxtimes_2 = \mathbf{K}\boxtimes_1 + \mathbf{k}\,, \quad \text{sådan at} \\ \boxtimes\left(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|}\right) = \mathbf{K}\boxtimes\left(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|}\right) + \mathbf{k} \quad . \end{gathered} \tag{5.12}$$

Da de respektive rumlige trekanter $\triangle_1$ og $\triangle_2$ er sideflader i de to tetraedre følger de så at sige med tetraederdeformationen og må derfor opfylde den samme identitet med *den samme deformationsmatrix* $\mathbf{K}$ som tetraederne selv, nemlig (5.12) ovenfor:

$$\begin{gathered} \triangle_2 = \mathbf{K}\triangle_1 + \mathbf{k}\,, \quad \text{dvs.} \\ \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{K}\triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \mathbf{k} \quad . \end{gathered} \tag{5.13}$$



Figur 5.3: To rumlige trekanter er hver for sig hængt op på deres respektive ”tetraeder-stativer”, hvor det tredje ben er det normerede krydsprodukt af trekants-hængslets to kant-vektorer.

Mindst én af de tre σ_i-værdier for $3 \times 3-$deformationsmatricen $\mathbf{K}$ vil nødvendigvis have værdien 1 når $\mathbf{K}$ konstrueres på denne måde. Hvorfor det? De to andre σ_i-værdier 'hører til' selve trekant-deformationen og bestemmer dermed prisen på den rumlige deformation af $\triangle_1$ til $\triangle_2$.

|||| Eksempel 5.11

Vi betragter to markerede rumlige trekanter $\triangle_1$ og $\triangle_2$ og vil finde en $3 \times 3-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en parallelforskydningsvektor $\mathbf{k}$ der deformerer $\triangle_1$ til $\triangle_2$. De to trekanter er givet og markeret ved deres respektive hængsler:

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle(O,(1,1,1),(1,0,1)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1,1,1),(0,2,\sqrt{2}),(0,0,\sqrt{2})) \quad . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Vi aflæser direkte den nødvendige translationsvektor: $\mathbf{k} = (1,1,1)$. For at finde $\mathbf{K}$ beregner vi først de to ekstra ben til tetraeder-trebenet:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} = (1,0,0) \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dermed har vi til bestemmelse af den tilhørende $3 \times 3-$deformation $\mathbf{K}$ præcis som i afsnit 5.1:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

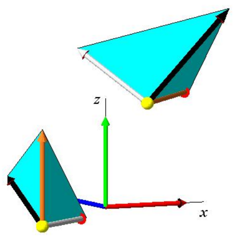
$$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (4, 1, 1) \ \text{ = egenværdierne for } \mathbf{K}^*\mathbf{K}$$

$$P(\mathbf{K}) = 1 \quad , \quad Q(\mathbf{K}) = \frac{9}{4} \quad \text{(kun } \sigma-\text{værdien } \sigma_1 = 2 \text{ bidrager til prisen).}$$

OPGAVE 5.12

En markeret rumlig trekant $\triangle_1$ ønskes deformeret til en anden markeret rumlig trekant $\triangle_2$. Bestem i hvert af nedenstående tilfælde en $3 \times 3-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en parallelforskydningsvektor $\mathbf{k}$ som kan bruges til formålet, idet markeringerne ønskes respekteret:

$$\begin{aligned} &i) \quad \triangle_1 = \triangle(O, (1,1,1), (1,1,-1)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)) \\ &ii) \quad \triangle_1 = \triangle(O, (4,2,1), (1,2,4)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle((7,2,7), (1,0,1), (0,1,0)) \\ &iii) \quad \triangle_1 = \triangle((12,1,0), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (1,0,0)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\ &iv) \quad \triangle_1 = \triangle((1,1,1), (3,2,1), (2,1,3)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle(O, (1,2,3), (1,1,1)) \quad . \end{aligned} \tag{5.17}$$



Figur 5.4: De to tetraedre udspændt af trebenene i figur 5.3.

OPGAVE 5.13

Bestem priserne på hver enkelt af deformationerne i opgave 5.12, idet de oprindelige standardprissætninger P og Q benyttes. Numeriske beregninger med et passende antal decimaler er tilstrækkelige.

OPGAVE 5.14

Et markeret tetraeder $\boxtimes_1 = \boxtimes((1,2,3),(1,0,1),(-1,0,0),(0,1,1))$ deformeres til et andet markeret tetraeder $\boxtimes_2 = \boxtimes((0,0,0),(1,0,1),(-1,1,0),(1,0,-1))$ ved hjælp af en $3\times 3-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en parallelforskydningsvektor $\mathbf{k}$ således at $\boxtimes_2 = \mathbf{K}\boxtimes_1 + \mathbf{k}$.

1. Angiv orienteringen (positiv eller negativ) af hver af tetraedrene $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$ henholdsvis.
2. Bestem rumfanget af hver af tetraedrene $\boxtimes_1$ og $\boxtimes_2$.
3. Bestem $\mathbf{K}$ og $\mathbf{k}$.
4. Beskriv, hvordan forholdet mellem tetraedrenes rumfang kan findes direkte ud fra $\mathbf{K}$.

OPGAVE 5.15

En markeret rumlig trekant $\triangle_1 = \triangle((1,2,3),(0,0,1),(-1,0,0))$ ønskes deformeret til en anden markeret rumlig trekant $\triangle_2 = \triangle((3,2,1),(1,0,1),(-1,1,0))$ ved hjælp af en $3\times 3-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en parallelforskydningsvektor $\mathbf{k}$ således at $\triangle_2 = \mathbf{K}\triangle_1 + \mathbf{k}$. Bestem $\mathbf{K}$ og $\mathbf{k}$.

OPGAVE 5.16

En 3D deformationsmatrix $\mathbf{K}(t)$ er til ethvert tidspunkt $t > 0$ givet ved:

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

En deformation af standard-tetraederet er dernæst givet ved

$$\boxtimes(t) = \mathbf{K}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad . \tag{5.19}$$

1. Bestem for enhver værdi af $t > 0$ en SVD dekomposition for matricen $\mathbf{K}(t)$.
2. Bestem rumfanget af $\boxtimes(t)$ som funktion af tiden $t > 0$.
3. Bestem prisen (i henhold til standard-prissætningerne P og Q) for $\boxtimes(t)$ for enhver værdi af $t > 0$.

5.4 Den totale P-energi af parameter-triangulerede flader

I afsnit 5.3 har vi set hvordan vi kan deformere vilkårlige trekanter og placere dem i rummet via en deformationsmatrix $\mathbf{K}$ og en translationsvektor $\mathbf{k}$, jvf. ligning (5.13) og figur 5.3:

$$\begin{aligned} \triangle_2 &= \mathbf{K} \triangle_1 + \mathbf{k} \, , \quad \text{dvs.} \\ \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) &= \mathbf{K} \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \mathbf{k} \quad . \end{aligned} \tag{5.20}$$

Hvis vi nu antager, at $\triangle_1$ er en standard-trekant i (x,y)-planen, således at $\mathbf{a}_1 = (1,0,0)$ og $\mathbf{b}_1 = (0,1,0)$, så er $\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}$ og derfor (jvf. eksempel 5.11):

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \left[\; \mathbf{a}_2^* \quad \mathbf{b}_2^* \quad \mathbf{c}_2^* \; \right] \quad , \tag{5.21}$$

hvor $\mathbf{c}_2$ ifølge opskriften er en enhedsvektor, som er vinkelret på $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{b}_2$. Derfor har vi:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & 0 \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.22}$$

Vi ser her (igen), at én af egenværdierne for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ er $\sigma_3^2 = 1$ og at de to andre egenværdier kan findes som egenværdierne $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ for 2×2-matricen

$$\widehat{\mathbf{K}}^* \cdot \widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad , \tag{5.23}$$

hvor vi har defineret (3×2)-matricen $\widehat{\mathbf{K}}$ som den matrix, der har søjlerne $\mathbf{a}_2^*$ og $\mathbf{b}_2^*$, hver med tre rumkoordinater:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* \end{array} \right] \quad . \tag{5.24}$$

De to singulære værdier σ_1 og σ_2 for $\mathbf{K}$ (som jo er de eneste, der bidrager til prisen $P(\mathbf{K})$ for deformationen) kan altså findes som kvadratrødderne af egenværdierne for $\widehat{\mathbf{K}}^* \cdot \widehat{\mathbf{K}}$ *uden* at det er nødvendigt at finde hjælpe-vektoren $\mathbf{c}_2$.

OPGAVE 5.17

Argumentér for, at $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ med de givne antagelser ser ud som i ligning (5.22).

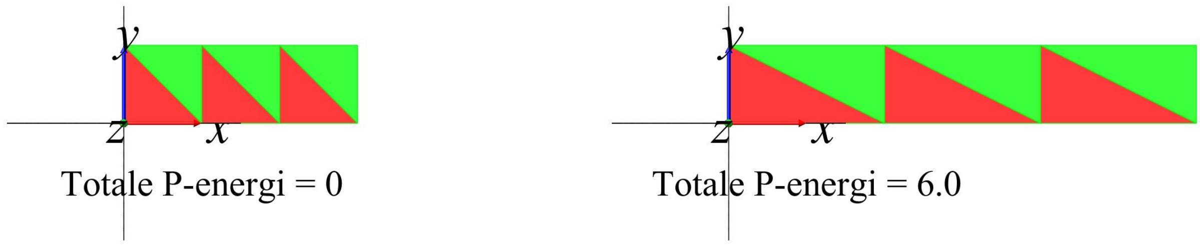
OPGAVE 5.18

Argumentér for, at egenværdierne for $\widehat{\mathbf{K}}^* \cdot \widehat{\mathbf{K}}$ også er egenværdier for $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$.

Når vi bruger N deformerede standard-trekanter til at bygge en triangulering af en flade har vi altså kun brug for hver enkelt trekants trunkerede deformationsmatrix $\widehat{\mathbf{K}}$ (med de to relevante hængselben som søjler) for at kunne bestemme de respektive P-værdier. Det gør vi som bekendt via de omtalte egenværdier for de ialt N (2×2)-matricer $\widehat{\mathbf{K}}_i^* \cdot \widehat{\mathbf{K}}_i$, $i = 1, \cdots, N$, og vi skal dernæst blot summere P-værdierne således:

$$P_T = \sum_i^N P(\mathbf{K}_i) = \sum_i \left((1 - \sigma_{1,i})^2 + (1 - \sigma_{2,i})^2 \right) \quad , \tag{5.25}$$

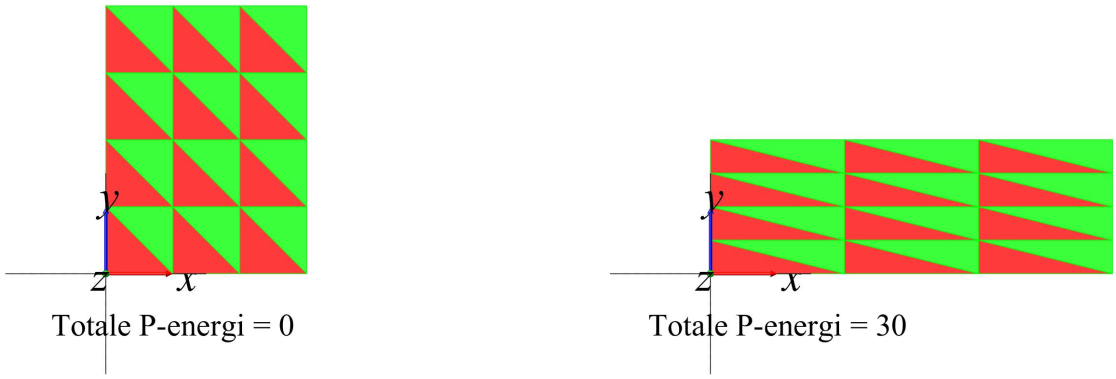
hvor $\sigma_{1,i}$ betegner den ene af de to relevante singulære værdier for den i'te deformationsmatrix $\mathbf{K}_i$ hørende til den i'te trekant i trianguleringen, og tilsvarende for den anden relevante singulære værdi $\sigma_{2,i}$.



Figur 5.5: Hver enkelt af ialt 6 standard trekanter er her strukket ud og forlænget med en faktor 2 i x-akse-retningen.

OPGAVE 5.19

I figur 5.5 vises til venstre et rektangel som er bygget af 6 standard trekanter i hvileposition. Hver enkelt af trekanterne er ikke deformerede. Den totale pris, dvs. prisen for at bygge rektanglet på den velkendte fabrik M_P, er derfor $P_T = 6 \cdot P(\mathbf{K}) = 6 \cdot P(\mathbf{E}) = 0$. Til højre er vist det deformerede rektangel, som fremkommmer ved at forlænge hver enkelt standard trekant (i venstre figur) med faktor $\sigma_1 = 2$ i x-akseretningen. Vis, at den totale pris for at bygge det deformerede rektangel på fabrikken M_P er $P_T = 6.0$ som annoteret i figuren.



Figur 5.6: Hver enkelt af ialt 12 standard trekanter er strukket og komprimeret i henholdsvis x-akseretning og y-akseretning.

OPGAVE 5.20

I figur 5.6 vises tilsvarende (som i figur 5.5) til højre et deformeret rektangel, som her fremkommmer ved dels at gange med faktor $\sigma_1 = 2$ i x-akseretningen og dels at gange med faktor $\sigma_2 = 1/2$ i y-akseretningen. Vis, at den totale pris for at bygge det deformerede rektangel til højre i figur 5.6 er $P_T = 30$.

Som allerede antydet (i figurerne) vil vi omtale og benævne deformations-prisen P_T som en deformations-energi og betragte deformationen som en elastisk deformation af hver enkelt standard trekant.

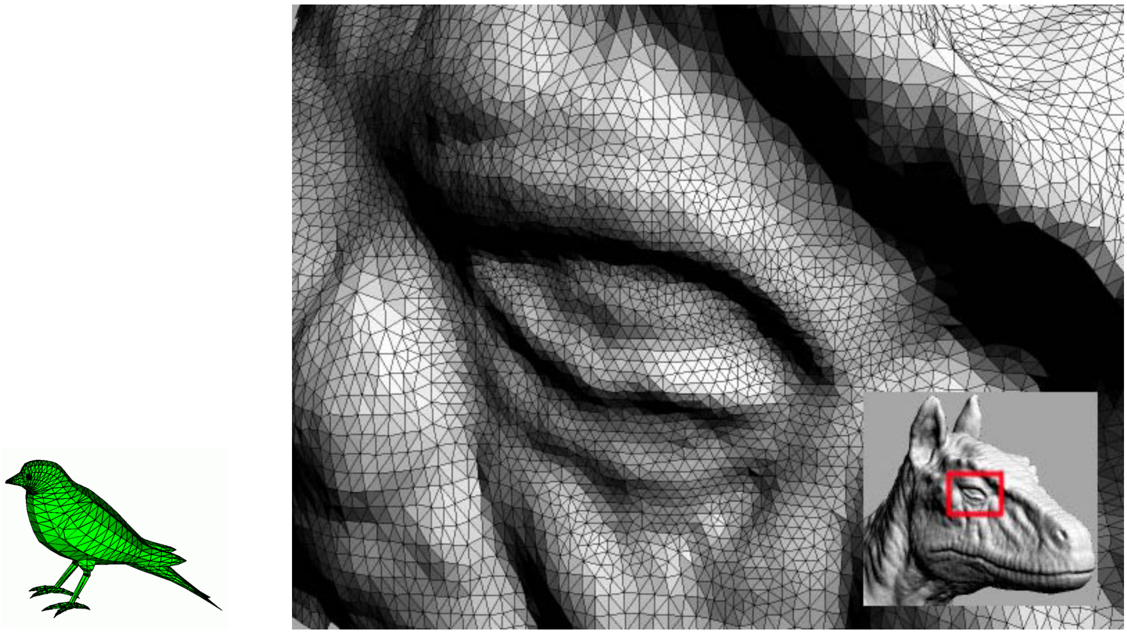
Energien, som skal bruges til en elastisk deformation af en fjeder (med længde 1 i hvile) til længden σ_1 er som bekendt givet ved Hooke's lov: Energien er det arbejde, der skal udføres for at deformere fjederen til dens nye længde. Og det arbejde er integralet af kraften over deformationsvejen, hvor kraften på ethvert tidspunkt er givet ved en (fjeder-)konstant k gange størrelsen af den deformation, som er opnået på det tidspunkt. Hvis fjederen ligger langs x-aksen og i hvile dækker intervallet $[0,1]$, så er Hooke-energien altså givet ved:

$$E = \int_1^{\sigma_1} k \cdot |x-1|\, dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (1-\sigma_1)^2 \quad , \tag{5.26}$$

hvilket netop i vores terminologi er – modulo faktoren $k/2$ – prisen $P(\mathbf{K})$ for skalerings-deformation med matricen $\mathbf{K} = \mathbf{S}_x(\sigma_1)$ af en standard trekant i x-aksens retning med faktoren σ_1. Vi vil derfor tillade os at omtale de generelle værdier af $P(\mathbf{K})$ for generelle deformationer $\mathbf{K}$ som Hooke-energier eller P-energier.

Herefter kan vi finde og sammenligne den totale energi – P_T-energierne – for diverse trianguleringer af områder i planen og trianguleringer af parametriserede flader i rummet.

Senere – i kapitel 12 – vil vi gennemføre en detaljeret analyse af parametriserede flader. Her vil vi foreløbig nøjes med at se, hvordan en parameterfremstilling for en flade på en helt naturlig måde giver anledning til en triangulering af fladen og dermed en total energi P_T. Som allerede nævnt og vist i indledningen til Kapitel 1 er trianguleringer en ofte anvendt approksimation til overflader af enhver art. For eksempel er 3D printning af 3D-solider baseret på *.stl filer, som indeholder præcise informationer om trianguleringer af overfladerne af objekterne.



Figur 5.7: Trianguleringer.

Definition 5.21 En parametriseret flade S i rummet er defineret ved en parameterfremstilling, dvs. ved en vektorfunktion $\mathbf{r}(u,v)$ af to variable, som afbilder ethvert parameter-par (u,v) ind i rummet:

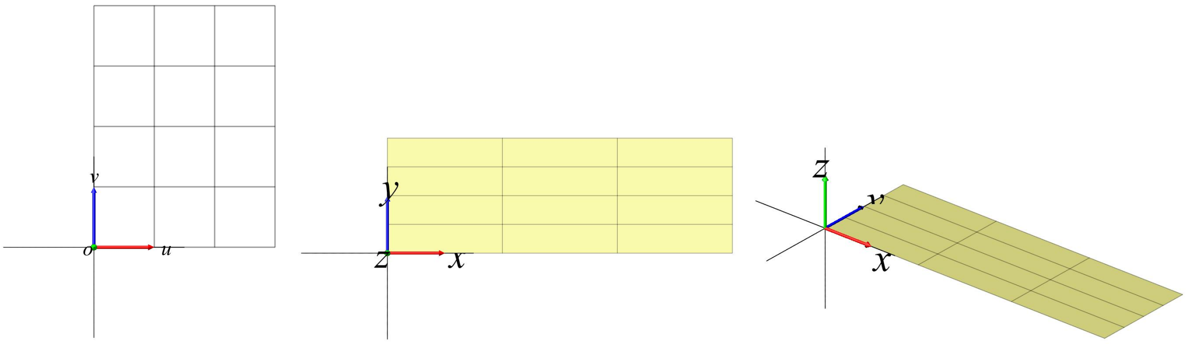
$$S \quad : \quad \mathbf{r}(u,v) = (h(u,v), g(u,v), f(u,v)) \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad , \tag{5.27}$$

hvor $h(u,v)$, $g(u,v)$, og $f(u,v)$ er tre glatte (dvs. vilkårligt mange gange differentiable) funktioner af de to parametre u og v i parameterområdet $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Eksempel 5.22

Hvis funktionen $f(u,v) = 0$ for alle $(u,v) \in \mathcal{U}$, så er den parametriserede flade blot et plant område i (x,y)-planen i rummet. Et meget simpelt eksempel er vist i figur 5.8 med følgende parameterfremstilling:

$$S_1 \quad : \quad \mathbf{r}(u,v) = (2u, v/2, 0) \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} = [0,3] \times [0,4] \quad . \tag{5.28}$$



Figur 5.8: Parameterområdet til venstre afbildes over i fladen i rummet som vist i midten (og til højre) via afbildningen $\mathbf{r}(u,v)$ fra eksempel 5.22.

Vi ser, at trianguleringen af parameter-området (givet ved de viste parameterkurver der) og trianguleringen af fladen (givet ved de viste parameterkurver på fladen i rummet) svarer præcis (og ikke overraskende) til de to trianguleringer i figur 5.6. Trianguleringerne opnås ved at placere knudepunkter dels i $(u,v) = (n,m)$, hvor $n = 0,\cdots,3$ og $m = 0,\cdots,4$, i parameterområdet, og dels i de tilsvarende billedpunkter $\mathbf{r}(n,m)$ på fladen i rummet. Disse knudepunkterne forbindes som vist i figur 5.6 med rette linjestykker, som så danner kanterne i trianguleringerne.

Det samme princip kan selvfølgelig bruges for alle parameterfremstillinger, og trianguleringerne af de tilhørende flader kan dernæst benyttes til at beregne P-energier for trianguleringerne, som dermed atter er et approksimerende mål for P-energien af fladerne selv. Figurerne nedenfor viser en række forskellige eksempler.

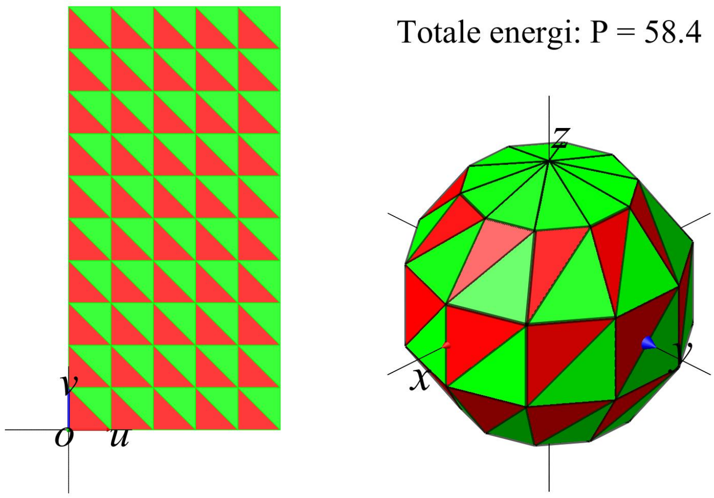
De viste trianguleringer er konstrueret ud fra parameterfremstillinger af flader som ovenfor ved brug af følgende vektorfunktioner, hvor parameterområdet i alle eksempler er givet ved

$(u,v) \in \mathcal{U} = [0,10] \times [0,5] \subset \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(u,v) &= (\cos(2\pi \cdot v/5), \sin(2\pi \cdot v/5), u]) \\
\mathbf{r}_2(u,v) &= (\sin(\pi \cdot u/10) \cdot \cos(2\pi \cdot v/5), \sin(\pi \cdot u/10) \cdot \sin(2\pi \cdot v/5), \cos(\pi \cdot u/10)) \\
\mathbf{r}_3(u,v) &= ((2+\cos(2\pi \cdot v/5)) \cdot \cos((\pi/2)+u/2), (2+\cos(2\pi \cdot v/5)) \cdot \sin((\pi/2)+u/2), \sin(2\pi \cdot v/5)) \\
\mathbf{r}_4(u,v) &= (u, v, \cos(u \cdot v)) \quad .
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

OPGAVE 5.23

Hvilke figurer nedenfor hører til hvilke parameterfremstillinger på listen i (5.29)?

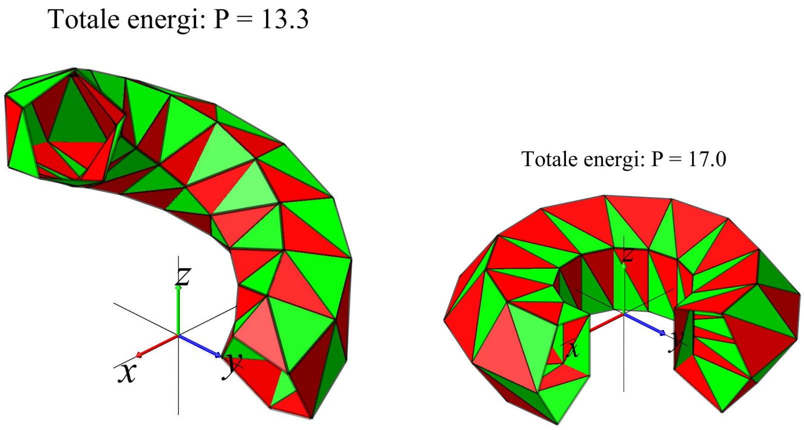


Figur 5.9: En kugleflade med radius 1 og parameterområdet (til venstre) bygget med standard trekanter.

Bemærk, at parameterfremstillingerne i (5.29) alle er defineret over et 'heltalligt' rektangel i (u,v)-parameterplanen, sådan at dette rektangel netop defineres af – og udfyldes af – et antal standardtrekanter med den fælles katete-længde 1. Det betyder at P-energierne kan beregnes direkte ud fra de respektive billed-trekanter som forklaret ovenfor. Se opgave 5.24 nedenfor, hvor det diskuteres hvordan den restriktion kan omgås og energien gøres betydeligt mindre.

OPGAVE 5.24

Finheden i en triangulering af en given flade kan naturligvis gøres meget bedre end i de ovenfor viste figurer. Det koster så flere og mindre trekanter, og er derfor meget dyrere, fordi de mange standardtrekanter (med katete-sidelængde 1) nu alle skal reduceres i størrelse, hvilket er kostbart – medmindre



Figur 5.10: En 'tvistet' cylinder og et stykke af en torus.

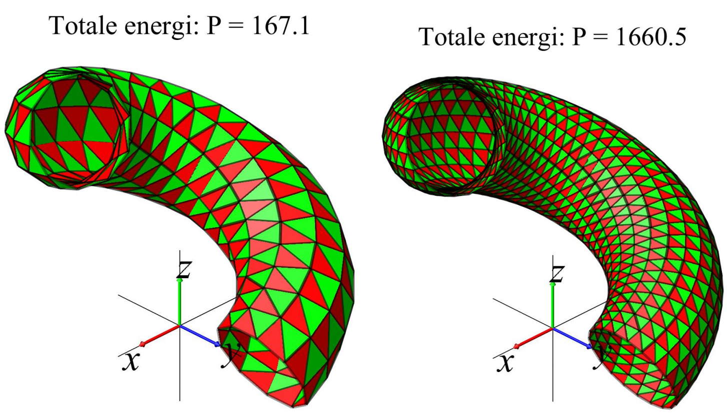
fabrikken kan tilbyde mange meget små og gratis identiske trekanter (med katete-sidelængden $\delta << 1$), se eksemplet i figur 5.11. I den figur bruges ialt 200 trekanter til at bygge fladen til venstre og ialt 800 trekanter til at bygge fladen til højre. De respektive P-energier er beregnet ud fra den sædvanlige antagelse om, at alle trekanter er deformationer af standardtrekanter med katete-sidelængde 1. Antag nu, at fabrikken M_P tilbyder at bruge prædeformerede standardtrekanter, dvs. plane trekanter i (x,y)-planen, men nu med $\mathbf{a}_1 = (\delta,0,0)$ og $\mathbf{b}_1 = (0,\delta,0)$, $\delta > 0$, helt gratis, således at det kun er den videre deformation af disse trekanter til selve trianguleringen af fladen, der koster energi.

Hvordan afhænger de nye priser, dvs. de nye totale P-energier, af δ og hvilken værdi af δ giver den mindste pris for hver enkelt af de to flader i figur 5.11?

OPGAVE 5.25

Antag, at fabrikken M_P ligesom i øvelse 5.24 nu tilbyder – igen helt gratis – at bruge prædeformerede standardtrekanter med $\mathbf{a}_1 = (\delta_1,0,0)$ og $\mathbf{b}_1 = (0,\delta_2,0)$ for fast valgte værdier af $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$. Igen er det så kun den videre deformation af disse trekanter til selve trianguleringen af fladen, der koster energi og penge.

Hvordan afhænger de nye priser, dvs. de nye totale P-energier, af δ_1 og δ_2? Og hvilke værdier af δ_1 og δ_2 giver de mindste priser for hver enkelt af de to flader i figur 5.11?



Figur 5.11: Mange flere og mindre trekanter giver en finere triangulering end i figur 5.10. Men det koster kassen, medmindre de små modificerede prædeformerede standardtrekanter med katete-kantlængder $\delta << 1$ (henholdsvis δ_1 og δ_2) kan leveres tilsvarende gratis – se øvelserne 5.24 og 5.25.

Kapitel 6

Geometrisk dynamik i 2D

6.1 Tidsparametriserede plane kurver

Et punkt p der bevæger sig i planen har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem $\{O, x, y\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{6.1}$$

hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet.

Stedvektoren fra O til punktet $p(t)$ betegnes naturligvis med vektor-notation således:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{6.2}$$

Eksempel 6.1

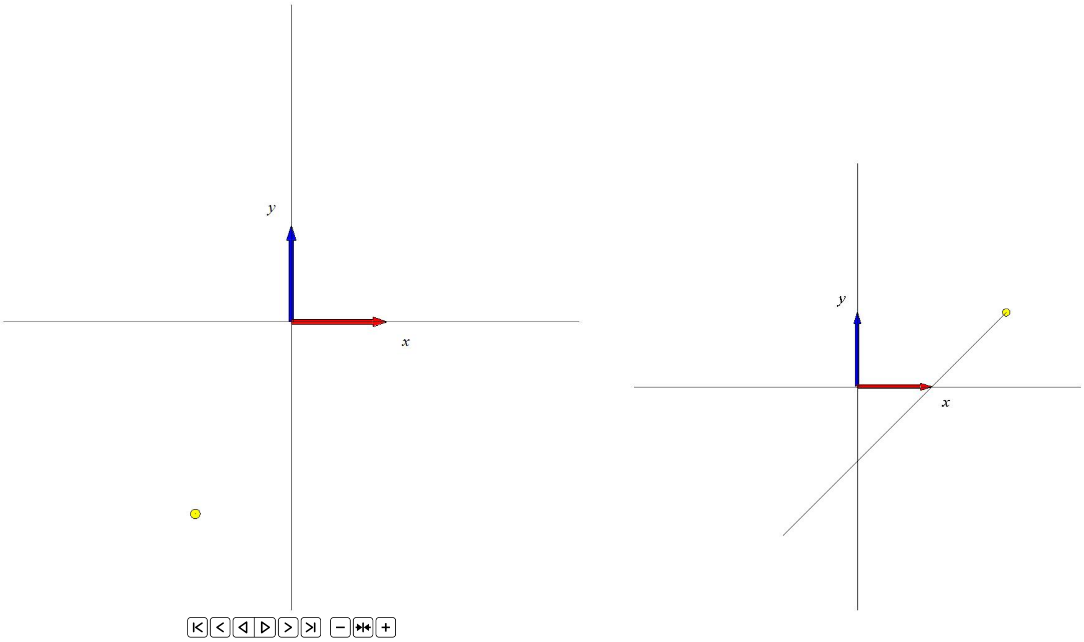
Et meget simpelt eksempel på en sådan bevægelse af et punkt i planen er vist (og animeret) i figur 6.1, hvor

$$p = p(t) = (3t - 1, 3t - 2) \ , \ t \in [0, 1] \quad . \tag{6.3}$$

OPGAVE 6.2

En cirkel C i planen er bestemt ved at radius er 3 og centrum ligger i punktet $(2, 1)$. Bestem en tidsparametrisering $p = p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ af cirklen med tilhørende tidsinterval I således at punktet $p(t)$ gennemløber cirklen netop én gang. Se figur 6.2.

Vi kan nu bevæge en markeret trekant i planen således at det valgte hængsel for trekanten har fodpunkt i det bevægede punkt $p(t)$ - for eksempel den simple punkt-bevægelse i eksempel 6.1 og således at hængslets kant-vektorer er givne vektor-funktioner af tiden t.



Figur 6.1: Bevægelse af et punkt langs en ret linje.

Eksempel 6.3

Vi vælger fodpunktet $p(t)$ og derudover konstante kantvektorer, henholdsvis $\mathbf{i} = (1,0)$ og $\mathbf{j} = (0,1)$, se animationen i figur 6.3. I dette konkrete eksempel er trekanten altså givet ved det tidsafhængige hængsel:

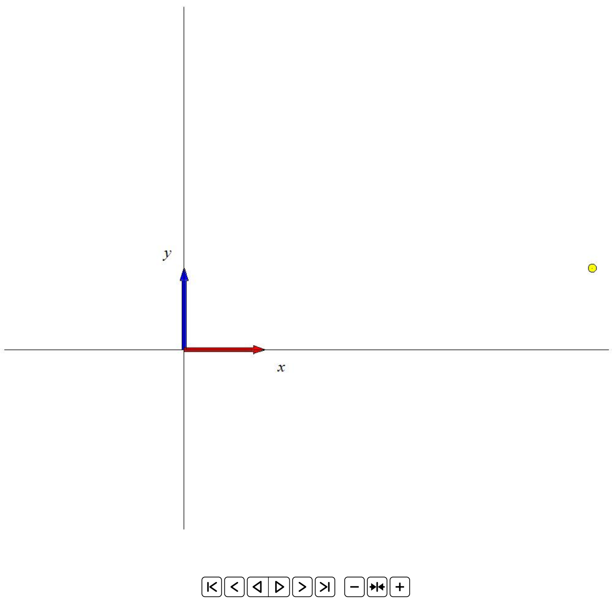
$$\begin{aligned} \triangle(t) &= \triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) = \triangle(p(t),\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ &= \triangle((3t-1,3t-2),(1,0),(0,1)) \quad . \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.2 Samtidig bevægelse og deformation af trekant

Eksempel 6.4

Vi bruger den samme bevægelse af fodpunktet $p = p(t)$ som i ovenstående eksempler. Men nu deformerer vi basistrekanten med en tidsafhængig deformationsmatrix, der til ethvert givet tidspunkt $t \in [0,1]$ har nedenstående ret simple SVD-faktorisering. I første omgang antager vi, at begge faktorerne $\mathbf{V}$ og $\widehat{\mathbf{F}}$ er konstante, nemlig enhedsmatricen: $\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$. (I eksempel 6.7 ser vi på en noget mere generel situation, hvor $\mathbf{V}$ ikke er helt så triviel.)

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{6.5}$$



Figur 6.2: Bevægelse af et punkt langs en cirkel som i opgave 6.2. Animeret.

hvor

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 2\pi\, t\\ \sigma_1(t) &= 1+t\\ \sigma_2(t) &= 1-\frac{t}{2} \quad .\end{aligned} \tag{6.6}$$

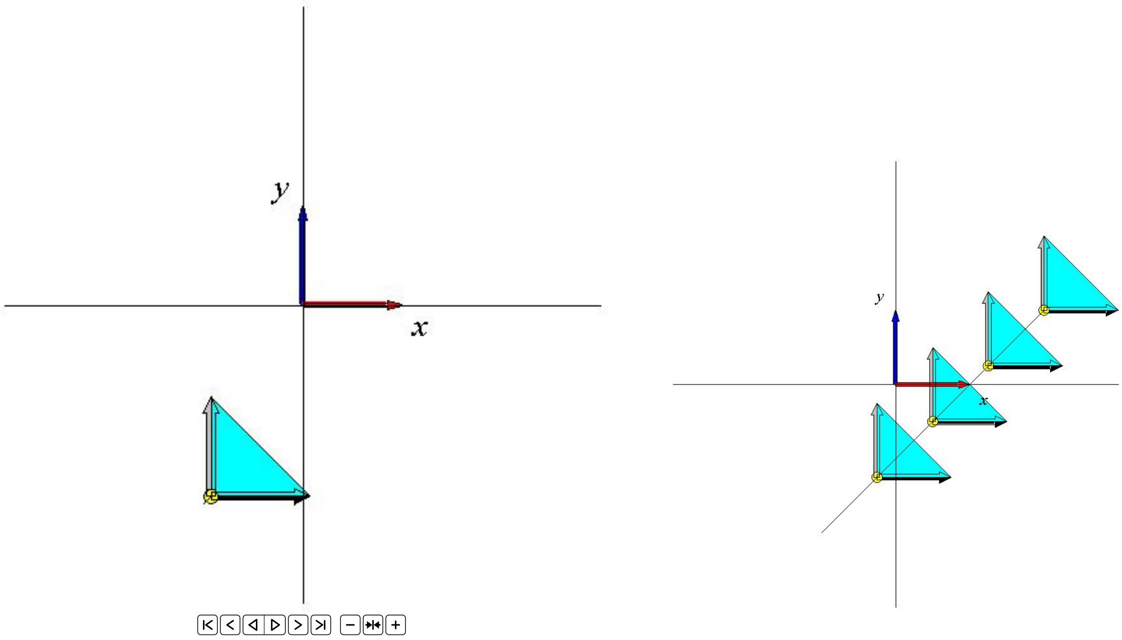
Så er

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} (1+t)\cos(2\pi t) & -(1-\frac{t}{2})\sin(2\pi t) \\ (1+t)\sin(2\pi t) & (1-\frac{t}{2})\cos(2\pi t) \end{bmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \quad . \tag{6.7}$$

Det vil sige, at det dynamiske hængsel til tidspunktet t har fodpunktet $p(t)$ og kantvektorerne $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ bestemt ved:

$$\begin{aligned}\triangle(t) &= \mathbf{K}(t)\,\triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) = \triangle(p(t),\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)) \quad , \quad t \in [0,1]\\ p(t) &= (3t-1, 3t-2)\\ \mathbf{a}(t) &= ((1+t)\cos(2\pi t), (1+t)\sin(2\pi t))\\ \mathbf{b}(t) &= (-(1-\frac{t}{2})\sin(2\pi t), (1-\frac{t}{2})\cos(2\pi t)) \quad .\end{aligned} \tag{6.8}$$

Se animation af hængselbevægelsen og deformationen i figur 6.4. Bemærk ved inspektion af animationen, at begge kantvektorer udfører en hel rotation i løbet af bevægelsen fra det ene endepunkt af linjestykket til det andet, samt at kantvektorerne under hele bevægelsen er vinkelrette på hinanden. Dette følger ligeledes direkte af udtrykkene for $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ i (6.8).



Figur 6.3: Bevægelse af trekant *uden rotation og skalering* 'langs' et linjestykke - det samme som i figur 6.1. Animeret.

OPGAVE 6.5

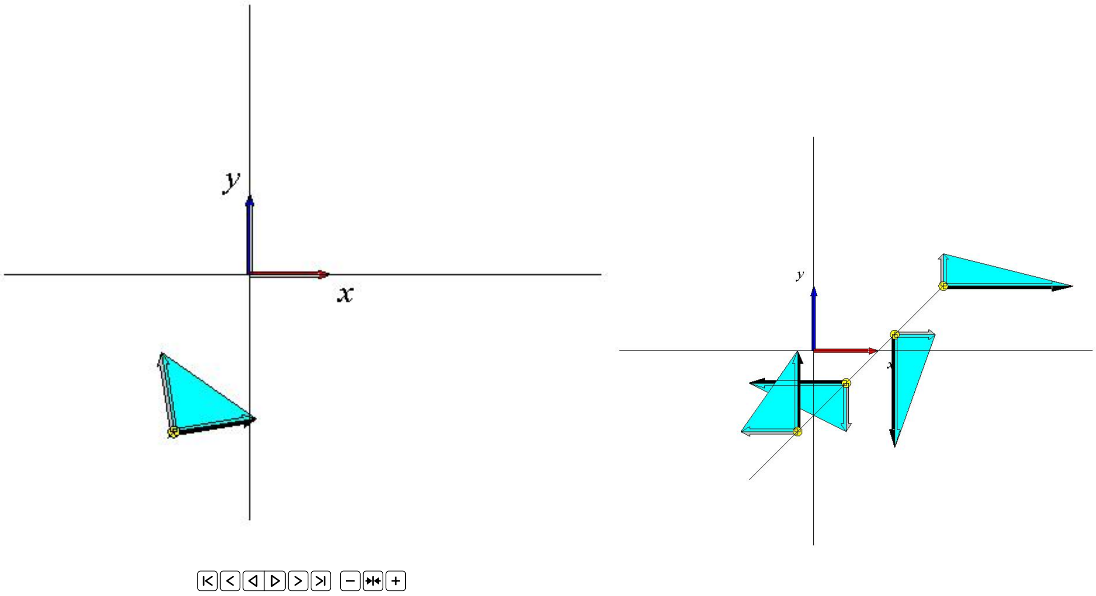
Bestem arealet $\text{Areal}(\triangle(t))$ af trekanten $\triangle(t)$ i ovenstående eksempel, dvs. ved hjælp af oplysningerne i (6.8), som funktion af tiden $t \in [0,1]$.

Eksempel 6.6

I figur 6.5 ses den bevægelse af hængslet som vi opnår, hvis vi undlader at bruge faktoren $\mathbf{\Sigma}(t)$ i ovenstående eksempel (eller erstatter $\mathbf{\Sigma}(t)$ med $\mathbf{E}$), dvs. hvis vi benytter rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$ som deformationsmatrix på basis-trekanten. Derved fås en roterende bevægelse af de vinkelrette enheds-kantvektorer, nemlig den rotation, som er givet direkte ved rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$. I dette tilfælde har vi altså:

$$\begin{aligned}
\triangle(t) &= \triangle(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) \\
p(t) &= (3t-1, 3t-2) \\
\mathbf{a}(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\
\mathbf{b}(t) &= (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \quad .
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Vi er nu klar til at se på et mere generelt eksempel, hvor $\mathbf{K}(t)$ har 3 ikke-trivielle SVD faktorer.



Figur 6.4: Bevægelse af dynamisk deformeret trekant 'langs' det linjestykke, der er vist i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.4.

Eksempel 6.7

Vi antager, at $\mathbf{K}(t)$ har en ikke-triviel faktor $\mathbf{V}^*(t)$, nemlig følgende tidsafhængige rotationsmatrix:

$$\mathbf{V}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} , \tag{6.10}$$

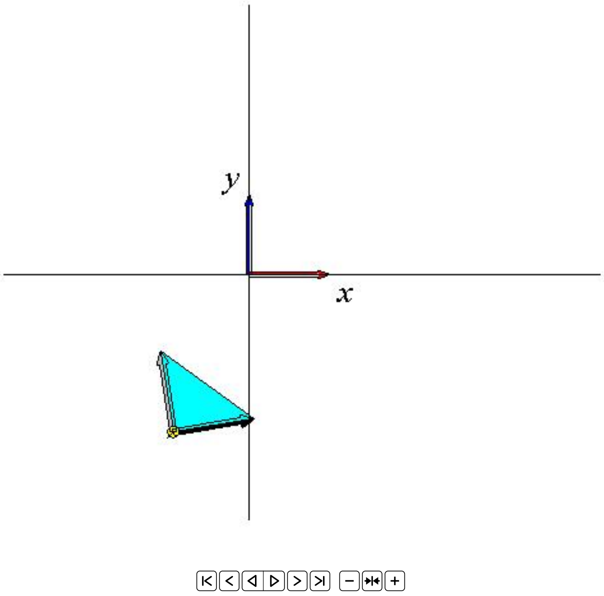
sådan at $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\,\mathbf{\Sigma}(t)\,\mathbf{V}^*(t)$ for $t \in [0,1]$, hvor $\mathbf{U}(t)$ og $\mathbf{\Sigma}(t)$ er de samme matricer som brugt i ovenstående eksempel 6.4. Den bevægede og deformerede trekant $\triangle(t) = \mathbf{K}(t) \triangle (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t)$ er animeret i figur 6.6.

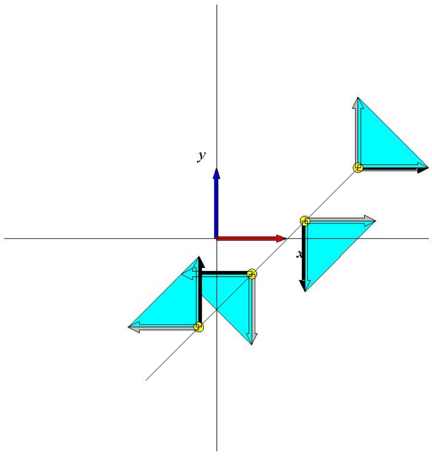
OPGAVE 6.8

Bestem $\mathrm{Areal}(\triangle(t))$ af trekanten $\triangle(t) = \mathbf{K}(t) \triangle (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t)$, som betragtes i ovenstående eksempel 6.7, idet arealet udtrykkes som en funktion af tiden $t \in [0,1]$.

6.3 Det medfølgende hængsel

Ligesom i eksempel 6.6 kan vi undersøge den bevægelse af basis-hængslet, som fås ved at benytte rotationsmatricen $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$, dvs. uden at skalere med $\mathbf{\Sigma}(t)$ undervejs. Derved fås et medfølgende hængsel som det ses på animationen i figur 6.7. Den situation svarer til eksempel 6.6.





Figur 6.5: Bevægelse af trekant med rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$ 'langs' linjestykket i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.6.

Hvis vi forestiller os, at vi følger med i bevægelsen og sidder fast på den trekant, der er udspændt af det medfølgende roterede hængsel, hvordan vil vi så opleve deformationen af det hængsel, der deformeres af $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{\Sigma}(t)\cdot\mathbf{V}^*(t)$? Det er vist i animationen i figur 6.8. Det fornemmes ved inspektion af filmen, at der netop ikke foregår nogen koordineret rotation (af den trekant, der bliver deformeret) set fra det medfølgende hængsel - kun skaleringer - til ethvert givet tidspunkt.

OPGAVE 6.9

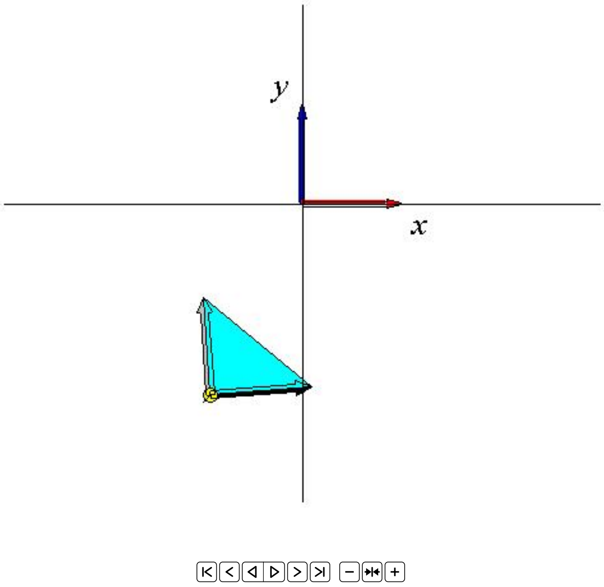
Bestem (standard-)prisen $P(t) = P(\mathbf{K}(t))$ for hver af de markerede trekanter $\triangle(t)$, $t \in [0,1]$, i eksempel 6.7.

OPGAVE 6.10

En kunde beder (den nu velkendte) fabrik M_P om at producere en ordre på 1000 trekanter $\triangle(t_i)$ af den type, der bruges i eksempel 6.7, nemlig én for hver $t_i = i/1000$, $i = 1,2,3,...,1000$. Direktøren giver et hurtigt tilbud på, hvad det skal koste:

$$P_{\text{total}} = 1000\int_0^1 P(t)\,dt \quad , \tag{6.11}$$

hvor $P(t)$ er den funktion, der er fundet i opgave 6.9 ovenfor. Er det et godt tilbud (for kunden)?



Figur 6.6: Bevægelse af basis-trekant med $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$ som givet i eksempel 6.7. Animeret.

I figur 6.9 er vist én periode af en periodisk bevægelse og deformation af en trekant.

OPGAVE 6.11

Til konstruktion af trekanterne $\triangle(t)$ i figur 6.9 er benyttet følgende ingredienser:

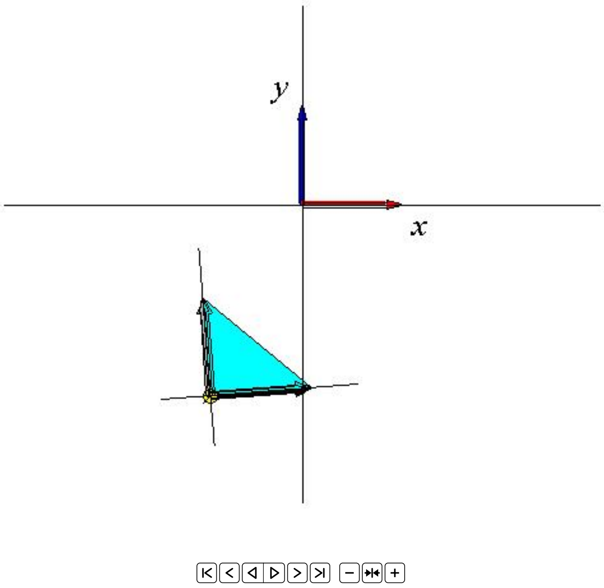
$$\begin{aligned} \triangle(t) &= \mathbf{K}(t) \triangle (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) \\ p(t) &= \left(0,\, 3\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{K}(t) &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha \cdot \sin(t)) & \cos(\alpha \cdot \sin(t)) \\ -\sin(\alpha \cdot \sin(t)) & -\sin(\alpha \cdot \sin(t)) \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{6.12}$$

hvor α betegner en konstant. Hvilken konstant er der tale om?

6.4 Sweeping ind i rummet

Hvis vi betragter alle (eller faktisk kun 80 af) trekanterne i hele familien af deformationer fra eksempel 6.7 får vi overdækket det område i planen, som er vist i figur 6.10.

Hvis vi i stedet stakker trekanterne fra eksempel 6.7 i $z-$aksens retning, og erstatter fodpunktskurven med $p(t) = (0, 0, 3t)$, $t \in [0, 1]$, så får vi konstrueret et tårn, som vist i figur 6.11.



Figur 6.7: Bevægelse af basis-trekanten med $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$. Animeret. Se eksempel 6.7.

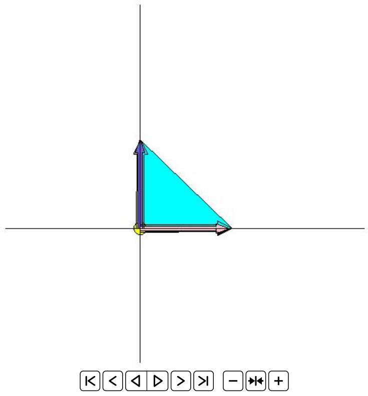
OPGAVE 6.12

Bestem volumenet af tårnet i figur 6.11. Vink: Man kan med stor fordel benytte den 'snitmetode', som vi benyttede til beregning af rumfanget af tetraedre i kapitel 3, jvf. sætning 3.5.

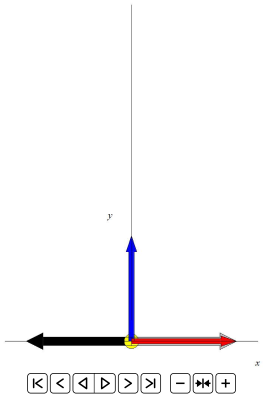
Som referencer til ovenstående tårnkonstruktion, se figur 6.13 og kapitel 13 i [Po].

OPGAVE 6.13

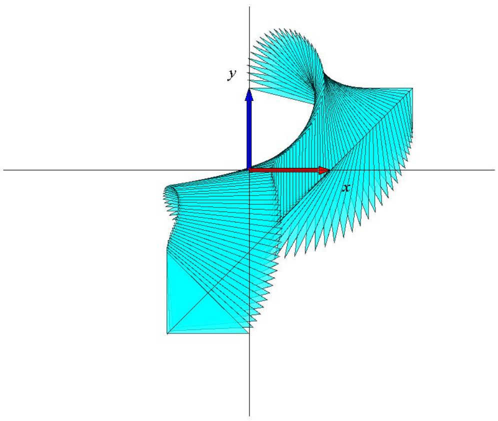
Bestem volumenet af den tårnkonstruktion som opnås ved at stakke trekanterne fra eksempel 6.7 i $z-$aksens retning, men nu ved at benytte fodpunktskurven $p(t) = (3\cos(t\pi), 3\sin(t\pi), 3t)$, $t \in [0,1]$.



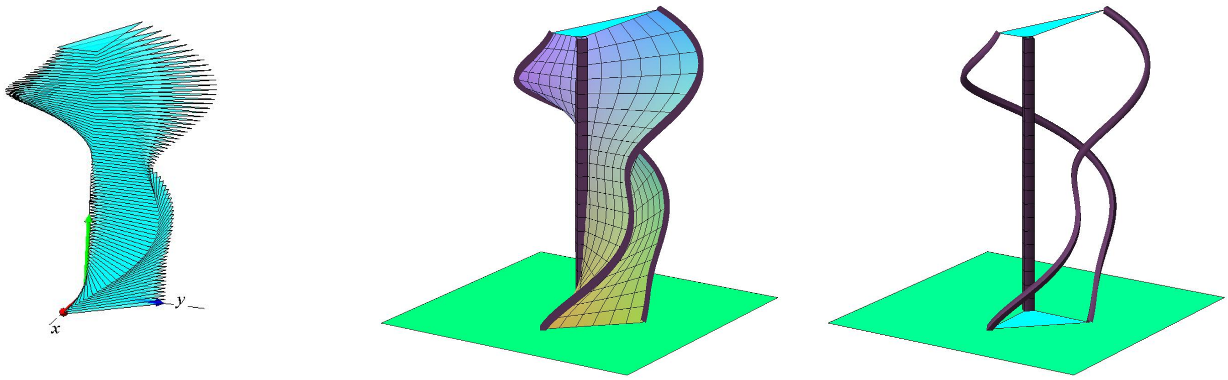
Figur 6.8: Bevægelsen af basis-trekanten som den ses fra det medfølgende hængsel. Animeret.



Figur 6.9: Jump. Animeret.

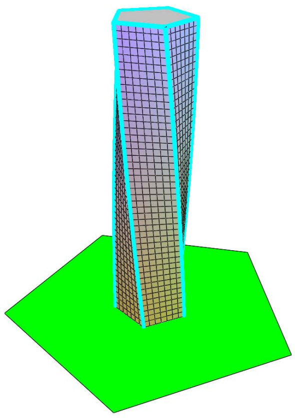


Figur 6.10: Det område i planen, som ’fejes ud’ med de trekanter $\triangle(t)$, der fremkommer ved familien af deformationer i eksempel 6.7.



Figur 6.11: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekanterne $\triangle(t)$ fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs $z-$aksen og trekanterne (be-)holdes vandrette, altså parallelle med $(x,y)-$planen.

Figur 6.12: Turning Torso Towers. I Malmö og Toronto, henholdsvis.



Figur 6.13: Turning Torso Tower modellering.

Kapitel 7

Geometrisk dynamik i 3D

Som antydet i forrige kapitel 6 kan enhver $2 \times 2-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ essentielt skrives som et produkt af en symmetrisk matrix og en rotationsmatrix (som definerer et medfølgende hængsel).

Det samme gælder for $3 \times 3-$deformationsmatricer. Vi begynder dette kapitel med at formulere præcis hvad det resultat går ud på. Det er indholdet af følgende sætning om polær dekomposition:

Sætning 7.1 Enhver regulær matrix $\mathbf{K}$ kan skrives som et produkt

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{7.1}$$

hvor $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix, $\mathbf{S}$ er en symmetrisk matrix med positive egenværdier, og $\widehat{\mathbf{F}}$ er flipmatricen (der som bekendt afhænger af om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ).

Rotationsmatricen $\mathbf{R}$ og den symmetriske matrix $\mathbf{S}$ kan selv faktoriseres og dekomponeres på følgende måde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^* \\ \mathbf{S} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad , \end{aligned} \tag{7.2}$$

hvor $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, og $\mathbf{\Sigma}$ er de velkendte matricer fra SVD faktoriseringen af $\mathbf{K}$, se nedenfor.

Læg mærke til at den sætning specielt betyder, at hvis $\mathbf{K}$ har positiv determinant (altså $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$) og hvis $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}$ (altså $\sigma 1 = \sigma_2 = 1$), så er $\mathbf{S} = \mathbf{E}$ og dermed $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, dvs. $\mathbf{K}$ er selv en rotationsmatrix.

Bevis. Det er let at bevise Sætning 7.1 når vi har SVD faktoriseringen af $\mathbf{K}$ til rådighed.

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \tag{7.3}$$

Vi skriver simpelthen SVD faktoriseringen således - ved at indsætte en ekstra (enheds-)faktor $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}$ strategisk mellem $\mathbf{U}$ og $\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{U} \cdot \left(\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}\right) \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\ &= \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*\right) \cdot \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*\right) \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \end{aligned} \tag{7.4}$$

hvor $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$ er et produkt af to rotationsmatricer og derfor selv en rotationsmatrix (hvorfor det?) Vi mangler blot at vise, at $\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$ er en symmetrisk matrix. Men det følger af at:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*\right)^* \\ &= \mathbf{V}^{**} \cdot \mathbf{\Sigma}^* \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \mathbf{S} \quad , \end{aligned} \tag{7.5}$$

hvor vi har benyttet, at der klart gælder $\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{\Sigma}$ og $\mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$. □

OPGAVE 7.2

Bestem polære dekompositioner for hver af følgende deformationsmatricer (nummereringen stammer fra den tidligere opgave 4.19, som handlede om SVD faktoriseringen af disse matricer):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{7.6}$$

7.1 Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder

Vi vil nu se på hvad ovenstående polære dekomposition betyder for en generel tidsafhængig deformation og bevægelse af et tetraeder i rummet - på samme måde som vi diskuterede dette for samtidig bevægelse og deformation af trekanter i planen i forrige kapitel.

Et (fod)punkt p for et tetraeder bevæger sig altså nu i rummet og har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det gode gamle fast valgte koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{7.7}$$

hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet - sædvanligvis, når ikke andet er nævnt, vil vi bruge $I = \mathbb{R}$.

OPGAVE 7.3

Bestem en tidsparametrisering $p(t)$, $t \in I$, af den cirkel $\mathcal{C}$ i rummet, som har centrum i $(1,0,0)$, radius 3, og som ligger i den plan igennem centret som står vinkelret på vektoren $(1,1,1)$. Vælg I sådan at cirklen gennemløbes netop én gang.

Eksempel 7.4

Et eksempel er vist med fodpunkts-kurven i figur 7.1. Den viste (animerede) bevægelse er simpelthen givet ved:

$$p(t) = (-1+3t, -2+3t, 0) \quad , \quad \text{hvor} \quad t \in [0,1] \quad . \tag{7.8}$$

I den samme figur er vist en ikke-triviel animeret deformation af et tetraeder. Læg mærke til, at det er selve tetraederdeformationen der stadig er det interessante - ikke selve fodpunkts-bevægelsen. (Det forhold vil ændre sig dramatisk i næste kapitel, hvor vi vil koble deformationen til fodpunktsbevægelsen og *styre* deformationen af tetraederet blandt andet ved hjælp af banekurven for fodpunkts-bevægelsen.)

Den viste deformation af tetraederet er givet ved følgende fuldstændige specifikation af det markerede treben:

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)) \\ &= \mathbf{K}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad \text{hvor } t \in [0,1] \text{ og} \\ p(t) &= (-1+3t, -2+3t, 0) \quad , \quad \text{og kantvektorerne er givet ved} \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$[\mathbf{a}^*(t)\, \mathbf{b}^*(t)\, \mathbf{c}^*(t)] = \mathbf{K}(t) \quad ,$$

hvor

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$$

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(t/2) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.10}$$

og

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_z(2\pi t) \cdot \mathbf{R}_y(2\pi t) \cdot \mathbf{R}_x(2\pi t)$$
$$\mathbf{V}^*(t) = \mathbf{R}_z(-\pi t) \cdot \mathbf{R}_y(-\pi t) \cdot \mathbf{R}_x(-\pi t) \quad . \tag{7.11}$$

Det fremgår (også af animationen), at selv om deformationsmatricen har et rimeligt simpelt udtryk, så er bevægelsen langt fra simpel. Det skyldes udelukkende de involverede rotationer. Selve strækningen og kompressionen af tetraederet fra start til slut er bestemt af $\sigma_i(t)-$værdierne i $\mathbf{\Sigma}(t)$ og de kan jo direkte aflæses, sådan at vi for eksempel umiddelbart kan løse følgende typiske opgaver:

OPGAVE 7.5

Bestem til ethvert tidspunkt $t \in [0,1]$ volumenet $\mathrm{Vol}(\boxtimes(t))$ af det tetraeder som er defineret i (7.9).

OPGAVE 7.6

Hvis vi benytter standard-prissætningen for tetraedre på fabrikken M_P, hvor meget koster det så at få lavet følgende stak bestående af 1000 tetraedre, som er produceret efter forskriften fra eksempel 7.4, se ligning (7.9): $\boxtimes(t_i)$, $t_i = i/1000$, $i = 1,2,3,...,1000$.

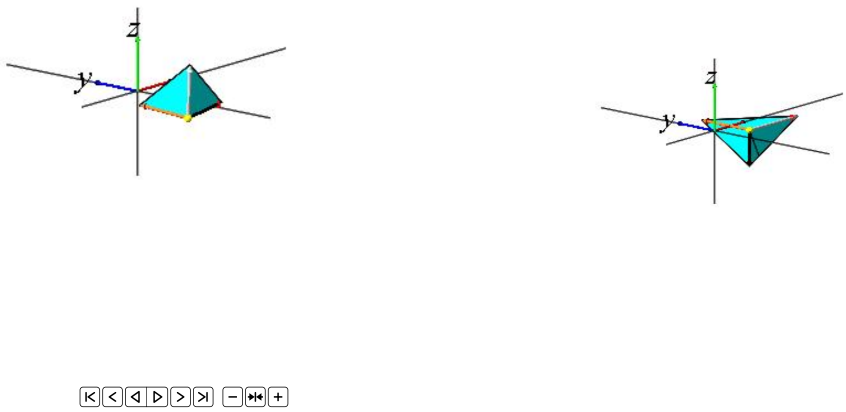
Hvis vi ikke roterer, det vil sige hvis vi kun benytter $\mathbf{S}(t)$-delen af den polære dekomposition for $\mathbf{K}(t)$, så får vi den deformation af tetraederet som er vist i figur 7.2.

Det er stadigvæk rotationerne i rummet og altså rotationsdelen $\mathbf{R}(t)$ af de polære dekompositioner, det er sværest at forstå - så dem vil vi dyrke lidt nærmere i det følgende.

7.2 Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix

For at forstå hvordan rotationer og rotationsmatricer $\mathbf{R}(t)$ udvikler sig og virker i rummet, er det nødvendigt at undersøge og finde simple udtryk for deres tids-afledede $\mathbf{R}'(t)$. Hvis den tidsafhængige $3 \times 3-$rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er givet ved sine element-funktioner således:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.12}$$



Figur 7.1: Deformation af tetraeder med $\mathbf{K}(t)$ som specificeret i eksempel 7.4, se de definerende ligninger (7.9). Animeret.

så er $\mathbf{R}'(t)$ defineret ved de $t-$afledede af de enkelte element-funktioner $r_{ij}(t)$ sådan her:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{7.13}$$

Da vi antager, at $\mathbf{R}(t)$ er rotationsmatricer for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$, så gælder der per definition 4.5, dels at $\det(\mathbf{R}(t)) = 1$ for alle t og dels at

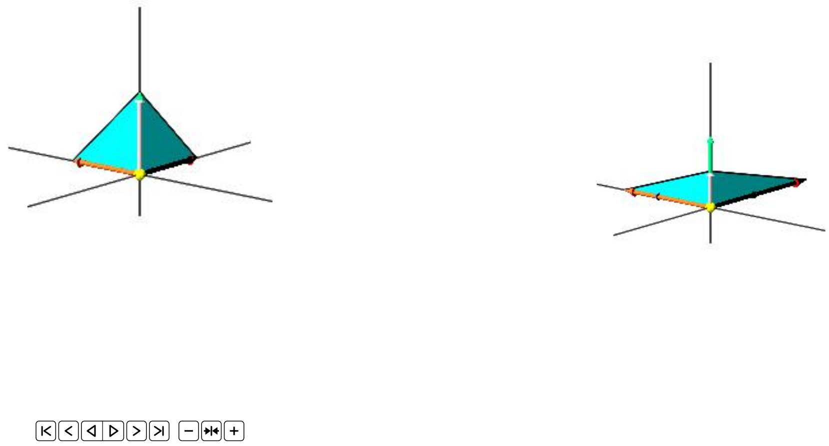
$$\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) \quad . \tag{7.14}$$

Så gælder derfor også for alle t at

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \mathbf{E} \quad . \tag{7.15}$$

Den ligning kan vi differentiere med hensyn til t og får så, da $\mathbf{E}$ er en konstant matrix:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)\right) = \mathbf{O} \quad , \quad \text{dvs.} \\ \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) = \mathbf{O} \quad . \end{gathered} \tag{7.16}$$



Figur 7.2: Deformation af basistetraederet med den symmetriske matrix $\mathbf{S}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

OPGAVE 7.7

Vis - eller giv et selvvalgt ikke-trivielt eksempel, der viser - at de to ligninger i ovenstående ligning (7.16) er ækvivalente, altså at man kan finde den afledede af et matrix-produkt med 'den sædvanlige produkt-metode', som kendes for funktioner: $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Vink: Kig eventuelt først på 2×2-matricer $\mathbf{A}(t)$.

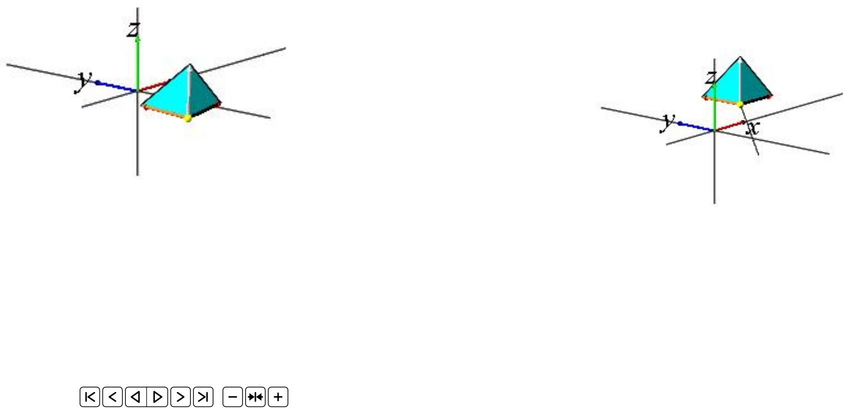
Det vil sige, at der for rotationsmatricerne $\mathbf{R}(t)$ altid gælder:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) &= -\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) \\ &= -\left(\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)\right)^* \quad . \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3 Skævsymmetriske matricer

Ligningen (7.17) ovenfor betyder, at matricen $\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)$ er *skævsymmetrisk* for enhver værdi af t i følgende forstand:

Definition 7.8 En matrix $\mathbf{A}$ er skævsymmetrisk hvis $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$.



Figur 7.3: Rotation med rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

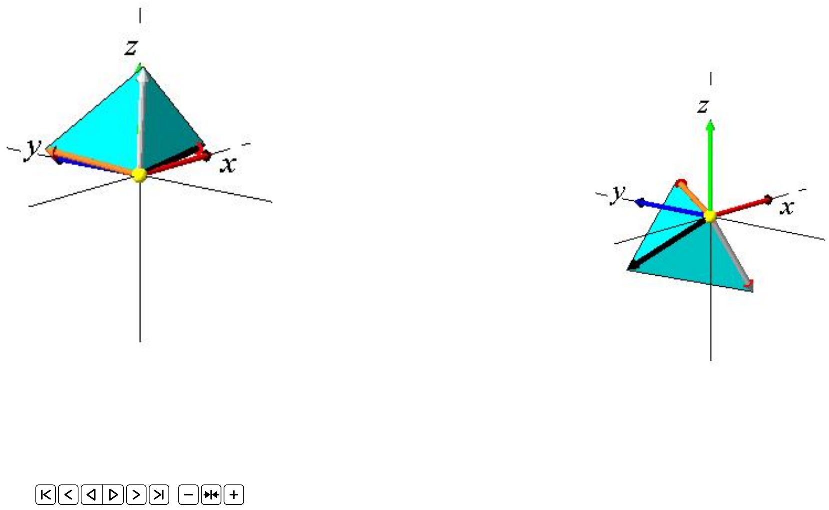
OPGAVE 7.9

Vis, at en given $3 \times 3-$matrix $\boldsymbol{\Omega}$ er skævsymmetrisk hvis og kun hvis der findes 3 tal α, β, og γ, således at

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.18}$$

7.3.1 Akse-vektorer og akse-matricer

Skævsymmetriske $3 \times 3-$matricer er altså – efter opgave 7.9 – ret simple i den forstand, at de kan beskrives ved tre elementer. Og tre elementer er jo netop også tilstrækkelige og nødvendige til beskrivelse af en vektor i rummet. Følgende sætning er derfor ikke så overraskende (vi vil igen formulere sætningen med $\boldsymbol{\Omega}$, fordi vi især skal bruge sætningen for de skævsymmetriske matricer $\boldsymbol{\Omega}(t)$, som vi fandt ovenfor i forbindelse med undersøgelsen af tidsafhængige rotationer $\mathbf{R}(t)$) :



Figur 7.4: Rotationen af tetraederet i 7.3 med samme rotationsmatrix (fra den polære dekomposition i eksempel 7.4), men her med fast fodpunkt i Origo. Animeret.

Sætning 7.10 Lad $\mathbf{\Omega}$ være en vilkårlig given skævsymmetrisk $3 \times 3-$matrix. Så findes der en entydigt bestemt vektor $\boldsymbol{\omega}$, således at

$$\mathbf{\Omega v}^* = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \tag{7.19}$$

og den vektor $\boldsymbol{\omega}$ er simpelthen givet ved de tre elementer fra $\mathbf{\Omega}$ som er markeret i opgave 7.9 ovenfor:

$$\boldsymbol{\omega} = (\alpha, \beta, \gamma) = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21}) \quad . \tag{7.20}$$

Bevis. Vi skal bare vise, at den påståede vektor $\boldsymbol{\omega}$ har den ønskede egenskab og at det er den eneste vektor med den egenskab. Men det følger af de direkte udregninger:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})^* = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.22}$$

Altså samme resultat for alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Det vil sige, at den anviste vektor $\boldsymbol{\omega}$ faktisk opfylder (7.19). Vi mangler så kun at vise, at det er den eneste vektor der kan bruges. Hvis $\boldsymbol{\eta}$ er en anden vektor med den samme egenskab som $\boldsymbol{\omega}$, altså at den også opfylder (7.19), så er specielt også

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\eta})\times\mathbf{v})^* &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* = \mathbf{0}^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \quad \text{dvs.} \\ (\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\eta})\times\mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \end{aligned} \tag{7.23}$$

og *det* er kun muligt for $\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ (hvorfor det?), så $\boldsymbol{\eta}$ kan ikke være *en anden* vektor end $\boldsymbol{\omega}$, og det var det, vi skulle vise. □

Definition 7.11 Hvis $\boldsymbol{\Omega}$ er en vilkårlig givet skævsymmetrisk 3×3−matrix med de 9 elementer Ω_{ij}, så kalder vi

$$\boldsymbol{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$$

den til $\boldsymbol{\Omega}$ associerede akse-vektor.

Den omvendte sætning gælder også:

Sætning 7.12 Lad $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ være en vilkårlig givet vektor i rummet. Så findes der en entydigt bestemt skævsymmetrisk matrix $\boldsymbol{\Omega}$, således at

$$(\omega\times\mathbf{v})^* = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \tag{7.24}$$

og den matrix $\boldsymbol{\Omega}$ er givet ved de tre elementer fra $\boldsymbol{\omega}$ således

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.25}$$

Bevis. Ligesom for sætning 7.10. □

Definition 7.13 Hvis $\boldsymbol{\omega}$ er en vilkårlig given vektor med koordinaterne $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, så kalder vi

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

den til $\boldsymbol{\omega}$ associerede akse-matrix.

OPGAVE 7.14

En skævsymmetrisk matrix $\mathbf{\Omega}$ har følgende kendte elementer:

$$\Omega_{12} = 3 \quad , \quad \Omega_{13} = -4 \quad , \quad \Omega_{23} = 1 \quad . \tag{7.26}$$

Bestem den til $\mathbf{\Omega}$ associerede aksevektor.

OPGAVE 7.15

En given vektor $\boldsymbol{\omega}$ har egenskaberne:

$$\boldsymbol{\omega} \times (1,1,0) = (-3,3,-1) \quad , \quad \boldsymbol{\omega} \times (0,1,1) = (-1,-1,1) \quad . \tag{7.27}$$

Bestem den til $\boldsymbol{\omega}$ associerede aksematrix.

7.4 Tidsafhængige rotationsmatricer

Som allerede udviklet ovenfor får vi skævsymmetriske matricer serveret en masse ved til ethvert tidspunkt at danne en ganske bestemt produktmatrix ud fra en given tidsafhængig rotationsmatrix

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad , \tag{7.28}$$

Lad os begynde med de simpleste rotationer, koordinat-akse-rotationerne, som vi først stiftede bekendtskab med i 4.18.

OPGAVE 7.16

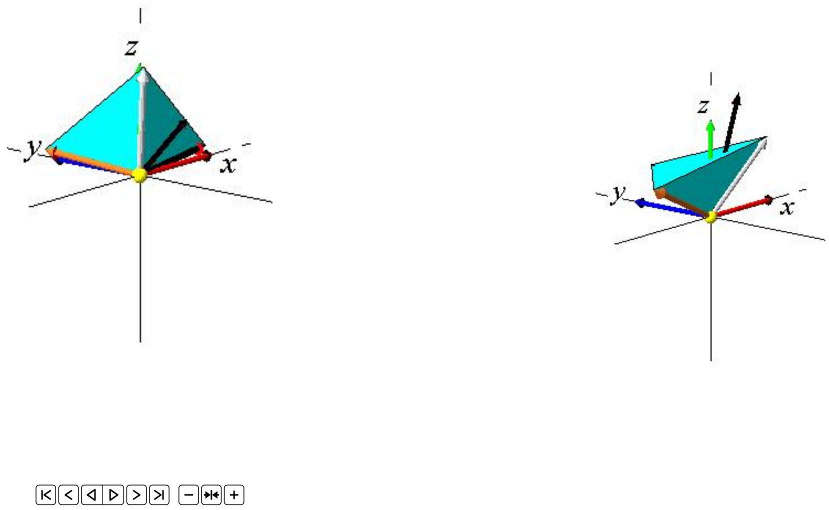
Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$ som defineret i 4.18. (Bemærk, at vi har udskiftet den uafhængige variable w med tiden t.) Dvs.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.29}$$

Bestem for enhver værdi af t den skævsymmetriske matrix $\mathbf{\Omega}(t)$ efter forskriften 7.28, og bestem dernæst den til $\mathbf{\Omega}(t)$ associerede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$ for ethvert tidspunkt t.

OPGAVE 7.17

Samme opgave som ovenfor, men nu for de to andre elementar-rotationer, henholdsvis $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(t)$ og $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t)$.



Figur 7.5: Rotationen af tetraederet i figur 7.4 – nu med tilhørende akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Animeret.

OPGAVE 7.18

Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t))$, hvor $\theta(t)$ er en givet funktion af t, altså

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.30}$$

Bestem $\boldsymbol{\Omega}(t)$ og den associerede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Vink: Det kan være en god idé først at bestemme $\boldsymbol{\omega}(t)$ for et specielt, konkret, valg af vinkelfunktion $\theta(t)$, for eksempel $\theta(t) = 7t$.

OPGAVE 7.19

Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(t)$. Bestem $\boldsymbol{\Omega}(t)$ og den associerede aksevektor-funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$.

7.4.1 Rotationer med given akse-vektor-funktion

Hvis vi har fået givet en vektorfunktion $\boldsymbol{\omega}(t)$, kan vi så finde en rotation $\mathbf{R}(t)$ der har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som aksevektor til ethvert tidspunkt t ? Det er ikke svært, vi skal jo 'bare' finde $\mathbf{R}(t)$, således at

$$\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \quad , \tag{7.31}$$

hvor $\mathbf{\Omega}(t)$ er den aksematrix, der til tidspunktet t har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som associeret aksevektor. Ligningen er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo stadig har at $\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$:

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \quad . \tag{7.32}$$

Det vil sige, vi skal bestemme $\mathbf{R}(t)$ sådan at følgende ligning er opfyldt:

$$\mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} ,$$

hvor vi har brugt definition 7.13 og indsat de kendte koordinatfunktioner for $\boldsymbol{\omega}(t)$ i aksematricen.

Det vil sige, at hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ skal opfylde det samme differentialligningssystem bestående af 3 koblede lineære ligninger med 3 ubekendte funktioner:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r'_{11}(t) \\ r'_{21}(t) \\ r'_{31}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}(t) \\ r_{21}(t) \\ r_{31}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r'_{12}(t) \\ r'_{22}(t) \\ r'_{32}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12}(t) \\ r_{22}(t) \\ r_{32}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r'_{13}(t) \\ r'_{23}(t) \\ r'_{33}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13}(t) \\ r_{23}(t) \\ r_{33}(t) \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{7.33}$$

Hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ tilfredsstiller altså *et og samme* differentialligningssystem, dvs. de har *fælles* systemmatrix $\mathbf{\Omega}(t)$.

Hvis vi kalder de tilsvarende vektorer - svarende til koordinatsøjlerne i $\mathbf{R}(t)$ - henholdsvis $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$, således at

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.34}$$

så er (7.33) ækvivalent med:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^{*}(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t)\,\mathbf{e}^{*}(t) \\ \mathbf{f}'^{*}(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t)\,\mathbf{f}^{*}(t) \\ \mathbf{g}'^{*}(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t)\,\mathbf{g}^{*}(t) \quad , \end{aligned} \tag{7.35}$$

Hvis vi skriver de 3 ligninger på kompakt form, så får vi netop den ligning vi startede med, ligning (7.32):

$$\begin{aligned} \left[\ \mathbf{e}'^{*}(t) \quad \mathbf{f}'^{*}(t) \quad \mathbf{g}'^{*}(t)\ \right] &= \boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\left[\ \mathbf{e}^{*}(t) \quad \mathbf{f}^{*}(t) \quad \mathbf{g}^{*}(t)\ \right] \\ \mathbf{R}'(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\mathbf{R}(t) \quad , \end{aligned} \tag{7.36}$$

så pengene passer!

Men ved at indføre vektorerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ kan vi skrive ligningerne i (7.35) ved hjælp af den til $\boldsymbol{\Omega}(t)$ associerede akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{g}(t) \end{aligned} \tag{7.37}$$

Der er altså flere forskellige måder at udtrykke differentialligningerne på, når vi skal finde $\mathbf{R}(t)$ med en given akse-vektor-funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Lad os se på et første simpelt eksempel:

|||| Eksempel 7.20

Lad $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og antag, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$. Vi vil finde den rotation $\mathbf{R}(t)$, som hører til rotations-akse-vektor-funktionen $\boldsymbol{\omega}(t)$, og som tilfredsstiller den givne begyndelsesbetingelse. Den første vektor-differentialligning i (7.37) kan vi skrive således:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= (0,0,2)\times\mathbf{e}(t) \\ (e_1'(t),e_2'(t),e_3'(t)) &= (0,0,2)\times(e_1(t),e_2(t),e_3(t)) \\ (e_1'(t),e_2'(t),e_3'(t)) &= (-2e_2(t),2e_1(t),0) \\ \begin{bmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{7.38}$$

Det system har løsningerne (den fuldstændige løsningsmængde):

$$\begin{aligned} e_3(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ e_2(t) &= -c_2\cos(2t) + c_1\sin(2t) \quad , \end{aligned} \tag{7.39}$$

hvor c_1, c_2, og c_3 er vilkårlige (arbitrære) konstanter. De konstanter fastlægges via begyndelsesbetingelserne til tiden $t = 0$, som for den første søjle-vektor $\mathbf{e}(0)$ i $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er følgende: $e_3(0) = 0$, så $c_3 = 0$; $e_1(0) = 1$, så $c_1 = 1$; den sidste betingelse, $e_2(0) = 0$ giver endelig $c_2 = 0$.

Løsningen for vektorfunktionen $\mathbf{e}(t)$ er derfor:

$$\mathbf{e}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0) \quad . \tag{7.40}$$

Tilsvarende kan den samme fuldstændige løsning fra (7.39) benyttes til bestemmelse af $\mathbf{f}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$. Det er kun begyndelsesbetingelserne, der er forskellige. Resultaterne er:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= (-\sin(2t), \cos(2t), 0) \\ \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1) \quad , \end{aligned} \tag{7.41}$$

således at den søgte rotation $\mathbf{R}(t)$ er:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\ \mathbf{e}^*(t) \quad \mathbf{f}^*(t) \quad \mathbf{g}^*(t)\ \right] = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.42}$$

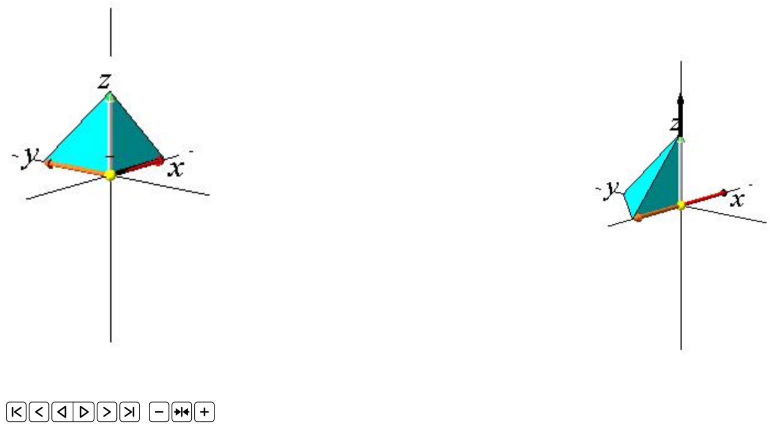
|||| OPGAVE 7.21

Eftervis ved direkte udregning, at den fundne løsning i eksempel 7.20 ovenfor faktisk *er* en løsning, både til differentialligningssystemet $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$ og til begyndelsesværdi-kravet: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$.

|||| OPGAVE 7.22

Bestem på samme måde som i eksempel 7.20 de rotationer $\mathbf{R}(t)$ som giver nedenstående akse-vektorfunktioner $\boldsymbol{\omega}(t)$, idet det igen antages, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (1, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t^2) \quad . \end{aligned} \tag{7.43}$$



Figur 7.6: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2\sin(t))$. Animeret.

Eksempel 7.23

Hvis vi lader $\boldsymbol{\omega} = (0,0,(\pi/2)\sin(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ fås ved løsning af differentialligningssystemerne ovenfor den rotation, som ses i figur 7.6. Akse-vektor-funktionen er også vist der. Løsningen er givet ved:

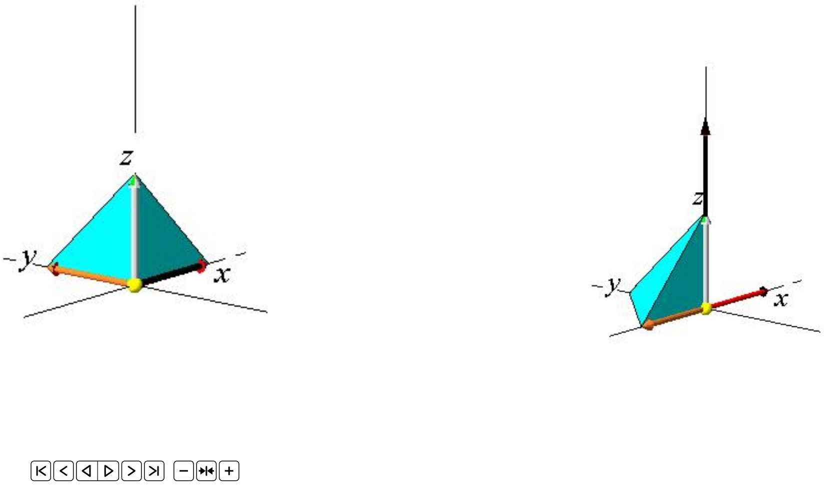
$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi\cos(t)/2) & -\cos(\pi\cos(t)/2) & 0 \\ \cos(\pi\cos(t)/2) & \sin(\pi\cos(t)/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{7.44}$$

OPGAVE 7.24

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.23, ligning (7.44), er korrekt.

Eksempel 7.25

Hvis vi lader $\boldsymbol{\omega} = (0,0,2\sin^2(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$, så får vi (ved numerisk løsning af differentialligningssystemerne ovenfor) den rotation, som er vist i figur 7.7.



Figur 7.7: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2\sin^2(t))$. Animeret.

Eksempel 7.26

Rotations-akse-vektoren $\boldsymbol{\omega} = (\cos(t), \sin(t), 1)$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er benyttet i figur 7.8. Rotations-løsningen er:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} . \tag{7.45}$$

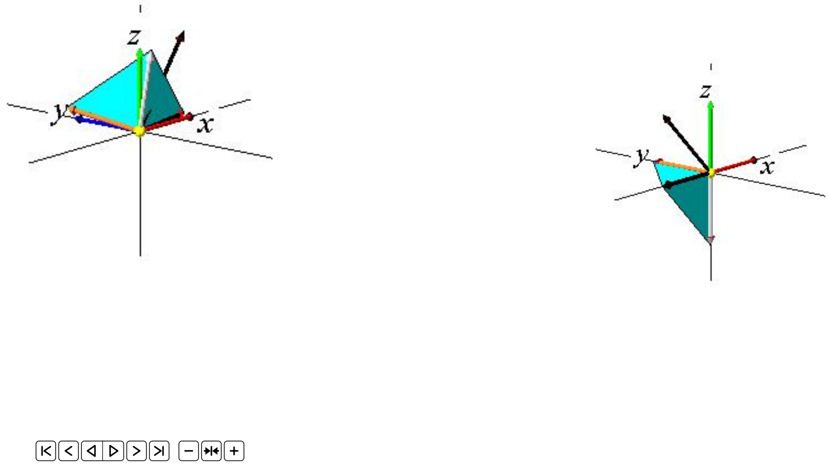
OPGAVE 7.27

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.26, ligning (7.45), er korrekt.

7.5 Outlook

Med de værktøjer, vi nu har kridtet banen op med, er vi parate til at undersøge, hvordan punkterne inde i et tetraeder $\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t))$ bevæger sig, når selve tetraederet fremkommer ved rotation af et basistetraeder med en rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, samtidig med at fodpunktet bevæges via en given forskrift $p(t)$.

For eksempel kan vi som en første naturlig opgave undersøge bevægelsen af et hjørnepunkt i tetraederet, for eksempel det hjørnepunkt $q(t)$, der er spidspunkt for $\mathbf{a}(t)$ når vi benytter $p(t)$ som



Figur 7.8: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\omega(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$. Animeret.

fodpunkt for $\mathbf{a}(t)$. Hvis vi kalder stedvektoren til $p(t)$ for $\mathbf{p}(t)$, så er stedvektoren til $q(t)$ givet ved:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{7.46}$$

Eksempel 7.28

Hvis vi betragter den konkrete rotation af basistetraederet, som stammer fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ i eksempel 7.4, dvs. den rotation, der er vist i figur 7.3, så er banekurven for $q(t)$ den kurve, der er vist i figur 7.9.

I et følgende kapitel vil vi blandt andet undersøge farten og retningen af bevægelsen af punktet $q(t)$, altså hastighedsvektoren for bevægelsen af punktet til ethvert tidspunkt t.

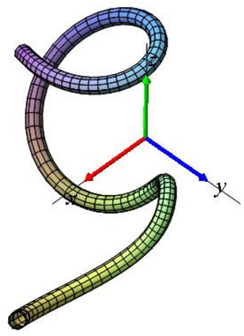
Bemærk, at farten og retningen af bevægelsen af fodpunktet $p(t)$ er direkte givet ved den tidsafledede af stedvektoren til $p(t)$:

$$\mathbf{p}'(t) = (p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t)) \quad , \tag{7.47}$$

og helt tilsvarende har vi fra 7.46

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad . \tag{7.48}$$

Da $\mathbf{a}(t)$ er fremkommet ved at gange $\mathbf{R}(t)$ på koordinatsøjlen for den første kantvektor i basistetraederet, altså for basisvektoren $\mathbf{i}$, så er koordinatsøjlen for $\mathbf{a}(t)$ præcis den første søjle i $\mathbf{R}(t)$.



Figur 7.9: Banekurve for hjørnepunkt i det roterede tetraeder i figur 7.3

Vektoren $\mathbf{a}(t)$ er altså (når vi betragter rotationer) den vektor, som vi har kaldt $\mathbf{e}(t)$ i ligning 7.34. Det vil sige, at

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{e}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \tag{7.49}$$

men så har vi jo fra ligning (7.37), at

$$\mathbf{q}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \tag{7.50}$$

hvor $\boldsymbol{\omega}(t)$ er den til rotationen $\mathbf{R}(t)$ associerede akse-vektor-funktion. Tilsvarende udtryk etableres lige så let for hastighederne af bevægelsen af de to resterende hjørnepunkter i tetraederet.

Kapitel 8

Styring langs krumme kurver

I dette kapitel vil vi som lovet se nærmere på, hvordan vi kan benytte fodpunktskurven $p(t)$ og fodpunktskurvens geometriske egenskaber, såsom krumning og torsion (der defineres nedenfor), til at kontrollere og styre bevægelserne af tetraedrene i rummet. Selve styringen af tetraederne beskrives først til allersidst – i afsnit 8.6.

8.1 Tids-parametriserede regulære kurver

Vi repeterer lidt fra kapitel 7: Et punkt p der bevæger sig i rummet har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{8.1}$$

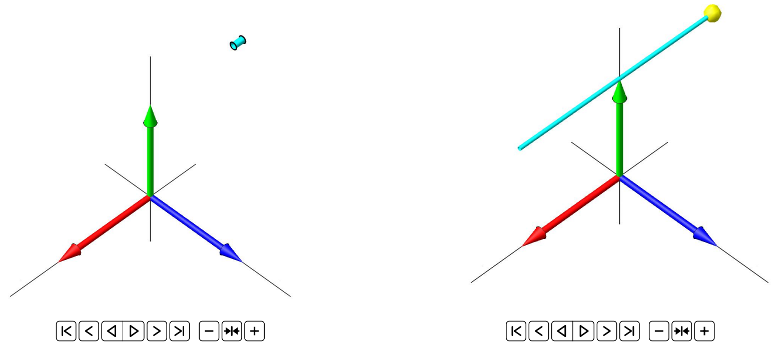
hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet, f.eks. $I = [a, b]$, og hvor $p_1(t)$, $p_2(t)$ og $p_3(t)$ er 3 funktioner af t. Vi vil typisk antage, at disse tre koordinatfunktioner er glatte funktioner, dvs. de kan differentieres et vilkårligt antal gange.

Stedvektoren fra O til punktet $p(t)$ betegnes naturligvis med vektor-notation som følger, idet koordinaterne for stedvektoren opløst efter basisvektorerne $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ netop er de samme som (x, y, z)-koordinaterne for $p(t)$. Derved får vi (sted)-vektor-funktionen $\mathbf{p}(t)$ til beskrivelse af bevægelsen langs kurven:

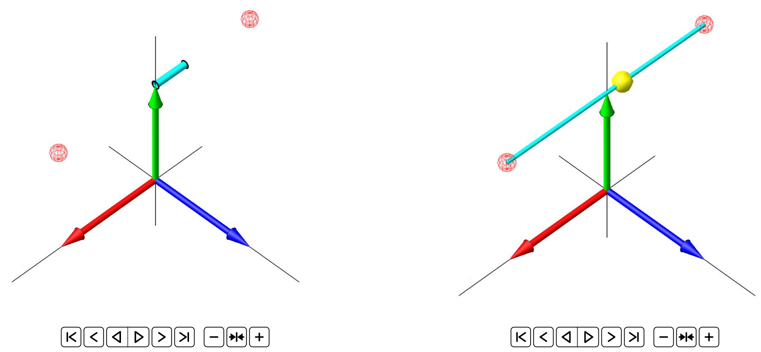
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad . \tag{8.2}$$

OPGAVE 8.1

En cirkel $\mathcal{C}$ i (x, y)-planen er bestemt ved at cirklens radius er 3 og cirklens centrum ligger i punktet $(2, 1, 0)$. Bestem en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), 0)$ af cirklen med tilhørende tidsinterval I således at punktet $p(t)$ (dvs. spidspunktet af $\mathbf{p}(t)$) gennemløber cirklen netop én gang.



Figur 8.1: Simpel konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet. Animeret.



Figur 8.2: Singulær og selv-overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figur 8.1. Animeret.

Definition 8.2 En parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$, $t \in I$, af en kurve er en regulær parameterfremstilling hvis

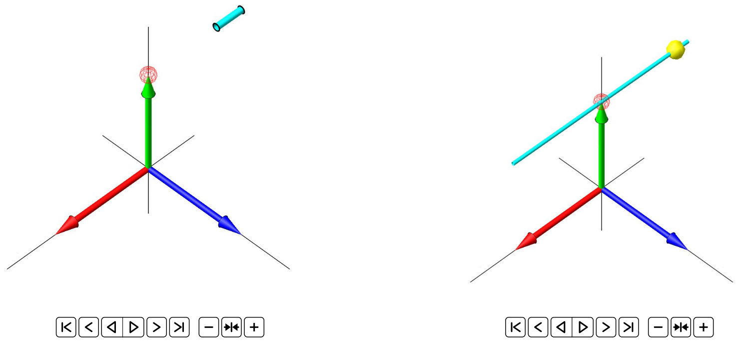
$$\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle } t \in I \quad . \tag{8.3}$$

Parameterfremstillingen er tilsvarende singulær for $t = t_0 \in I$ hvis $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$.

OPGAVE 8.3

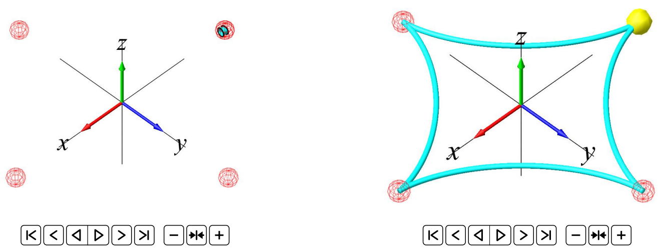
I figurerne 8.2 og 8.3 markerer de røde punkter singulære punkter for den anvendte og animerede parameterfremstilling. Konstruér singulære parameterfremstillinger af den viste rette linje, sådan at de singulære punkter for dine parameterfremstillinger optræder netop i de viste punkter.

En given kurve har uendelig mange meget forskellige parameterfremstillinger. Selv om en given kurve (f.eks. en ret linje) har en regulær parameterfremstilling, så behøver ikke alle parameterfremstillinger af den samme kurve at være regulære.



Figur 8.3: Singulær men *ikke* overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figurerne 8.1 og 8.2. Animeret.

Nogle kurver, som f.eks. asteroiden, $\mathbf{p}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$ som er vist i figur 8.4, har ikke nogen som helst parameterfremstilling, der er regulær overalt. Se f.eks. http://en.wikipedia.org/wiki/Astroid.



Figur 8.4: Konstruktion af – og bevægelse på – en asteroidekurve (i (x, y)-planen). Denne parametrisering har 4 singulære punkter. Enhver parametrisering har mindst disse 4 singulære punkter. Animeret.

8.2 Buelængde-parametriserede kurver

Med henblik på at gøre *analysen* af kurverne meget lettere vil vi nedenfor ofte antage, hvor det er muligt, at de kurver vi betragter, er parametriserede på en sådan måde, at farten er konstant 1, dvs. at hastighedsvektoren $\mathbf{p}'(t)$ har konstant længde 1. Den antagelse kan vi udtrykke på forskellige måder:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}'(t)\| &= 1 \\ \|(p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t))\| &= 1 \\ \sqrt{p_1'^2(t) + p_2'^2(t) + p_3'^2(t)} &= 1 \\ \sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)} &= 1 \\ \|(v_1(t), v_2(t), v_3(t))\| &= 1 \\ \|\mathbf{v}(t))\| &= 1 \quad , \end{aligned} \tag{8.4}$$

hvor vi også har indført og brugt betegnelsen $\mathbf{v}(t)$ for hastighedsvektoren ($\mathbf{v}$ for velocity) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$.

OPGAVE 8.4

Hvilke af følgende kurver, som er angivet ved stedvektor-funktionerne $\mathbf{p}(t)$, har konstant fart 1 ? Alle tidsintervaller er hele den reelle talakse $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} i) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, 1, t) \\ ii) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, t, t^2) \\ iii) &\quad \mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3) \\ iv) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, \cos(t), \sin(t)) \\ v) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, 2\cos(t), 2\sin(t)) \\ vi) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, \cos(2t), \sin(2t)) \\ vii) &\quad \mathbf{p}(t) = (t, \cos(t), \sin(t)) \\ viii) &\quad \mathbf{p}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.5}$$

OPGAVE 8.5

En kurve - en såkaldt helix eller vindellinje - er givet som følger, hvor a og b betegner to konstanter, der ikke begge er 0:

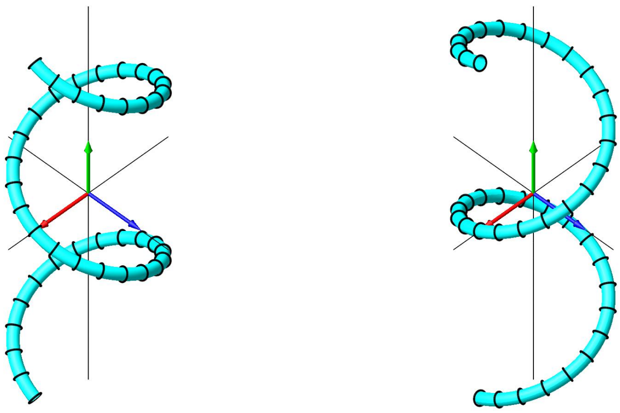
$$\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.6}$$

1. Tegn (eller plot) selv kurven for forskellige valg af a og b. Se eksempler i figurerne 8.5 og 8.6.

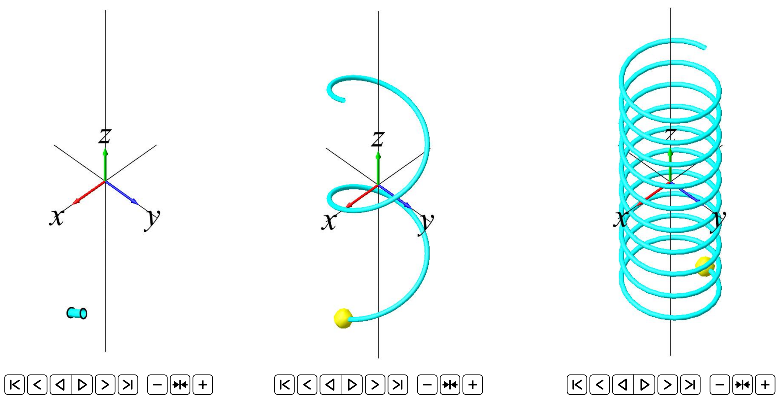
2. Forklar, hvorfor det er rimeligt, at den ene kurve i figur 8.5 kaldes højreskruet og den anden venstreskruet.

3. Undersøg hvilke værdier for a og b der giver højreskruning og hvilke der giver venstreskruning. Prøv evt. først med $(a,b) = (1,1)$, $(a,b) = (1,-1)$, $(a,b) = (-1,1)$, $(a,b) = (-1,-1)$.

4. Find for enhver værdi af a og b farten $\|\mathbf{p}'(t)\|$ af den tilhørende bevægelse langs kurven udtrykt ved a og b når bevægelsesforskriften er den ovenfor givne $\mathbf{p}(t)$.



Figur 8.5: En venstreskruet og en højreskruet helix.



Figur 8.6: Konstruktion af – og bevægelse på – vindellinjer. Vindellinjen til højre er venstreskruet med lille 'pitch' (dvs. den højde som punktet løftes ved én omgang) og forholdsvis høj konstant fart. Animeret.

8.2.1 Hvordan omparametriseres til buelængde?

Regulære kurver kan omparametriseres til buelængde-parametrisering:

Sætning 8.6 En given regulær kurve $\mathbf{p}(t)$, $t \in I = [a,b]$, med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle $t \in I$ omparametriseres ved hjælp af funktionen $S(t)$ som er givet ved:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{p}'(u)\|\, du \quad \text{for alle } t \in I = [a,b] \quad , \tag{8.7}$$

hvor $t_0 \in [a,b]$ er et fast valgt startpunkt (t_0 behøver ikke at være a) for integrationen.

Funktionen $S(t)$ er en voksende glat funktion på hele t-intervallet $[a,b]$, så der findes en omvendt funktion $T(s)$ som ligeledes er en voksende glat funktion på hele det tilsvarende s-interval $S(I) = [S(a), S(b)] = [\alpha, \beta]$.

Den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ har farten $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$.

Den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ er dermed buelængdeparametriseret fordi s måler præcis buelængden med fortegn af kurvestykket fra punktet $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}(T(0)) = \boldsymbol{\eta}(0)$ til punktet $\mathbf{p}(T(s)) = \boldsymbol{\eta}(s)$ på kurven. Fortegnet på s afgøres af om punktet $\boldsymbol{\eta}(s)$ ligger før (så er $s < 0$) eller efter (så er $s > 0$) startpunktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ på kurven.

Længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet $\mathbf{p}(T(s_1)) = \boldsymbol{\eta}(s_1)$ og punktet $\mathbf{p}(T(s_2)) = \boldsymbol{\eta}(s_2)$ er derfor $L = |s_2 - s_1|$. Dette gør det naturligvis igen rimeligt at sige, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ buelængdeparametriseret.

Bemærk, at funktionen $S(t)$ sagtens kan antage negative værdier i intervallet $t \in [a,b]$ – det forekommer jo netop i de tilfælde hvor $t_0 > a$ således at $S(t) < 0$ for alle $t < t_0$ ifølge definitionen af $S(t)$ i (8.7).

Bevis

Funktionen $S(t)$ er en voksende funktion: Det følger af, at $S'(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$ på hele t-intervallet $[a,b]$. Da $T(s)$ er defineret til at være den omvendte funktion af $S(t)$ har vi per den definition: $T(S(t)) = t$ for alle $t \in [a,b]$ og $S(T(s)) = s$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$. Specielt har vi derfor også (fra kædereglen eller direkte fra differentiationsreglen for omvendte funktioner):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(S(t)) &= 1 \\ S'(t) \cdot T'(s) &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Vi kan nu bruge det til at vise, at farten af $\boldsymbol{\eta}(s)$ er 1, altså at $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\| &= \|\frac{d}{ds} \boldsymbol{\eta}(s)\| \\ &= \|\frac{d}{ds} \mathbf{p}(T(s))\| \\ &= |T'(s)| \cdot \|\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)_{|_{t=T(s)}}\| \\ &= |T'(s)| \cdot \|\mathbf{p}'(t)_{|_{t=T(s)}}\| \\ &= |T'(s) \cdot S'(t)| \\ &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Og heraf følger dernæst endelig, at længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet $\mathbf{p}(T(s_1)) =$

$\boldsymbol{\eta}(s_1)$ og punktet $\mathbf{p}(T(s_2)) = \boldsymbol{\eta}(s_2)$ er $L = |s_2 - s_1|$. Vi har nemlig:

$$\begin{aligned} L &= |\int_{s_1}^{s_2} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\|\, ds| \\ &= |\int_{s_1}^{s_2} 1\, ds| \\ &= |s_2 - s_1| \quad . \end{aligned} \tag{8.10}$$

■

Sætning 8.6 kan tolkes således: Hvis det er muligt at køre på en vej uden at stoppe op (men med tilladte accelerationer og decelerationer), så er det også muligt at køre med konstant fart på den samme vej hele vejen fra den ene ende til den anden. Hvis farten er konstant 1 så kan man aflæse tiden på kilometertælleren og man kan aflæse det kørte antal kilometer på sit stopur. (Hvorfor og hvordan?)

Det er ikke muligt at køre på asteroiden uden at stoppe op mindst i de 4 singulære punkter, som er fremhævet i figur 8.4.

Eksempel 8.7

Vi ser på en simpel tidsparametriseret regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ og omparametriserer den på følgende måde:

$$\mathbf{p}(t) = (3t - 1\,,\, 3t - 2\,,\, 0)\;,\; t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (3,3,0) \\ \|\mathbf{p}'(t)\| &= 3\sqrt{2} \\ S(t) &= \int_{t_0=0}^{t} 3\sqrt{2}\, du \quad , \quad \text{ved valg af integrationsstart i } t_0 = 0 \\ S(t) &= 3\sqrt{2}\, t \\ T(s) &= \frac{s}{3\sqrt{2}} \quad , \quad \text{den omvendte funktion} \quad , \end{aligned} \tag{8.11}$$

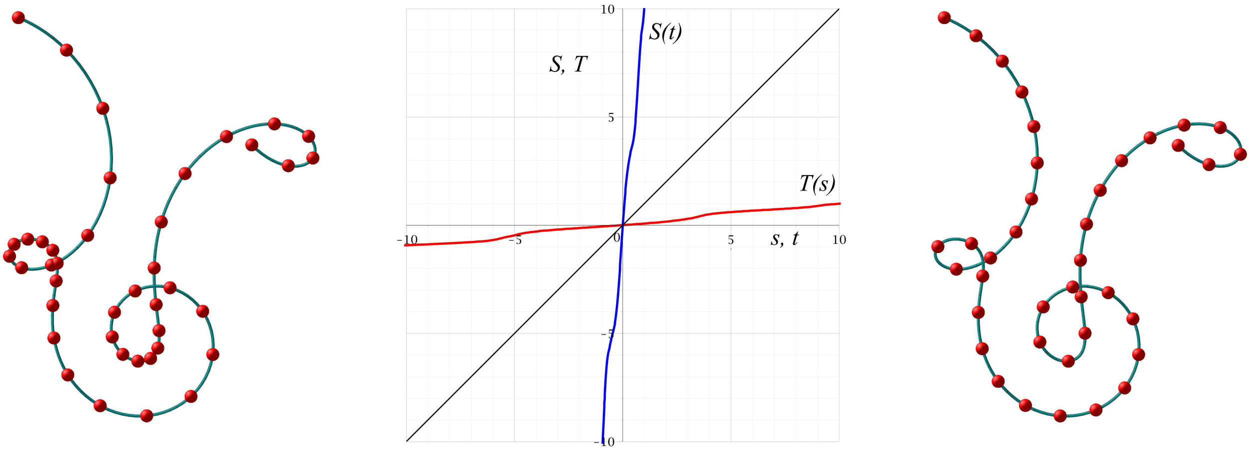
således at vi nu får den buelængde parametriserede kurve ved at indsætte $T(s)$ på t-pladsen i $\mathbf{p}(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(s) &= \mathbf{p}(T(s)) = (3T(s) - 1\,,\, 3T(s) - 2\,,\, 0)\;,\; s \in [S(0), S(1)] = [0, 3\sqrt{2}] \\ \boldsymbol{\eta}(s) &= \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1\,,\, \frac{s}{\sqrt{2}} - 2\,,\, 0\right)\;,\; s \in [0, 3\sqrt{2}] \quad . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Det kan være umuligt at finde både funktionen $S(t)$ og den omvendte funktion $T(s)$ udtrykt ved sædvanlige funktionstegn. Begge funktionerne kan dog approksimeres vilkårligt godt f.eks. med spline funktioner.

OPGAVE 8.8

Se Maple's kommando [Spline] via Maple pakken [> with(CurveFitting);]. Find ud af, hvordan [Spline] kommandoen kan benyttes til at finde vilkårligt gode approksimationer til begge funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ ud fra en passende valgt sekvens af punkter på grafen for $S(t)$.



Figur 8.7: En plan kurve $\mathbf{p}(t)$ med tids-parametriseret markering til venstre og buelængde-parametriseret markering $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ til højre. I midten: Funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ for kurven. Bemærk, at her er $T(0) = S(0)$ og derfor $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{p}(0)$.

OPGAVE 8.9

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende t-parametriserede kurve

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (t^3, 0, 0) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{8.13}$$

Vis, at den kurve *ikke* har positiv fart for alle t (parameterfremstillingen er altså ikke regulær), men at kurven (alligevel) kan omparametriseres til en enhedsfart-parametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s)) = (T(s)^3, 0, 0)$, som dermed er en regulær parametrisering.

OPGAVE 8.10

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende halv-cirkel med radius $a > 0$:

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (a\cos(t), a\sin(t), 0) \quad , \quad t \in [0, \pi] \quad . \tag{8.14}$$

1. Bestem $S(t)$ og den omvendte funktion $T(s)$ sådan at omparametriseringen $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ giver en parametrisering af halvcirklen med enhedsfart.

2. Angiv et interval for parameteren s således at $\boldsymbol{\eta}(s)$ gennemløber præcis samme punktmængde som $\mathbf{p}(t)$, $t \in [0, \pi]$, netop én gang.

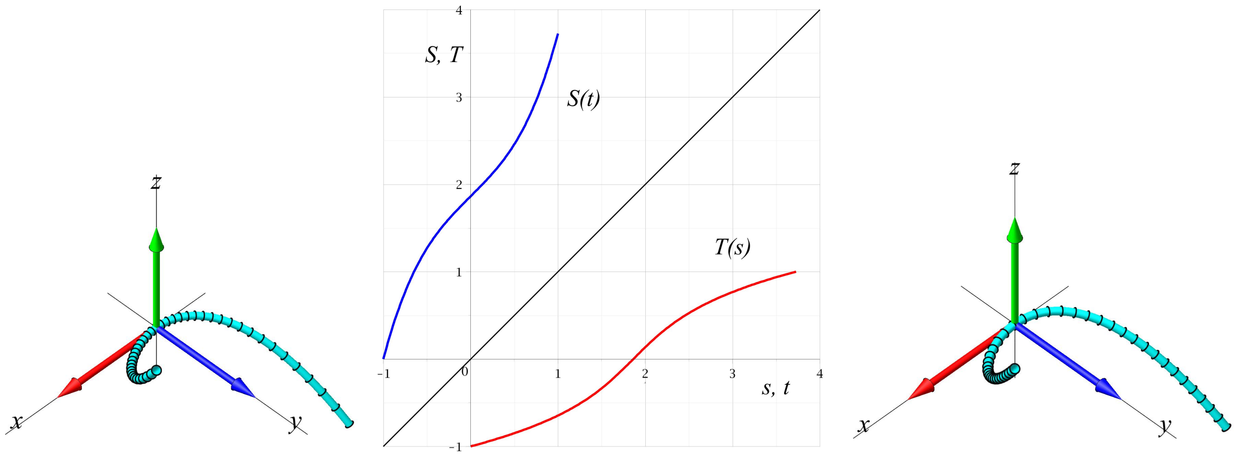
OPGAVE 8.11

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende kurve:

$$\mathbf{p}(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}) \quad , \quad t \in]-1,1[\quad . \tag{8.15}$$

Tegn (plot) kurven, og vis, at den faktisk allerede er enhedsfart-parametriseret.

Som allerede antydet: Når en kurve er enhedsfart-parametriseret vil vi ofte bruge notationen s for parameteren og betegnelsen $\boldsymbol{\eta}(s)$ for kurven med den parametrisering - eller bemærke eksplicit, om parametriseringen har enhedsfart eller ej.



Figur 8.8: Til venstre: Den t-parametriserede kurve $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [-1,1]$. I midten: Funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ for kurven. Til Højre: Den s-parametriserede kurve. Sammenlign også med den plane kurve i figur 8.7 hvor forskellen mellem t-parametrisering og s-parametrisering er endnu tydeligere.

8.3 Krumning og torsion

I dette og de følgende afsnit vil vi definere krumning og torsion for regulære rumkurver.

Vi vil i begyndelsen antage, at rumkurven allerede *er* givet på buelængde-parametriseret form (og derefter – i afsnit 8.4 – bruge de fundne resultater til at vise hvordan krumning og torsion kan udtrykkes for en vilkårlig *tids-parametriseret version* af den samme kurve):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad s \in [\alpha, \beta] \quad . \tag{8.16}$$

Vi ønsker naturligt nok, at krumningen er en funktion af s, der fortæller hvor meget kurven bøjer i og omkring stedet $\boldsymbol{\eta}(s)$ og at torsionen er en funktion af s, der fortæller hvor meget kurven spiralerer i og omkring stedet $\boldsymbol{\eta}(s)$. Vi skal altså helst definere krumning sådan at en lille cirkel (med lille radius) har stor krumning og en stor cirkel (med stor radius) har lille krumning. Og vi skal definere torsionen sådan at de tidligere viste helix-vindellinjer har en torsion der på tilsvarende måde kan beskrive størrelsen af deres spiralering (snoning) samt fortælle, om de er højre- eller venstre-snoede.

Hermed har vi så allerede to naturlige spørgsmål:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?
2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det finder vi ud af nedenfor.

Hvis kurven ikke er givet på buelængde-parametriseret form, men måske kun råt som en regulær tids-parametriseret rumkurve $\mathbf{p}(t)$, så er der to muligheder for at bestemme kurvens krumning og torsion på ethvert sted $\mathbf{p}(t)$: Enten omparametriseres kurven til en buelængdeparametriseret form – og så kan formlerne fra dette og de efterfølgende fire afsnit benyttes – eller også bruges formlerne fra afsnit 8.4 direkte ved at regne på $\mathbf{p}(t)$ og de t-afledede af $\mathbf{p}(t)$. Det er nemlig ikke nødvendigt at omparametrisere først! Grunden til at vi indfører krumning og torsion ved hjælp af den buelængde-parametriserede version af kurven er dels, at det er meget lettere og dels, at den strategi (stort set) allerede viser, at de to funktioner kun afhænger af den regulære kurve selv – betragtet som en organiseret punktmængde i rummet – og ikke af hvilken parametrisering, der benyttes.

8.3.1 Krumning

Definition 8.12 For en given buelængde-parametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ definerer vi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) \quad \text{dette er enheds-tangentvektoren til kurven} \\
\kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| \quad \text{dette er definitionen på krumning: længden af accelerationsvektoren} \quad .
\end{aligned} \tag{8.17}
$$

Krumningen af kurven på stedet $\boldsymbol{\eta}(s)$ defineres altså som længden af accelerationsvektoren når kurven er buelængde-parametriseret.

Hvis $\kappa(s) > 0$ kan vi definere en ny enheds-vektor $\mathbf{f}(s)$ ved hjælp af accelerationsvektoren $\eta''(s)$ således:

$$
\mathbf{f}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\eta}''(s) \quad , \quad \text{for} \quad \kappa(s) > 0 \quad , \tag{8.18}
$$

og dermed endelig en tredje enhedsvektor $\mathbf{g}(s)$ ved hjælp af krydsproduktet af $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$:

$$
\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(\mathbf{s}) \times \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad , \quad \text{for} \quad \kappa(s) > 0 \quad . \tag{8.19}
$$

Sætning 8.13 De tre vektorer som udover krumningen $\kappa(s)$ er defineret ovenfor (for $\kappa(s) > 0$) består af tre ortogonale enhedsvektorer, $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$.

De udgør derfor for ethvert s langs kurven en ny basis for vektorer i rummet – enhver vektor i rummet kan opløses på entydig måde efter vektorerne $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$. Vi kalder den nye basis Frenet–Serret basen for $\boldsymbol{\eta}(s)$ og betegner den sådan: $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$.

Bemærk, at Frenet–Serret basen afhænger af s og derfor typisk vil ændre sig afhængig af hvor på kurven vi befinder os. Det er illustreret med animationen i figur 8.12 (et godt stykke fremme i teksten).

OPGAVE 8.14

Bestem krumningen $\kappa(s)$ (for enhver værdi af s) for den allerede enhedsfart-parametriserede kurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (3\cos(s/3), 3\sin(s/3), 0) \quad , \quad s \in [0, 6\pi] \quad . \tag{8.20}$$

Bestem tilsvarende for enhver værdi af s de tre Frenet–Serret vektorer $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$. Vis, at de tre fundne vektorer i Frenet–Serret basen er ortogonale enhedsvektorer.

OPGAVE 8.15

Bestem krumningsfunktionen $\kappa(t)$, dvs. krumningen som funktion af t, for den kurve, der har t-parametriseringen

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad , \tag{8.21}$$

hvor $t \in]-1, 1[$. Vink: Se og brug resultatet fra opgave 8.11.

Begrundelsen, beviset, for sætning 8.13 kan ses således:

Bevis

Vektoren $\mathbf{e}(s) = \boldsymbol{\eta}'(s)$ er en enhedsvektor fordi den er hastighedsvektoren for den buelængdeparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$. Vektoren $\mathbf{f}(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)/\kappa(s)$ er en enhedsvektor fordi $\kappa(s)$ netop er længden af $\boldsymbol{\eta}''(s)$. Vektorerne $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ er ortogonale fordi

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{f}(s) &= \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}'(s) \\
&= \left(\frac{1}{2\,\kappa(s)}\right) \frac{d}{ds}\left(\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\,\kappa(s)}\right) \frac{d}{ds}(1) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Da $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ således er ortogonale enhedsvektorer, så er krydsproduktet $\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s)$ ligeledes en enhedsvektor, der står vinkelret på hver af de to vektorer $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$.

■

Eksempel 8.16

Vi lader $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne følgende kurve - en cirkel med radius $a > 0$ i $(x,y)-$planen - som er parametriseret med enhedsfart:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a), 0) \quad . \tag{8.23}$$

Så har vi følgende ingredienser til bestemmelse af krumningen og til konstruktion af Frenet–Serret basis:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\ \boldsymbol{\eta}''(s) &= (-\frac{1}{a}\cos(s/a), -\frac{1}{a}\sin(s/a), 0) \\ \kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| = \frac{1}{a} \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{\boldsymbol{\eta}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0,0,1) \quad . \end{aligned} \tag{8.24}$$

8.3.2 Torsion

Den ovenfor indførte krumning $\kappa(s)$ er øjensynlig den faktor vi skal gange på $\mathbf{f}(s)$ for at få $\mathbf{e}'(s)$ (husk på, at $\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)$):

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{f}(s) \quad . \tag{8.25}$$

Torsionen $\tau(s)$ optræder på samme måde (pånær fortegnet!):

Definition 8.17 Lad $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne en buelængdeparametriseret kurve med $\kappa(s) > 0$ og Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$.

Så definerer vi torsionen $\tau(s)$ for kurven således:

$$\mathbf{g}'(s) = -\tau(s)\,\mathbf{f}(s) \quad . \tag{8.26}$$

Det er nok ikke på forhånd klart, at $\mathbf{g}'(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ altid er proportionale (hvad de jo skal være for at ovenstående definition 8.17 giver mening). Her er et lille argument for det:

Bevis

Vi skal indse, at $\mathbf{g}'(s)$ er parallel med $\mathbf{f}(s)$. Men det følger af, at $\mathbf{g}'(s)$ står vinkelret på enhedsvektoren $\mathbf{g}(s)$ (hvorfor det?) og at $\mathbf{g}'(s)$ også står vinkelret på $\mathbf{e}(s)$, hvilket følger af:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(s) &= \frac{d}{ds}\left(\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}(s)\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds}\mathbf{e}(s)\right)\times\mathbf{f}(s)+\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{0}+\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &\perp \mathbf{e}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.27}$$

Da $\mathbf{g}'(s)$ står vinkelret på både $\mathbf{g}(s)$ og $\mathbf{e}(s)$, så må $\mathbf{g}'(s)$ være proportional med $\mathbf{f}(s)$. Og proportionalitetsfaktoren, torsionen, er derfor veldefineret i definition 8.17. Bemærk, at vi *har* brugt, at $\kappa(s) > 0$.

■

OPGAVE 8.18

Lad $\boldsymbol{\eta}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ betegne en enhedscirkel i (x,y)-planen. Hvad er torsionen for den kurve?

Da vi ved, at Frenet–Serret vektorerne $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$, udgør en basis for alle vektorer i rummet, så kan vi også udtrykke den afledede af $\mathbf{f}(s)$ som en kombination af de tre vektorer:

Sætning 8.19 Lad $\boldsymbol{\eta}(s)$ være en buelængdeparametriseret kurve med krumning $\kappa(s) > 0$, torsion $\tau(s)$, og Frenet–Serret vektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$. Så gælder:

$$\mathbf{f}'(s) = -\kappa(s)\,\mathbf{e}(s) + \tau(s)\,\mathbf{g}(s) \quad . \tag{8.28}$$

Vi får altså ikke nye oplysninger ved at differentiere $\mathbf{f}(s)$.

OPGAVE 8.20

Lad $\boldsymbol{\eta}(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$ betegne en vindellinje i rummet.

1. Hvad er krumning og torsion for den kurve?
2. Bestem Frenet–Serret basis for kurven for ethvert s.
3. Eftervis, at ligning (8.28) er opfyldt i dette tilfælde.

OPGAVE 8.21

Vis ligningen (8.28) og dermed sætning 8.19 helt generelt.

8.3.3 Opsamling for buelængde-parametriserede kurver

Vi samler definitioner og resultater om krumning, torsion, og Frenet–Serret basis for buelængde-parametriserede kurver i følgende sætning. Hvis en given kurve *ikke* er buelængde-parametriseret, så gå straks til den tilsvarende mere generelle sætning for tids-parametriserede kurver i afsnit 8.4, sætning 8.25.

Sætning 8.22 En kurve med parameterfremstillingen $\boldsymbol{\eta}(s)$ og *enhedsfart* $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle s, har krumning $\kappa(s)$, torsion $\tau(s)$, og Frenet–Serret vektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ givet ved følgende udtryk (vi antager, at krumningen er strengt positiv for alle s, $\kappa(s) > 0$):

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| \\ \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)}\left(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \quad , \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\eta}''(s) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.30}$$

De tre Frenet–Serret vektorfunktioner tilfredsstiller følgende ligninger, hvor $\kappa(s) > 0$ betegner kurvens krumning, og $\tau(s)$ betegner kurvens torsion.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= \qquad\quad \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= \qquad -\tau(s)\mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.31}$$

Bevis

Bemærk, at med de givne definitioner af $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$, og $\kappa(s)$ er det faktisk kun det eksplicitte udtryk for torsionen $\tau(s)$, vi mangler at vise.
Ligningen

$$\left(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) = \kappa^2(s)\tau(s) \tag{8.32}$$

fås af følgende ingredienser:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \boldsymbol{\eta}'''(s) &= \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)\mathbf{f}'(s) = \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)\left(-\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s)\right) \\ \boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{f}(s) = \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 0 \quad , \quad \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{g}(s) = 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.33}$$

■

Bemærk rumproduktet i udtrykket for torsionen:

$$
\begin{aligned}
\tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)}\left(\boldsymbol{\eta}'(s)\times\boldsymbol{\eta}''(s)\right)\cdot\boldsymbol{\eta}'''(s) \\
&= \frac{1}{\kappa^2(s)}\,\mathrm{Rum}\left(\boldsymbol{\eta}'(s),\boldsymbol{\eta}''(s),\boldsymbol{\eta}'''(s)\right) \quad .
\end{aligned} \tag{8.34}
$$

OPGAVE 8.23

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Konstanten a antages at være forskellig fra 0, men b kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, og opgave 8.30.

1. Bestem en enhedsfart parametrisering $\boldsymbol{\eta}(s)$ af kurven og brug dén i de følgende to delopgaver.
2. Bestem Frenet–Serret basisvektorfunktionerne $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ for kurven.
3. Bestem kurvens krumning $\kappa(s)$ og torsion $\tau(s)$ for enhver værdi af a og enhver værdi af b.

Dermed har vi nu besvaret de to (nu elementære) spørgsmål fra tidligere:

De to naturlige spørgsmål var:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?
2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det har vi nu fundet ud af!

8.3.4 Den lokale kurve-form

Hvilken indflydelse har krumning og torsion på en kurves forløb i rummet? Hvordan inspicerer vi en given kurve omkring et givet punkt med henblik på at 'se' hvor meget krumning og torsion kurven 'har' i punktet? Det kan vi på følgende måde ved udnyttelse af buelængdeparametrisering og Frenet–Serret basis:

Vi lader $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne en buelængdeparametriseret kurve med positiv krumning. Ved at Taylor-udvikle kurvens koordinatfunktioner med udviklingspunktet $s = 0$ til tredje orden får vi følgende, hvor $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ betegner en epsilon-vektor-funktion med egenskaben $\boldsymbol{\varepsilon}(s) \to \mathbf{0}$ for $s \to 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}(s) &= s\,\boldsymbol{\eta}'(0) + \frac{s^2}{2}\,\boldsymbol{\eta}''(0) + \frac{s^3}{6}\,\boldsymbol{\eta}'''(0) + s^3\boldsymbol{\varepsilon}(s) \\
&= \left(s - \kappa^2(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{e}(0) + \left(\kappa(0)\frac{s^2}{2} + \kappa'(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{f}(0) + \left(\kappa(0)\,\tau(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{g}(0) + s^3\boldsymbol{\varepsilon}(s) \quad .
\end{aligned} \tag{8.35}$$

OPGAVE 8.24

Hvad er $\boldsymbol{\eta}'''(s)$ udtrykt ved Frenet–Serret basis samt $\kappa(s)$, $\kappa'(s)$ og $\tau(s)$? Og hvordan er det udtryk benyttet i ovenstående? Vink: Se ligningerne i (8.33).

I Frenet–Serret basen $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$ kan kurven nu lokalt udtrykkes ved de approksimerende koordinatfunktioner, hvor vi kun benytter de lavest forekommende potenser af s for hver koordinatfunktion fra Taylor-udviklingen i (8.35):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (\widehat{x}(s), \widehat{y}(s), \widehat{z}(s)) = \left(s\,,\,\left(\frac{\kappa(0)}{2}\right)s^2\,,\,\left(\frac{\kappa(0)\,\tau(0)}{6}\right)s^3\right) \tag{8.36}$$

Vi isolerer og eliminerer dernæst s af ovenstående ligning og får de simple koordinatrelationer:

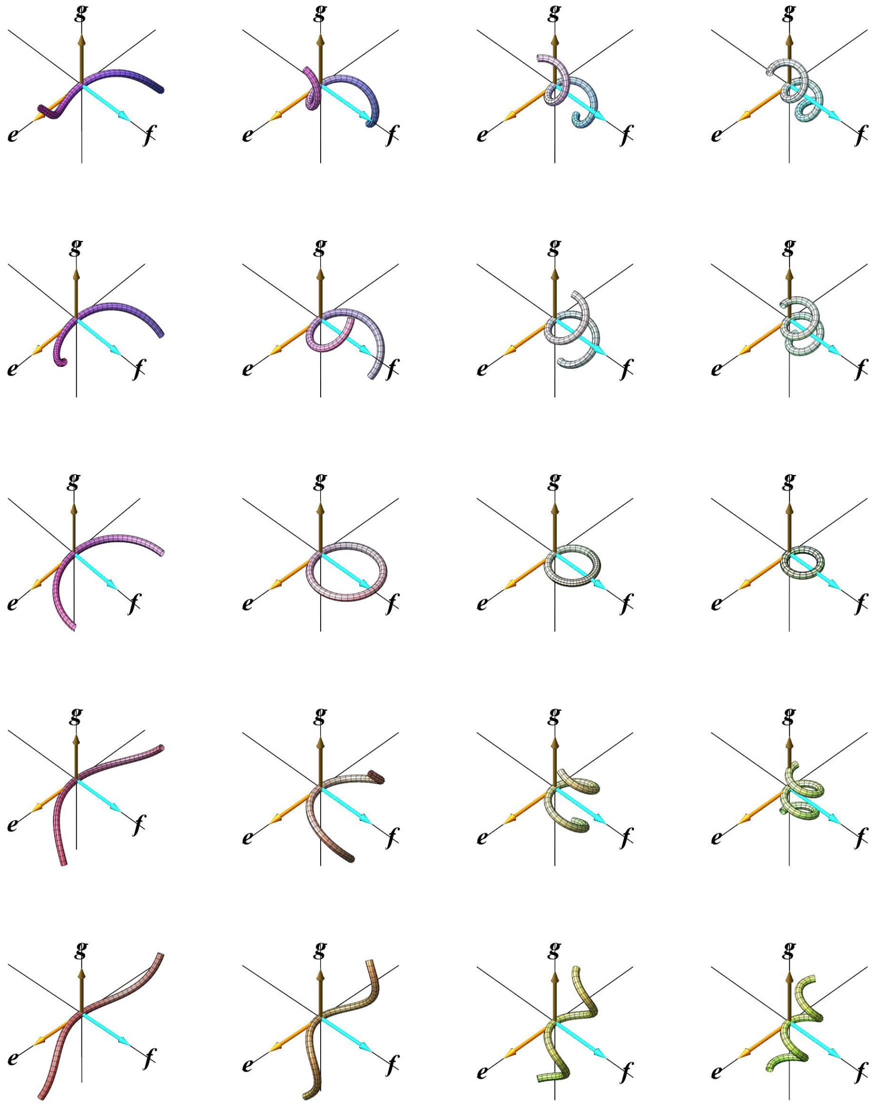
$$\begin{aligned}
\widehat{y} &= \left(\frac{1}{2}\cdot\kappa(0)\right)\cdot\widehat{x}^2 \\
\widehat{y}^3 &= \left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\kappa(0)}{\tau^2(0)}\right)\cdot\widehat{z}^2 \\
\widehat{z} &= \left(\frac{1}{6}\cdot\kappa(0)\cdot\tau(0)\right)\cdot\widehat{x}^3
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Specielt får vi altså heraf, at enhver kurve, der plottes i sin egen Frenet–Serret basis projiceres approksimativt på en parabel i $(\widehat{x}, \widehat{y})$-planen og på en tredjegradskurve i $(\widehat{x}, \widehat{z})$-planen.

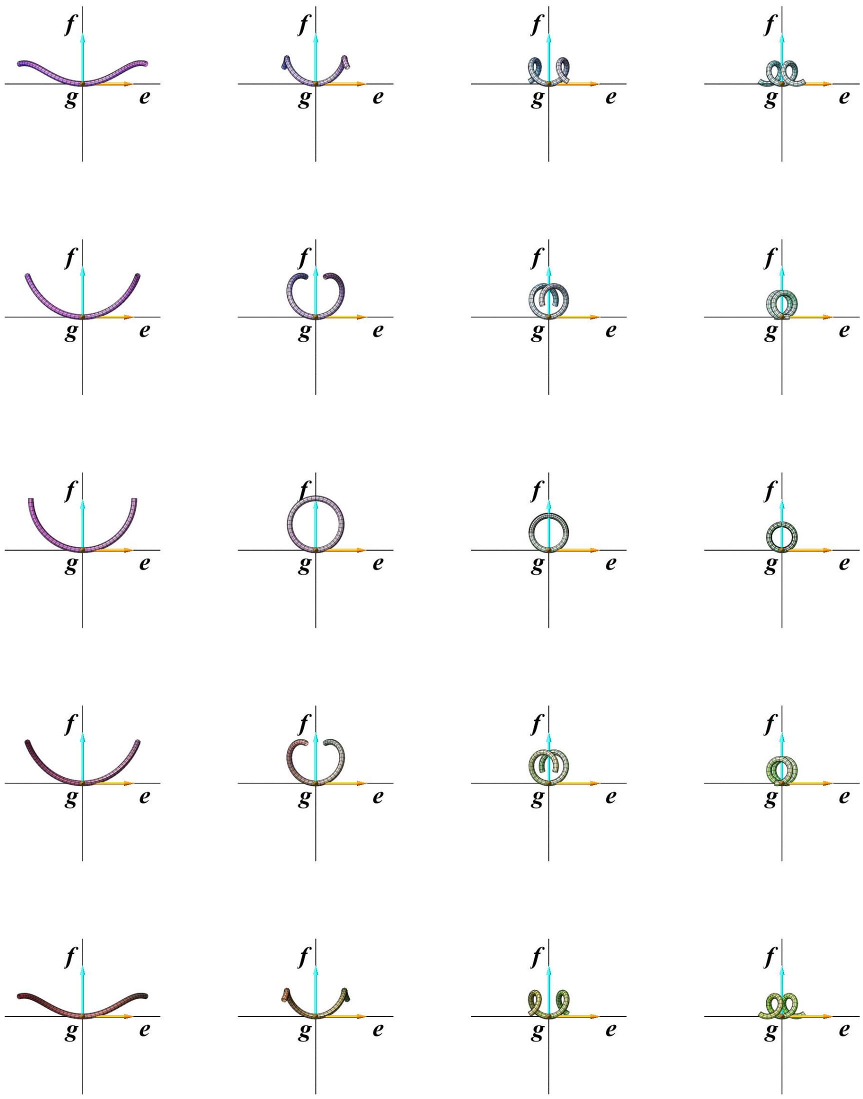
Parablens koefficient på $\widehat{x}^2$ er $\kappa(0)/2$, så krumningen af kurven $\boldsymbol{\eta}(s)$ i punktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ kan således aflæses af parablen. Tredjegradskurvens koefficient på $\widehat{x}^3$ er $\kappa(0)\cdot\tau(0)/6$, så torsionen af kurven $\boldsymbol{\eta}(s)$ i punktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ kan dermed også aflæses af tredjegradskurven - når vi kender krumningen $\kappa(0)$.

Hvis buelængdeparametriseringen $\boldsymbol{\eta}(s)$ er givet og der ønskes en lokal undersøgelse som ovenfor men i det punkt der svarer til $s = s_0$, hvordan ser udtrykkene i ligningerne (8.35), (8.36), og (8.37) så ud?

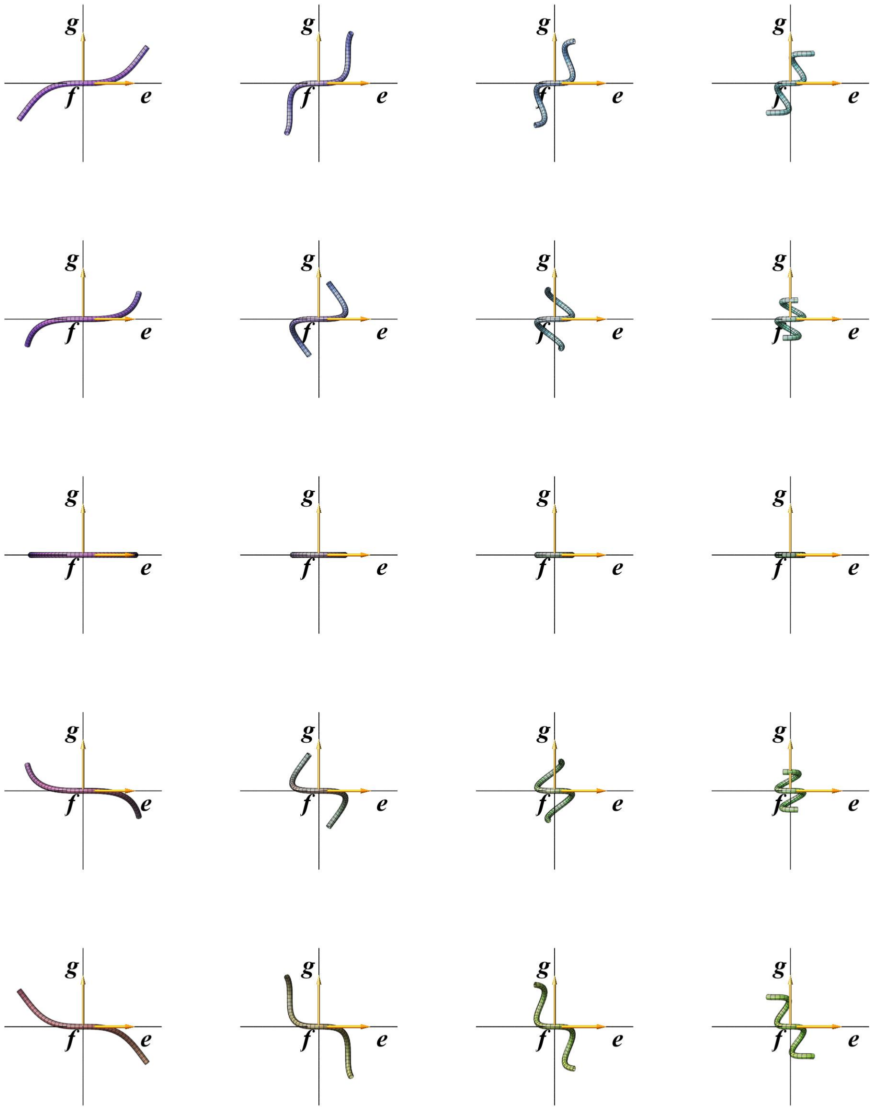
Den lokale inspektion af krumning og torsion i Frenet–Serret basen for punkter på vindellinjer med forskellige værdier af krumning og torsion er illustreret i figurerne 8.9, 8.10 og 8.11 samt eksempel 8.27 nedenfor. Se også en tilsvarende matrix med vindellinjerne i det almindelige koordinatsystem i figur 8.16 og den tilhørende inspektionsopgave 8.31.



Figur 8.9: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis.



Figur 8.10: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs **g**-aksen, således at den halve krumning $\kappa(0)/2$ hermed kan 'aflæses' som koefficienten på $\widehat{x}^2$ i det approksimerende andengradspolynomium i punktet $\mathbf{p}(0)$.



Figur 8.11: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs **f**-aksen, således at $\kappa(0) \cdot \tau(0)/2$ hermed kan 'aflæses' som koeffficienten på $\widehat{x}^3$ i det approksimerende tredjegradspolynomium i punktet $\mathbf{p}(0)$.

8.4 Krumning og torsion for tids-parametriserede kurver

Som allerede antydet ovenfor kan det være en besværlig sag at finde en enhedsfart-parametrisering, en s-parametrisering, af en given kurve ud fra en given t-parametrisering af kurven. Heldigvis kan vi alligevel forholdsvis enkelt beregne Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ og krumningen $\kappa(t)$, og torsionen $\tau(t)$ i et vilkårligt punkt $\mathbf{p}(t)$ på kurven *som funktioner af den givne tids-parameter* t.

Det er samlet i følgende helt generelle sætning:

8.4.1 Krumning, torsion og Frenet–Serret basis for tidsparametriserede kurver

Sætning 8.25 En regulær kurve med parameterfremstillingen $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t har krumning, torsion, og Frenet–Serret vektorer givet ved følgende udtryk, hvor $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$ betegner farten af den tilhørende bevægelse:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|}{v^3(t)}$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \tag{8.38}$$

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \tag{8.39}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \quad .$$

Bemærk, at $\mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ beregnes lettest før $\mathbf{f}(t)$. Frenet–Serret vektorfunktionerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ tilfredsstiller nu følgende ligninger, hvor $\kappa(t)$ betegner kurvens krumning, $\tau(t)$ betegner kurvens torsion, og $v(t)$ farten af bevægelsen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \qquad v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= \qquad -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.40}$$

Bemærk igen hvordan rumproduktet af de tre første afledede af $\mathbf{p}(t)$ optræder i udtrykket for torsionen i ligning (8.38), jvf. (8.34).

Beviset for denne generelle sætning for tids-parametriserede kurver bygger direkte på de tidligere fundne udtryk for buelængde-parametriserede kurver i sætning 8.22:

Bevis. Da den givne kurve $\mathbf{p}(t)$ er antaget at være regulær, så kan vi *buelængdeparametrisere* kurven, jvf. afsnit 8.2.1, sætning 8.6:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s)) \quad . \tag{8.41}$$

Bemærk, at vi kan – og vil – bruge denne buelængde-omparametrisering af kurven i dette bevis uden faktisk at *beregne* eller *kende* det konkrete funktions-udtryk for $T(s)$ (eller det konkrete funktionsudtryk for $S(t)$). Det er kun *eksistensen* af disse funktioner vi benytter i beviset – ikke deres konkrete udtryk. Sætningen, som vi beviser her, kan altså derefter frit benyttes uden at vi kender disse funktioner eksplicit.

Da $\boldsymbol{\eta}(s)$ er buelængdeparametriseret gælder alle resultaterne i sætning 8.6 som vi nu blot skal fortolke til kurvens tids-parametriserede version. Det gøres direkte ved at beregne de første tre s-afledede af $\boldsymbol{\eta}(s)$ og udtrykke dem som T-afledede af $\mathbf{p}(T(s))$ via kædereglen:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)\right) \cdot \left(\frac{d}{ds}T(s)\right) = \mathbf{p}'(t) \cdot \frac{1}{v(t)} \quad , \tag{8.42}$$

hvor vi har benyttet at $T(s) = t$ og $T'(s) = 1/S'(t) = 1/\|\mathbf{p}'(t)\| = 1/v(t)$. Derefter er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= \left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}'(t) \cdot \frac{1}{v(t)}\right)\right) \cdot \frac{1}{v(t)} \\ &= \mathbf{p}''(t) \cdot \frac{1}{v^2(t)} - \left(\mathbf{p}'(t) \cdot \frac{v'(t)}{v^3(t)}\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.43}$$

Da $\boldsymbol{\eta}''(s)$ er ortogonal på $\boldsymbol{\eta}'(s)$, så er $\boldsymbol{\eta}''(s)$ også ortogonal på $\mathbf{p}'(t)$ sådan at $\boldsymbol{\eta}''(s)$ og $\mathbf{p}'(t)/v(t)$ udspænder et rektangel med arealet:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| &= \|\boldsymbol{\eta}''(s) \times \left(\frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}\right)\| \\ &= \frac{\|\mathbf{p}''(t) \times \mathbf{p}'(t)\|}{v^3(t)} \quad , \end{aligned} \tag{8.44}$$

idet $\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}'(t) = \mathbf{0}$. Dermed følger nu udtrykket for krumningen af kurven:

$$\kappa(t) = \kappa(T(s)) = \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| = \frac{\|\mathbf{p}''(t) \times \mathbf{p}'(t)\|}{v^3(t)} \quad . \tag{8.45}$$

For at vise udtrykket for torsionen benytter vi (igen):

$$\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{v^3(t)} \tag{8.46}$$

og observerer, at denne vektor er ortogonal på både $\mathbf{p}'(t)$ og $\mathbf{p}''(t)$ således at kun de elementer i $\boldsymbol{\eta}'''(s)$, som ikke er kombinationer af disse to vektorer, kan bidrage til rumproduktet $(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s)$. Men vi har jo netop at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}'''(s) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}''(t) \cdot \frac{1}{v^2(t)} - \left(\mathbf{p}'(t) \cdot \frac{v'(t)}{v^3(t)}\right)\right) \cdot \frac{1}{v(t)} \\ &= \mathbf{p}'''(t) \cdot \frac{1}{v^3(t)} + (*_1) \cdot \mathbf{p}''(t) + (*_2) \cdot \mathbf{p}'(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.47}$$

hvor vi ikke behøver at kende faktorerne $(*_i)$, således at

$$(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) = (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) \cdot \frac{1}{v^6(t)} \quad . \tag{8.48}$$

Dermed har vi også vist udtrykket for torsionen:

$$\begin{aligned} \tau(t) = \tau(T(s)) &= \frac{1}{\kappa^2(t)} \cdot (\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \\ &= \frac{1}{\kappa^2(t) \cdot v^6(t)} \cdot (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) \\ &= \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad . \end{aligned} \tag{8.49}$$

Formlerne for Frenet–Serret basis vektorerne fås ligeledes:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(T(s)) = \boldsymbol{\eta}'(s) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)\right) \cdot \left(\frac{1}{v(t)}\right) = \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)} \quad , \tag{8.50}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(T(s)) &= \frac{1}{\kappa(s)} \cdot (\mathbf{e}(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \\ &= \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \left(\left(\frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}\right) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \\ &= \frac{1}{\kappa(t) \cdot v^3(t)} \cdot (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \\ &= \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad , \end{aligned} \tag{8.51}$$

og dermed, da Frenet–Serret basen er ortogonal, positivt orienteret og består af enhedsvektorer:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad . \tag{8.52}$$

De t-afledede af Frenet–Serret basens vektorer fås igen ved simpel anvendelse af kædereglen. For eksempel:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}(S(t))\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds}\mathbf{e}(s)\right)\cdot\frac{dS(t)}{dt} \\ &= \kappa(S(t))\cdot\mathbf{f}(S(t))\cdot v(t) \\ &= v(t)\cdot\kappa(t)\cdot\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.53}$$

□

OPGAVE 8.26

Vis, at ovenstående udtryk i sætning 8.25 lige præcis reducerer til dem vi fandt i sætning 8.22 når kurven $\mathbf{p}(t)$ er parametriseret med enhedsfart $v(t) = 1$ for alle t.

Eksempel 8.27

Vi betragter den plane kurve, en parabel, der er givet som grafen for denne funktion: $y = x^2$ i $(x,y)-$planen. Kurven kan vi opfatte som en parametriseret rumkurve på følgende måde:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (t, t^2, 0), \tag{8.54}$$

hvoraf vi får følgende ingredienser til beregning af Frenet-Serret elementerne for kurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (1, 2t, 0) \neq (0,0,0) \quad \text{for alle } t \\ v(t) &= \sqrt{1+4t^2} \\ \mathbf{p}''(t) &= (0,2,0) \\ \mathbf{p}'''(t) &= (0,0,0) \\ \mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t) &= (0,0,2) \\ \|\mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t)\| &= 2 \\ (\mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t))\cdot\mathbf{p}'''(t) &= 0 \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.55}$$

Specielt er altså $\kappa(0) = 2$ i overensstemmelse med, at Taylorudviklingen af kurven i Frenet–Serret basen i kurvens toppunkt netop skal give parablen $\widehat{y} = (\kappa(0)/2)\cdot\widehat{x}^2$, jvf. (8.37).

OPGAVE 8.28

Bestem Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ for parablen i eksemplet 8.27 ovenfor.

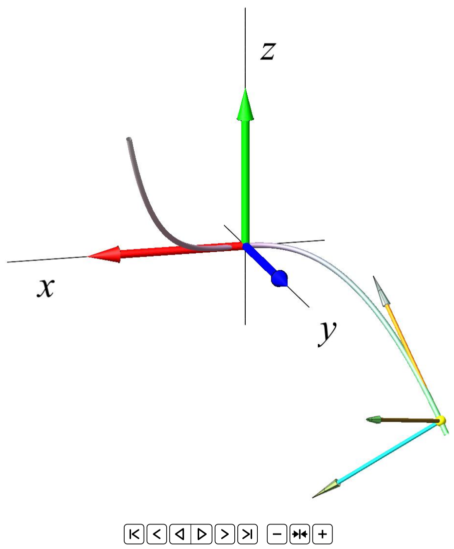
Eksempel 8.29

Mere generelt, grafen for en funktion $y = f(x)$ i $(x,y)-$planen kan parametriseres:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (t, f(t), 0), \tag{8.56}$$

hvoraf udledes, som i eksempel 8.27:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|f''(t)|}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.57}$$



Figur 8.12: Animation af Frenet–Serret basis langs kurven $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$.

OPGAVE 8.30

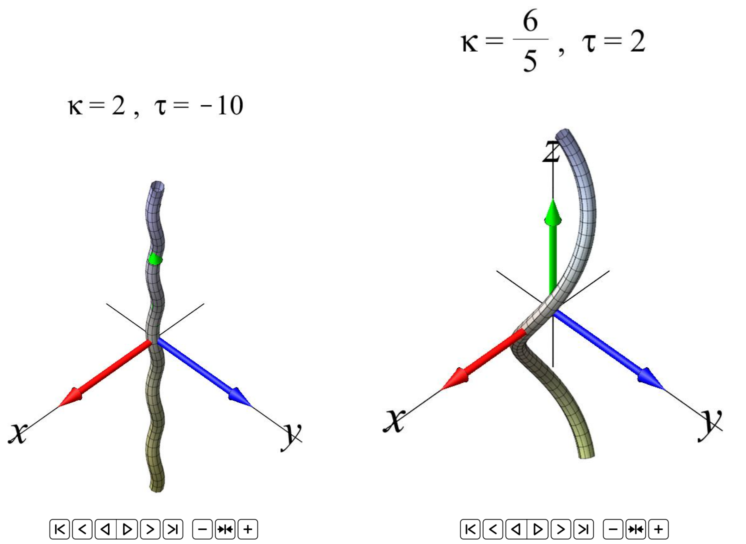
En generel vindellinje er som bekendt givet ved parameterfremstillingen:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{8.58}$$

hvor $a \neq 0$. Bestem *direkte* ved hjælp af Sætning 8.25 krumningen, torsionen, og Frenet–Serret vektor-funktionerne for denne vindellinje. Sammenlign med resultatet fra opgave 8.23.

OPGAVE 8.31

I figurerne 8.16, 8.9, 8.10 og 8.11 ses tabeller med billeder af vindellinjer. De har alle samme længde (to af de viste cirkler overlejrer til en vis grad sig selv). Krumningerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med 1 til og med 4. Torsionerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med -2 til og med 2. Marker på én af figurerne hvilke vindellinjer der har hvilke kombinationer af krumning og torsion. Se evt. figur 8.13 som viser animationer dels igennem torsioner med fast krumning og dels igennem krumninger med fast torsion.



Figur 8.13: Animation af vindellinje med konstant længde, men med variabel torsion og krumning, henholdsvis.

8.4.2 Approksimerende vindellinjer

I lighed med Taylor approksimationen i afsnit 8.3.4 som gav approksimerende parabler og tredjegradskurver i Frenet–Serret basens koordinatplaner, vil vi her se hvordan vi også kan approksimere en vilkårlig kurve med vindellinjer i ethvert punkt på kurven.

Sætning 8.32 Givet en tidsparametriseret regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ med positiv krumning $\kappa(0)$ og torsion $\tau(0)$ i punktet $\mathbf{p}(0)$. Så findes der præcis én vindellinje $\mathcal{V}$ som både går igennem punktet $\mathbf{p}(0)$, har samme tangent $\mathbf{p}'(0)$ som kurven og samme krumning $\kappa(0)$ og torsion $\tau(0)$ som kurven i punktet.

Den vindellinje vil vi selvfølgelig kalde den approksimerende vindellinje til kurven i punktet.

Når vi har kurvens Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$ til rådighed i det udvalgte kurvepunkt $\mathbf{p}(0)$ er det ikke svært at konstruere den søgte vindellinje.

Standard-vindellinjen er givet ved $\mathbf{r}(u) = (a\cos(ku), a\sin(ku), bku)$, hvor $a > 0$, b, og $k > 0$ er konstanter, der bestemmer dels vindellinjens krumning og torsion og dels farten af parameterfremstillingen. Vindellinjen har jo sin helt egen Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS(\mathbf{r})}$ i det punkt, der svarer til $u = 0$.

Vi bestemmer først konstanterne a, b, og k for vindellinjen, sådan at den har konstant fart $v(0) = \|\mathbf{p}'(0)\|$, (konstant) krumning $\kappa(0)$ og (konstant) torsion $\tau(0)$. Dvs. vi bestemmer a, b, og k således at:

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau(0) &= \frac{b}{a^2+b^2} \\ \|\mathbf{p}'(0)\| &= v(0) = k\sqrt{a^2+b^2} \quad . \end{aligned} \tag{8.59}$$

Heraf finder vi $a > 0$, b, og $k > 0$:

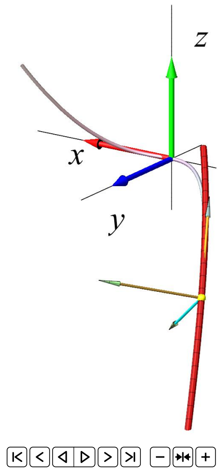
$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \cdot v(0) \\ a &= \frac{\kappa(0)}{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \\ b &= \frac{\tau(0)}{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \quad . \end{aligned} \tag{8.60}$$

Bemærk specielt, at b har samme fortegn som $\tau(0)$ således at kurven og den approksimerende vindellinje har samme type torsion, i.e. de er begge venstre-skruede eller begge højre-skruede.

OPGAVE 8.33

Vis ved indsættelse, at ovenstående værdier løser ligningerne i (8.59).

Den fundne vindellinje kan dernæst roteres og translateres 'på plads' så den netop bringes til at approksimere kurven $\mathbf{p}(t)$ på stedet $\mathbf{p}(0)$. Rotationen er naturligvis den rotation i rummet, der roterer Frenet–Serret basen for vindellinjen over i Frenet–Serret basen for kurven. Resultatet er illustreret og animeret i figur 8.14. Det ses at de konstruerede vindellinjer approksimerer den givne kurve i ethvert punkt.



Figur 8.14: Animation af approksimerende vindellinje-stykke (med konstant længde) langs kurven $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$

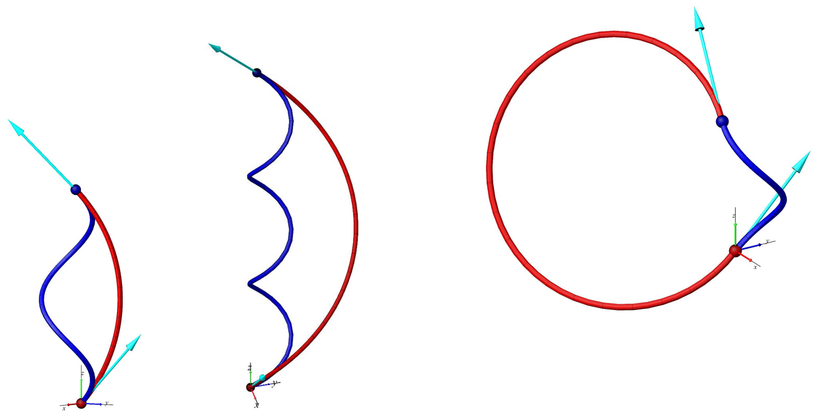
OPGAVE 8.34

Et sammenhængende stykke af en helix (vindellinje) kaldes *kort* hvis den ikke når at gå en hel gang rundt om sin akse. Se figur 8.15.

Et forholdsvist nyt resultat (fra 2013) om vindellinjer er udtrykt i følgende sætning, se [DBT]: Lad $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ være (stedvektorer til) to punkter i rummet og lad $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$ være to enhedsvektorer med fodpunkter i henholdsvis $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$. Så findes der netop én kort vindellinje fra $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ med tangentvektorerne $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$ hvis og kun hvis følgende simple betingelse er opfyldt:

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = 0 \quad . \tag{8.61}$$

Kan du give et kort argument for den påstand?



Figur 8.15: Vindellinjer, der forbinder to punkter med samme tangentlinjer i endepunkterne. Den ene (rød) er altid kort, mens den anden ikke nødvendigvis er længst (som yderst til højre).

8.4.3 SI-enheden for krumning og torsion

Vi indfører enhederne for de størrelser, der indgår i krumnings- og torsions-formlerne. Vi bruger udelukkende SI-enheder, se Wiki; International_System_of_Units:

1. Farten v måles i meter per sekund:
   $v = \{v\}\ [v]$, hvor $[v] = \mathrm{m/s}$.

2. Hastighedsvektorer $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund:
   $v_i = \{v_i\}\ [v_i]$, hvor $[v_i] = \mathrm{m/s}$.

3. Accellerationsvektorer $\mathbf{a}(t) = \mathbf{p}''(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund i anden:
   $a_i = \{a_i\}\ [a_i]$, hvor $[a_i] = \mathrm{m/s}^2$.

4. Accelerationens tidsafledede $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{p}'''(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund i tredje: $a'_i = \{a'_i\}\ [a'_i]$, hvor $[a'_i] = \mathrm{m/s}^3$.

5. Koordinaterne for prikproduktet mellem to vektorer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

6. Koordinaterne for krydsproduktet mellem to vektorer $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

Vi benytter dernæst den generelle formel for krumning og torsion som givet i sætning 8.25 og får:

Sætning 8.35 SI-enheden for både krumning og torsion er $[\kappa(t)] = \mathrm{m}^{-1}$ og $[\tau(t)] = \mathrm{m}^{-1}$.

OPGAVE 8.36

Vis den sætning ved at indsætte enheder i de respektive ligninger fra sætning 8.25.

8.5 Plane kurver

Hvis en rum-kurve er helt indeholdt i en plan i rummet, så vil vi naturligvis sige, at kurven er en plan kurve.

Lad os antage at kurven $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [\alpha, \beta]$, er regulær og buelængde-parametriseret. Så er $\boldsymbol{\eta}(s)$ helt indeholdt i den plan, der har ligningen $ax + by + cz = d$, hvis (og kun hvis):

$$ax(s) + by(s) + cz(s) = d \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad . \tag{8.62}$$

Lader vi nu s_0 betegne et tal i $[\alpha, \beta]$ betyder det, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ er helt indeholdt i planen hvis og kun hvis

$$a\,(x(s) - x(s_0)) + b\,(y(s) - y(s_0)) + c\,(z(s) - z(s_0)) = 0 \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad , \tag{8.63}$$

som er ækvivalent med, at $(x(s) - x(s_0), y(s) - y(s_0), z(s) - z(s_0))$ står vinkelret på (a, b, c):

$$(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0)) \cdot (a, b, c) = 0 \quad . \tag{8.64}$$

OPGAVE 8.37

Lad $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne følgende rumkurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\cos(s), \sqrt{2}\sin(s) + \cos(s), \sqrt{2}\sin(s) - \cos(s)\right) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \tag{8.65}$$

1. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.
2. Find torsionen af kurven.

Det er ikke nogen tilfældighed, at kurven i opgave 8.37 har torsion 0:

Sætning 8.38 En regulær rumkurve med positiv krumning har overalt torsionen $\tau = 0$ hvis og kun hvis kurven er en plan kurve.

Bevis

Vi antager, at kurven er buelængde-parametriseret. Hvis kurven ligger helt indeholdt i en plan så er kurvens tangentvektor $\mathbf{e}(s)$ vinkelret på en konstant enhedsnormal-vektor $\mathbf{N}$ til planen:

$$\mathbf{e}(s)\cdot\mathbf{N} = 0 \quad , \tag{8.66}$$

sådan at

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\mathbf{e}(s)\cdot\mathbf{N}\right) &= 0 \\ \mathbf{e}'(s)\cdot\mathbf{N} + \mathbf{e}(s)\cdot\mathbf{N}' &= 0 \\ \mathbf{e}'(s)\cdot\mathbf{N} &= 0 \\ \kappa(s)\mathbf{f}(s)\cdot\mathbf{N} &= 0 \\ \mathbf{f}(s)\cdot\mathbf{N} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{8.67}$$

fordi $\mathbf{N}$ er konstant og $\kappa(s) > 0$. Men dermed er både $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ vinkelrette på $\mathbf{N}$ således at $\mathbf{g}(s) = \pm\mathbf{N}$ for alle s. Dermed er $\mathbf{g}'(s) = 0$ for alle s og derfor er $\tau(s) = 0$ for alle s.

Omvendt, hvis $\tau(s) = 0$ for alle s har vi $\mathbf{g}'(s) = 0$, så $\mathbf{g}(s) = \mathbf{g}_0$, en konstant vektor. Men dermed har vi også:

$$\frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{\eta}(s)\cdot\mathbf{g}_0\right) = \boldsymbol{\eta}'(s)\cdot\mathbf{g}_0 = \mathbf{e}(s)\cdot\mathbf{g}_0 = 0 \quad , \tag{8.68}$$

sådan at $\boldsymbol{\eta}(s)\cdot\mathbf{g}_0$ er en konstant og sådan at $(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0))\cdot\mathbf{g}_0 = 0$, hvilket netop betyder, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ er en plan kurve – indeholdt i en plan der har normalvektor $\mathbf{g}_0$.

■

OPGAVE 8.39

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende rumkurve:

$$\mathbf{p}(t) = \left(\sqrt{2}\,(\cos(t)+1)\,, 3\sqrt{2}\sin(t)+\cos(t)+1, 3\sqrt{2}\sin(t)-\cos(t)-1\right) \quad , \quad t\in\mathbb{R} \quad . \tag{8.69}$$

1. Find torsionen $\tau(t)$ af kurven.
2. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.

8.5.1 Plane kurver – i (x,y)-planen

I det følgende vil vi antage, at kurverne vi betragter, er plane og at de er indeholdt i (x,y)-planen.

I (x,y)-planen kan vi udnytte orienteringsfordelen: Enhver vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$ har en entydig bestemt 'hat'- eller 'tvær'-vektor $\widehat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1, 0)$, som fremkommer ved at dreje $\mathbf{a}$ vinklen $\pi/2$ i (x,y)-planen i positiv omløbsretning, dvs. imod uret, dvs. i den omdrejnings-retning der drejer

x-aksen over i y-aksen. De to vektorer $\mathbf{a}$ og $\widehat{\mathbf{a}}$ er specielt vinkelrette på hinanden.

Lad os nu betragte en buelængde-parametriseret kurve i (x,y)-planen $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), 0)$ med krumning $\kappa(s)$ betragtet som krumningne af en rumkurve. I de punkter hvor krumningen er positiv har vi også en torsion $\tau(s)$ og en Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$, hvor $\mathbf{g}(s) = \mathbf{0}$ for alle s.

I planen er $\boldsymbol{\eta}''(s) = \mathbf{e}'(s)$ altid proportional med $\widehat{\mathbf{e}(s)}$, så vi har dermed i ethvert punkt på kurven en proportionalitetsfaktor, som vi vil kalde $\kappa_{\pm}(s)$ og som kan antage både positive og negative værdier:

Definition 8.40 For en plan buelængdeparametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ med $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ definerer vi $\kappa_{\pm}(s)$ ved ligningen:

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa_{\pm}(s)\,\widehat{\mathbf{e}(s)} \quad , \tag{8.70}$$

som er ækvivalent med

$$\kappa_{\pm}(s) = \widehat{\mathbf{e}(s)} \cdot \mathbf{e}'(s) \quad . \tag{8.71}$$

I de punkter hvor $\kappa(s) > 0$ har vi også – per definition af $\kappa(s)$

$$\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa(s)\,\mathbf{f}(s) \quad , \tag{8.72}$$

sådan at

$$\kappa_{\pm}(s) = \kappa(s)\left(\mathbf{f}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)}\right) \quad , \tag{8.73}$$

hvor prikproduktet på højre side af ligningen enten er 1 eller -1. Heraf betegnelsen $\kappa_{\pm}(s)$.

Med andre ord har vi $|\kappa_{\pm}(s)| = \kappa(s)$ og fortegnet for $\kappa_{\pm}(s)$ er $+1$ når $\mathbf{e}(s)$ drejes i positiv omløbsretning (dvs. $\mathbf{e}'(s)$ har samme retning som $\widehat{\mathbf{e}(s)}$) og fortegnet er -1 når $\mathbf{e}(s)$ drejes i negativ omløbsretning (dvs. $\mathbf{e}'(s)$ har modsat retning af $\widehat{\mathbf{e}(s)}$) under bevægelsen langs den plane kurve igennem voksende s-værdier.

Se eksemplet i figur 8.17, hvor hastighedsvektoren $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ er angivet under bevægelsen (med fart 1) på kurven sammen med den inducerede krumning med fortegn.

OPGAVE 8.41

Find udtrykket for den orienterede krumning $\kappa_{\pm}(t)$ som funktion af t for en regulær t-parametriseret kurve $\mathbf{p}(t)$ i (x,y)-planen.

8.5.2 Plane kurver med givne krumningsfunktioner $\kappa_{\pm}(s)$.

Vi antager, at krumningen $\kappa_{\pm}(s)$ for en buelængdeparametriseret plan kurve er givet. Vores opgave er at konstruere en kurve i planen, som har den givne krumning som funktion af buelængdeparameteren s.

Da $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ er en enhedsvektor, kan den skrives på følgende form:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \tag{8.74}$$

hvor $\phi(s)$ er en glat funktion af s, der simpelthen måler vinklen mellem kurvens tangentvektor $\boldsymbol{\eta}'(s)$ og x-aksen (dvs. vektoren $(1,0,0)$).

Vi kan udtrykke krumningen – med fortegn – for den plane kurve ved hjælp af (den afledede af) $\phi(s)$:

Sætning 8.42

$$\kappa_{\pm}(s) = \phi'(s) \quad . \tag{8.75}$$

Bevis

Det følger direkte dels af $\boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa_{\pm}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)}$ og dels af:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= (-\phi'(s) \cdot \sin(\phi(s)) \,,\, \phi'(s) \cdot \cos(\phi(s)) \,,\, 0) \\ &= \phi'(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)} \quad . \end{aligned} \tag{8.76}$$

■

Da $\kappa_{\pm}(s)$ er en givet glat funktion af s kan vi jo integrere den og dermed få

$$\int_0^s \kappa_{\pm}(u)\, du = \int_0^s \phi'(u)\, du = \phi(s) - \phi(0) \quad . \tag{8.77}$$

På den anden side ved vi:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \tag{8.78}$$

sådan at

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}(s) &= \int_0^s \boldsymbol{\eta}'(u)\,du + \boldsymbol{\eta}(0) \\
&= \int_0^s (\cos(\phi(u)), \sin(\phi(u)), 0)\; du + \boldsymbol{\eta}(0) \\
&= \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv + \phi(0) \right), \sin\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv + \phi(0) \right), 0 \right) du + \boldsymbol{\eta}(0) \quad .
\end{aligned} \tag{8.79}
$$

Heraf følger: Hvis vi *vælger* $\boldsymbol{\eta}(0) = (0,0,0)$ og hvis vi *vælger* $\phi(0) = 0$, så har vi en eksplicit kurve med den ønskede krumningsfunktion (med fortegn):

$$
\boldsymbol{\eta}(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv \right), \sin\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv \right), 0 \right) du \quad . \tag{8.80}
$$

Overvej hvad de *valg* betyder. Dvs. hvis vi havde valgt andre $\boldsymbol{\eta}(0)$ og $\phi(0)$, hvilke andre kurver havde vi så fået?

Vi kan samle de ovenstående overvejelser til følgende:

Sætning 8.43 Lad $\kappa_{\pm}(s)$ være en given glat funktion. Så findes der en buelængdeparametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ i (x,y)-planen der har den givne funktion som krumningsfunktion med fortegn. Kurven er entydigt bestemt op til rotation og translation. Den repræsentant der går gennem $(0,0,0)$ med tangentvektoren $\boldsymbol{\eta}'(0) = (1,0,0)$ er bestemt direkte ved følgende formel:

$$
\boldsymbol{\eta}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv \right) du \,,\, \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa_{\pm}(v)\,dv \right) du,\; 0 \right) \quad . \tag{8.81}
$$

OPGAVE 8.44

Her er 4 (orienterede) krumningsfunktioner for 4 plane kurver i (x,y)-planen:

1. $\kappa_{\pm}(s) = s$
2. $\kappa_{\pm}(s) = e^{-s}$
3. $\kappa_{\pm}(s) = s^3 - 2s$
4. $\kappa_{\pm}(s) = \frac{2s^2}{s^2+1}$.

I figur 8.18 er vist 3 plane kurver i (x,y)-planen.
Hvilken af de 4 krumningsfunktioner passer til hver enkelt af de 3 plane kurver?
Plot selv den 'manglende' kurve.

8.6 Frenet-Serret styring af et basistetraeder

I ethvert punkt $p(t)$ på en given regulær rum-kurve $\mathbf{p}(t)$, $t \in [a,b]$, med positiv krumning, vil vi nu opbygge et tetraeder, der skal være en roteret (og derefter parallelforskudt) kopi af basistetraederet. Den givne fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ får nu *total indflydelse* på styringen af tetraederet, nemlig via Frenet–Serret basis for kurven, som jo definerer et entydigt bestemt treben (tetraeder) i ethvert punkt med de parvis ortogonale enheds-vektorer $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ som kantvektorer:

Definition 8.45 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær rumkurve. Det tilhørende Frenet–Serret treben defineres for ethvert t ved:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \tag{8.82}$$

hvor $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ er den til kurven hørende Frenet–Serret basis på stedet $p(t)$, således at

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad , \tag{8.83}$$

hvor rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ nu er givet ved Frenet–Serret kantvektorerne:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array} \right] \quad . \tag{8.84}$$

Rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ for et Frenet–Serret treben kan naturligvis differentieres og analyseres på samme måde som i kapitel 7 med tilhørende aksematrix $\mathbf{\Omega}(t)$ og associeret aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Lad os lige repetere:

For en given tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ finder vi først den skævsymmetriske tidsafhængige aksematrix

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{8.85}$$

hvoraf vi aflæser den associerede tidsafhængige aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$.

Med Frenet–Serret rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ for en kurve til rådighed kan vi nu også definere en anden skævsymmetrisk matrix:

Definition 8.46 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$. Vi definerer den tidsafhængige krumnings-matrix eller Frenet–Serret-matrix $\Xi(t)$ for kurven således:

$$\Xi(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \quad . \tag{8.86}$$

Denne nye tidafhængige matrix er interessant fordi den indeholder krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ for kurven $\mathbf{p}(t)$ – deraf navnet *krumningsmatrix*:

Sætning 8.47 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$. Krumningsmatricen $\Xi(t)$ for en Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er skævsymmetrisk for alle t og elementerne er følgende:

$$\Xi(t) = \mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & -v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{8.87}$$

hvor $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$ betegner farten, altså længden af den tids-afledede af $\mathbf{p}(t)$.

Bogstavet Ξ er det græske (store bogstav), der svarer til (det lille bogstav) ξ. Begge udtales 'ksi', se Wiki.

Bevis

Skævsymmetrien af $\Xi(t)$ følger på samme måde som for $\mathbf{\Omega}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}\mathbf{E} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}(t)\right) \\ &= \mathbf{R}'^*(t)\cdot\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}'(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.88}$$

således at

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}'^*(t)\cdot\mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}'(t) \\ -\left(\mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}'(t)\right)^* &= \mathbf{R}^*(t)\cdot\mathbf{R}'(t) \\ -\Xi^*(t) &= \Xi(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.89}$$

Derudover kan vi finde elementerne i $\Xi(t)$ fra ligning (8.40)):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.90}$$

sådan at

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \left[\ \mathbf{e}'^*(t) \quad \mathbf{f}'^*(t) \quad \mathbf{g}'^*(t)\ \right] \\ &= \left[\ (v(t)\kappa(t)\mathbf{f}^*(t)) \quad (-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}^*(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}^*(t)) \quad (-v(t)\tau(t)\mathbf{f}^*(t))\ \right] \quad , \end{aligned} \tag{8.91}$$

hvilket præcis giver følgende matrix-produkt:

$$\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & -v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{8.92}$$

■

|||| Eksempel 8.48

Vi lader $\mathbf{p}(s)$ betegne følgende kurve – en cirkel med radius $a > 0$ i $(x,y)-$planen – som er parametriseret med enhedsfart:

$$\mathbf{p}(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a), 0) \quad . \tag{8.93}$$

Så har vi følgende ingredienser til konstruktion af Frenet–Serret trebenet og til analyse af trebenets rotation:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \mathbf{p}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\ \mathbf{p}''(s) &= (-\frac{1}{a}\cos(s/a), -\frac{1}{a}\sin(s/a), 0) \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{p}''(s)\| = \frac{1}{a} \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{\mathbf{p}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0,0,1) \quad , \end{aligned} \tag{8.94}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= \begin{bmatrix} -\sin(s/a) & -\cos(s/a) & 0 \\ \cos(s/a) & -\sin(s/a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}'(s) &= \begin{bmatrix} -\cos(s/a)/a & \sin(s/a)/a & 0 \\ -\sin(s/a)/a & -\cos(s/a)/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{8.95}$$

således at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(s) &= \mathbf{R}'(s) \cdot \mathbf{R}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}(s) &= (0,0,1/a) \quad , \end{aligned} \tag{8.96}$$

og

$$\Xi(s) = \mathbf{R}^*(s) \cdot \mathbf{R}'(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{8.97}$$

OPGAVE 8.49

Dette er opgave 2 *fra* 2*-timersprøven, E09*. En kurve er givet ved en parametrisering således:

$$p(s) = (3\cos(s/5)\ ,\ 3\sin(s/5)\ ,\ 4s/5) \quad , \quad \text{hvor} \quad s \in [0, 5\pi] \quad . \tag{8.98}$$

1. Vis, at kurven er enhedsfart-parametriseret.
2. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ for kurven.
3. Bestem krumningen $\kappa(s)$ for kurven.
4. Bestem torsionen $\tau(s)$ for kurven.

OPGAVE 8.50

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Konstanten a antages at være forskellig fra 0, men b kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, opgave 8.30, og opgave 8.23.

1. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ for kurven.
2. Bestem den tilhørende rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ for kurven.
3. Bestem akse-matricen $\mathbf{\Omega}(t)$ og den associerede akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$ for kurven.
4. Bestem Frenet–Serret matricen $\Xi(t)$ for kurven ved at udregne produktet $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}'(t)$, og sammenlign med de tidligere fundne udtryk for krumning $\kappa(t)$ og torsion $\tau(t)$ for vindellinjerne.

Læg mærke til, at Frenet–Serret matricen $\Xi(t)$ og aksematricen $\mathbf{\Omega}(t)$ for rotationen givet ved Frenet–Serret rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ *ikke nødvendigvis* er den samme matrix, selv om de klart er i 'familie' med hinanden i den forstand, at de begge er produkter af $\mathbf{R}^*(t)$ og $\mathbf{R}'(t)$:

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ \mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.99}$$

De to matricer $\Xi(t)$ og $\mathbf{\Omega}(t)$ er faktisk såkaldt similære for ethvert t via similaritetstransformationen $\mathbf{R}(t)$ i den forstand, at

$$\mathbf{R}^{-1}(t) \cdot \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \Xi(t) \quad . \tag{8.100}$$

OPGAVE 8.51

Bemærk, at en af kantvektorerne i det markerende treben for det bevægede tetraeder i figur 8.19 har et spidspunkt, der ser ud til at bevæge sig langs $y-$aksen. Fodpunktskurven for Frenet–Serret bevægelsen af basistetraederet er givet ved forskriften:

$$\mathbf{p}(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2}, \sin(t/\sqrt{2})) \quad . \tag{8.101}$$

Vis, at den nævnte observation er korrekt for denne specielle vandrette helix, og bestem farten af den bevægelse af det nævnte spids-punkt på y-aksen.

8.7 Kurver med given fart, krumning og torsion

I kapitel 7 afsnit 7.4.1 fandt vi den tids-afhængige rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ ud fra en given tidsafhængig akse-matrix $\mathbf{\Omega}(t)$ (plus en 'begyndelsesværdi' $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$).

Vi vil nu se på det tilsvarende problem for den tids-afhængige Frenet-Serret matrix: Hvis vi har fået oplyst element-funktionerne i Frenet-Serret matricen, dvs. $v(t) \cdot \kappa(t)$ og $v(t) \cdot \tau(t)$, kan vi så finde $\mathbf{R}(t)$ sådan at

$$\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \Xi(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & -v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad ? \tag{8.102}$$

Vi må igen forvente, at det kun kan lade sig gøre at finde en entydig løsning til problemet hvis vi igen har fået oplyst en 'begyndelsesværdi' $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ for $\mathbf{R}(t)$. Men så kan opgaven løses på samme måde som i kapitel 7:

Ligning (8.102) er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo har at $\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \mathbf{R}(t) \cdot \Xi(t) \\ \mathbf{R}'^*(t) &= \Xi^*(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{21}(t) & r'_{31}(t) \\ r'_{12}(t) & r'_{22}(t) & r'_{32}(t) \\ r'_{13}(t) & r'_{23}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{21}(t) & r_{31}(t) \\ r_{12}(t) & r_{22}(t) & r_{32}(t) \\ r_{13}(t) & r_{23}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} , \tag{8.103}$$

og da $\mathbf{R}(t)$ har Frenet-Serret basisvektorernes koordinater som søjler, får vi:

$$\begin{bmatrix} e'_1(t) & e'_2(t) & e'_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \\ g'_1(t) & g'_2(t) & g'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) & e_2(t) & e_3(t) \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{bmatrix} , \tag{8.104}$$

Hver søjle i $\mathbf{R}^*(t)$ – det vil sige hver række i $\mathbf{R}(t)$ – tilfredsstiller altså et og samme differentialligningssystem; de har fælles systemmatrix $\Xi^*(t)$. Eksempelvis har vi for den første søjle i $\mathbf{R}^*(t)$:

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ f_1'(t) \\ g_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ f_1(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{8.105}$$

Eksempel 8.52

Vi lader $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$. Så har vi følgende ingredienser til bestemmelse af $\mathbf{R}(t)$:

$$\Xi(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{8.106}$$

Vi skal altså løse tre differentialligningssystemer med den konstante systemmatrix Ξ^*. Det første system er følgende:

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ f_1'(t) \\ g_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ f_1(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{8.107}$$

Det system har den fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ f_1(t) &= c_2 \cos(2t) - c_1 \sin(2t) \quad , \end{aligned} \tag{8.108}$$

hvor c_1, c_2, og c_3 er vilkårlige konstanter, som imidlertid bliver fastlagt af begyndelsesbetingelsen $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ hvilket medfører: $e_1(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, og $g_1(0) = 0$. Heraf får vi $c_3 = 0$, $c_1 = 1$, og $c_2 = 0$, sådan at

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 0 \\ e_1(t) &= \cos(2t) \\ f_1(t) &= -\sin(2t) \quad . \end{aligned} \tag{8.109}$$

Præcis den samme fuldstændige løsning og den samme begyndelsesbetingelse kan benyttes til at finde:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= 0 \\ e_2(t) &= \sin(2t) \\ f_2(t) &= \cos(2t) \\ \\ g_3(t) &= 1 \\ e_3(t) &= 0 \\ f_3(t) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{8.110}$$

således at:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad . \tag{8.111}$$

Sammenlign med den tilsvarende løsningsprocedure for $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \mathbf{\Omega}(t)$ og bemærk forskellene.

Eksempel 8.53

I forlængelse af eksempel 8.52 kan vi nu undersøge præcis hvilke tidsparametriserede kurver $\mathbf{p}(t)$ der giver anledning til de givne data $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$: De skal alle opfylde, at $\mathbf{R}(t)$ er givet konkret ved (8.111). Specielt er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= (\cos(2t), \sin(2t), 0) \\ \mathbf{p}'(t) &= v(t) \cdot (\cos(2t), \sin(2t), 0) = (2\cos(2t), 2\sin(2t), 0) \quad , \end{aligned} \tag{8.112}$$

således at

$$\mathbf{p}(t) = \int_0^t (2\cos(2t), 2\sin(2t), 0)\, dt + \mathbf{p}_0 \quad , \tag{8.113}$$

hvor $\mathbf{p}_0$ er en vilkårlig integrations-konstant (vektor). Hvis vi *vælger den vektor* til at være $\mathbf{p}(0) = (0, -1, 0)$ får vi dermed den entydige løsningskurve:

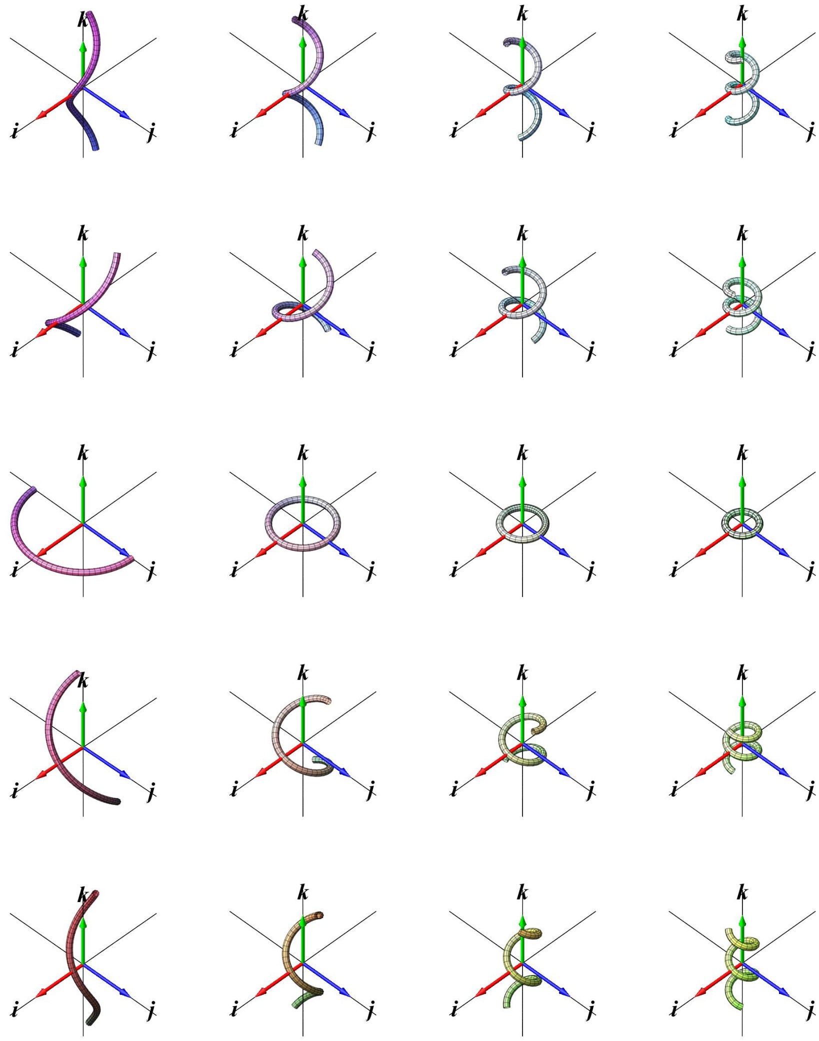
$$\mathbf{p}(t) = (\sin(2t), -\cos(2t), 0) \quad . \tag{8.114}$$

Det er tydeligvis en cirkel i (x, y)-planen. Og den har præcis de krumningsdata vi begyndte med: $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$.

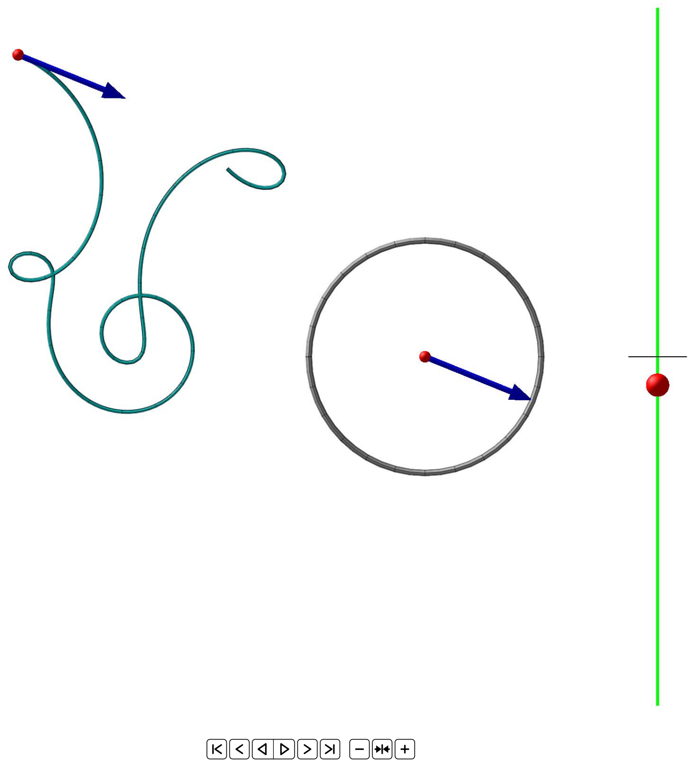
Vi har hermed bevist og illustreret følgende sætning, som ofte benævnes hovedsætningen for rumkurver og som er den rumlige generalisering af sætning 8.43 for plane kurver:

Sætning 8.54 Lad $v(t) > 0$, $\kappa(t) > 0$ og $\tau(t)$ være tre givne glatte funktioner af parameteren $t \in I$. Antag at $0 \in I$. Lad $\mathbf{p}_0$ være en fast vektor i rummet og lad $\mathbf{R}_0$ betegne en given rotationsmatrix.

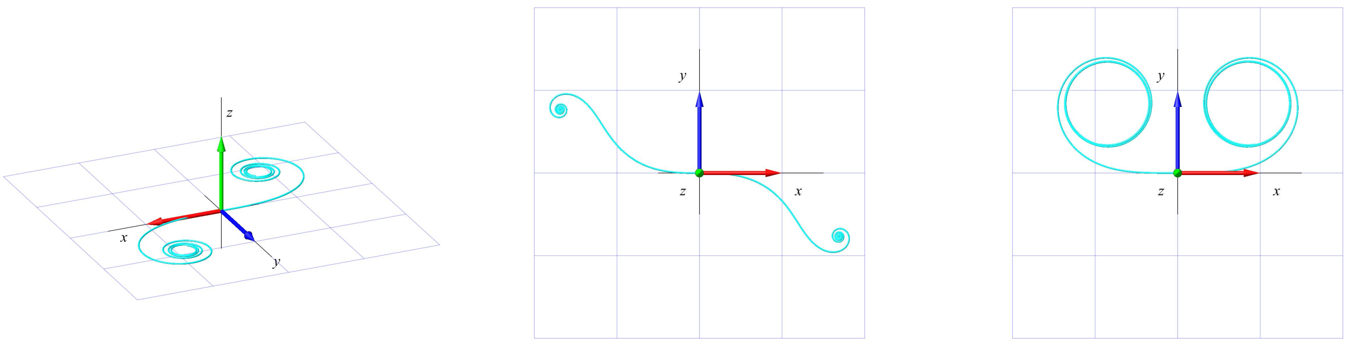
Så findes der en entydigt bestemt tidsparametriseret rumkurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ således at Frenet-Serret rotationsmatricen for kurven er $\mathbf{R}_0$ til tiden $t = 0$ og således at farten af (bevægelsen langs) kurven er $v(t)$, krumningen af kurven er $\kappa(t)$, og torsionen af kurven er $\tau(t)$ til ethvert tidspunkt $t \in I$.



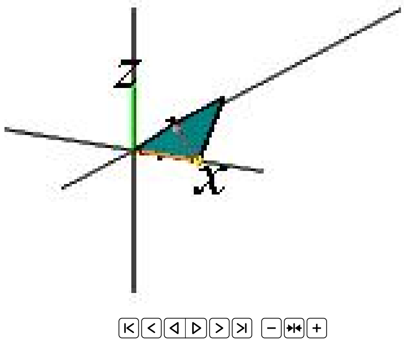
Figur 8.16: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle vindellinjer er her vist i det sædvanlige retvinklede koordinatsystem i rummet. Det er forholdsvis simpelt at spotte størrelsen af krumning og torsion samt fortegnet af torsionen – se opgave 8.31 og sammenlign med figurerne 8.9, 8.10, og 8.11.



Figur 8.17: Bevægelse med buelængdeparametrisering langs den plane kurve fra figur 8.7. I midten ses hastigheds-indikatoren $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ og (til højre) krumnings-indikatoren $\kappa_{\pm}(s)$. Animeret.



Figur 8.18: Plane kurver med givne krumningsfunktioner. Men hvilke? Se opgave 8.44.



Figur 8.19: Frenet–Serret styret bevægelse af basistetraederet langs ’vandret’ vindellinje. Se opgave 8.51. Animeret.

Kapitel 9

Medfølgende tetraederrum

I kapitel 7 har vi allerede undersøgt bevægelsen af punkter, der 'følger med' en given bevægelse af et tetraeder - for eksempel spidspunkterne for de tre kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ i det roterede tetraeder. Placeringen af det roterede tetraeder er til ethvert tidspunkt t givet ved:

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{9.1}$$

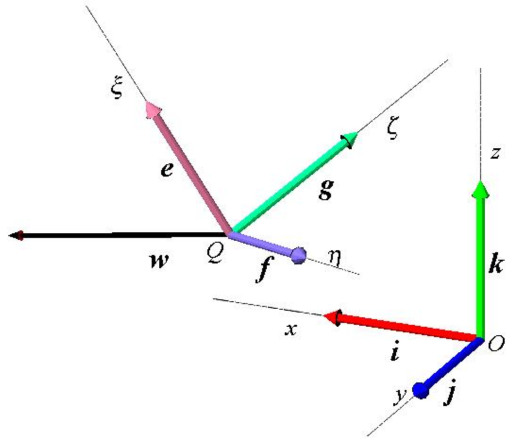
hvor $\mathbf{R}(t)$ stadig betegner en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t og $\mathbf{p}(t)$ betegner den tidsparametriserede fodpunktskurve for tetraederet

Bemærkning 9.1 Læg mærke til, at vi i dette kapitel igen 'fritstiller' både rotationsmatricen og fodpunktskurven i forhold til hinanden i den forstand, at de ikke nødvendigvis er koblede som i forrige kapitel, hvor tetraederet og dermed $\mathbf{R}(t)$ blev styret direkte ud fra fodpunktskurvens geometri via Frenet–Serret basen.

9.1 Koordinat- og basis-skift

Et objekt, der er *fast monteret* på - eller i - det bevægede tetraeder $\boxtimes(t)$ har til ethvert tidspunkt en position i rummet, som selvsagt er direkte bestemt af tetraederets position i rummet. Positionen er altså direkte bestemt ud fra fodpunktskurven og de tre kantvektorer. Vi skal blot derudover beskrive præcist *hvordan* objektet er nagelfast placeret på - eller i - tetraederet.

Vi betragter et punkt på et fræseværktøj, f.eks. centerpunktet for et kugleformet fræsehoved, som er monteret på enden af en stålaksel, der er fast monteret på tetraederet $\boxtimes(t)$ således at akslens andet endepunkt hele tiden er i fodpunktet $p(t)$. Så kan vi repræsentere stålakslen med en vektor $\mathbf{w}(t)$, der til ethvert tidspunkt har fodpunkt i $p(t)$ og spidspunkt i fræsehovedets centerpunkt. Den



Figur 9.1: Koordinatsystemerne $\{Q,\xi,\eta,\zeta\}$ og $\{O,x,y,z\}$ med tilhørende basisvektorer $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ og $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ samt en vektor $\mathbf{w}$ med fodpunkt i Q.

vektor har faste koordinater i forhold tetraederet, dvs. i forhold til $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$. Det vil sige, at der findes 3 *konstanter*, $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$ således at

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad . \tag{9.2}$$

Det er vigtigt at lægge mærke til, at på grund af den nagelfaste placering af $\mathbf{w}(t)$ i $\boxtimes(t)$ så er de tre koordinater $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$ konstante, uafhængige af tiden t. Da de tre kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ til ethvert tidspunkt er ortogonale enhedsvektorer, idet $\mathbf{R}(t)$ er en rotationsmatrix, så kan konstanterne findes ved almindelig retvinklet projektion af $\mathbf{w}$ på kantvektorerne, altså ved prikprodukterne

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{e}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{e}(t) = \tilde{w}_1 \\
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{f}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{f}(t) = \tilde{w}_2 \\
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{g}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}(t) = \tilde{w}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Vektoren $\mathbf{w}$ har i den forstand *koordinaterne* $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)$ med hensyn til de nye basisvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$. Og med opstillingen ovenfor er $\mathbf{w}$ stedvektor ud fra fodpunktet $p(t)$ til det spidspunkt der er givet ved centret af fræsehovedet. Til ethvert tidspunkt t_0 har vi dermed defineret et nyt koordinatsystem, $\{Q,\xi,\eta,\zeta\}$ med de nye basisvektorer i akseretningerne $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\} = \{\mathbf{e}(t_0),\mathbf{f}(t_0),\mathbf{g}(t_0)\}$ og $Q = p(t_0)$, se figur 9.1.

Herefter kan vi *ikke bare skrive* en vektors koordinater således $\mathbf{w} = (1,2,7)$ uden at præcisere hvilket af de to koordinatsystemer $\{Q,\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ eller $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, der refereres til. Hvis $\mathbf{w} = \tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g}$, så har $\mathbf{w}$ koordinaterne $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ og det er sædvanligvis *ikke* koordinaterne for $\mathbf{w}$ med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

Med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ har vi stadigvæk koordinaterne (uden ˜) (w_1, w_2, w_3) for $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j} + w_3 \mathbf{k} \quad . \tag{9.4}$$

Vi bliver således nødt til at markere, hvilken basis vi bruger når vi skriver og bruger koordinater for vektorer. Det gør vi med index G på gamle koordinater og index N på nye koordinater således:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \tilde{w}_1 \mathbf{e} + \tilde{w}_2 \mathbf{f} + \tilde{w}_3 \mathbf{g} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N \\
\mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \mathbf{e}^* + \tilde{w}_2 \mathbf{f}^* + \tilde{w}_3 \mathbf{g}^* = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \\
\mathbf{w} &= w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j} + w_3 \mathbf{k} = (w_1, w_2, w_3)_G \\
\mathbf{w}^* &= w_1 \mathbf{i}^* + w_2 \mathbf{j}^* + w_3 \mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Bemærk, den afgørende forskel mellem $(1,2,7)_N$ og $(1,2,7)_G$. Vi vil finde sammenhængen mellem de to koordinatsæt for en vilkårlig vektor $\mathbf{w}$. Der må nødvendigvis være en eller anden sammenhæng, da de jo begge er koordinatsæt for én og samme vektor.

Vi bruger, at $\mathbf{e}$ er den vektor, der med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ har præcis de koordinater som står i rotationsmatricens første søjle, og tilsvarende for $\mathbf{f}$ og $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{f}^* &= \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{g}^* &= \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Ved indsættelse i (9.5) får vi så:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_2 \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_3 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \qquad (9.7) \\
&= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad ,
\end{aligned}
$$

hvor det sidste lighedstegn stammer direkte fra sidste ligning i (9.5).

Vi har derfor følgende generelle sammenhæng mellem de to koordinatsæt for samme vektor **w** udtrykt i de to baser:

$$
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad . \qquad (9.8)
$$

|||| **Bemærkning 9.2** Læg mærke til, at vi har brugt både tilde og index N til at markere nye koordinater og ingen tilde sammen med index G til at markere gamle koordinater. Resultatet er så, at de gamle koordinater for en vektor **w** kan bestemmes ved at gange **R**-matricen på de nye koordinater for **w**. Bemærk også, at der jo stadigvæk i **R**-matricen står de gamle koordinater for de nye basis-vektorer! Prøv for eksempel at finde de gamle koordinater for den nye første basis-vektor, der jo har de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = (1,0,0)_N$.

Omvendt har vi også direkte fra (9.8) ved at gange med $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$ på begge sider af lighedstegnet:

$$
\begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G^* \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad , \qquad (9.9)
$$

således at de *nye* koordinater for **w** kan bestemmes ved at gange den transponerede af rotations-matricen på de *gamle* koordinater for **w**.

OPGAVE 9.3

Lad $\mathbf{R}$ betegne rotationsmatricen $\mathbf{R}_z(t_0)$ for en fast valgt værdi af $t_0 \in \mathbb{R}$ og lad $N = \{\mathbf{e}(t_0), \mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0)\}$ betegne den dertil hørende nye basis.

1. Bestem de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ for de vektorer $\mathbf{w}$, der har de gamle koordinater (med hensyn til $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$) henholdsvis: $(1,0,0)_G$, $(0,1,0)_G$, $(0,0,1)_G$, og $(1,2,3)_G$.

2. Bestem de gamle koordinater for de vektorer $\mathbf{w}$, der har de nye koordinater henholdsvis: $(1,0,0)_N$, $(0,1,0)_N$, $(0,0,1)_N$, og $(1,2,3)_N$.

Med de to baser $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ og $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ til rådighed i rummet kan vi beskrive lineære afbildninger fra $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$ ved hjælp af hver enkelt af de to baser: En given lineær afbildning kan jo udtrykkes ved hjælp af en afbildningsmatrix dels med hensyn til den gamle basis og dels med hensyn til den nye basis.

Lad os antage, at $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ er en given lineær afbildning. Så gælder der for enhver vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ at billed-vektoren $\mathcal{A}(\mathbf{w})$ kan skrives på to måder:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}) \\ &= w_1\mathcal{A}(\mathbf{i}) + w_2\mathcal{A}(\mathbf{j}) + w_1\mathcal{A}(\mathbf{k}) \quad , \end{aligned} \tag{9.10}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(\tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g}) \\ &= \tilde{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{e}) + \tilde{w}_2\mathcal{A}(\mathbf{f}) + \tilde{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{g}) \quad . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Det betyder præcis at der gælder følgende for alle $\mathbf{w}$:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^* = \left[\ (\mathcal{A}(\mathbf{i}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{j}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{k}))^*\ \right] \mathbf{w}^* \quad , \tag{9.12}$$

så hvis vi lader $\mathbf{A}_G$ betegne matricen for $\mathcal{A}$ med hensyn til den gamle basis får vi

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^*_G = \mathbf{A}_G \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G = \mathbf{A}_G\,\mathbf{w}^*_G \tag{9.13}$$

og tilsvarende når vi lader $\mathbf{A}_N$ betegne matricen for $\mathcal{A}$ med hensyn til den nye basis:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^*_N = \mathbf{A}_N \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \mathbf{A}_N\,\mathbf{w}^*_N \quad . \tag{9.14}$$

Men heraf følger så af (9.8) og (9.9):

$$
\begin{aligned}
\left(\mathcal{A}(\mathbf{w})\right)_N^* &= \mathbf{R}^* \left(\mathcal{A}(\mathbf{w})\right)_G^* \\
&= \mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{w}_G^* \\
&= \left(\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{R}\right) \mathbf{w}_N^* \\
&= \mathbf{A}_N \, \mathbf{w}_N^* \quad .
\end{aligned} \tag{9.15}
$$

Da dette holder for alle vektorer $\mathbf{w}$ må derfor gælde:

$$
\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_G \, \mathbf{R} = \mathbf{A}_N \quad . \tag{9.16}
$$

De to afbildningsmatricer $\mathbf{A}_G$ og $\mathbf{A}_N$ for afbildningen $\mathcal{A}$ med hensyn til henholdsvis den gamle og den nye basis er således similære med hensyn til basisskiftmatricen $\mathbf{R}$.

9.2 Hastighedsfeltet for det medfølgende rum

Vi betragter nu igen (ligesom i kapitel 7, afsnit 7.5) et punkt $q(t)$, der bevæger sig sammen med tetraederet

$$
\begin{aligned}
\boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\
&= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad ,
\end{aligned} \tag{9.17}
$$

idet vi her dog *ikke vil indskrænke os* til kun as betragte hjørnepunkterne i tetraederet.

Vi betragter altså nu et vilkårligt punkt $q(t)$, som er fast i forhold til tetraederet og som derfor har faste tidsuafhængige koordinater med hensyn til det nye koordinatsystem $\{e(t), f(t), g(t)\}$. Det vil sige, at stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra Origo O i det gamle koordinatsystem til punktet $q(t)$ er summen:

$$
\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t) \quad , \tag{9.18}
$$

hvor $\mathbf{p}(t)$ (som tidligere) er vektoren fra O til det nye koordinatsystems Origo $Q(t) = p(t)$, og hvor $\mathbf{w}(t)$ er vektoren fra $p(t)$ til $q(t)$. Den sidstnævnte har så *faste tidsuafhængige koordinater* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$:

$$
\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.19}
$$

således at

$$
\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad . \tag{9.20}
$$

Punktet $q(t)$ bevæger sig ikke i det medfølgende nye koordinatsystem hvor det har konstante koordinater, men $q(t)$ bevæger sig (typisk) i det faste gamle koordinatsystem.

Vi vil undersøge hastigheden af den bevægelse til ethvert tidspunkt i det faste gamle koordinatsystem. Vi må forvente, at bevægelsen afhænger både af fodpunkt-bevægelsen $p(t)$ og af rotationsmatricerne $\mathbf{R}(t)$. Ved at differentiere (9.20) med hensyn til t får vi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}'(t) &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1\mathbf{e}'(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}'(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}'(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_2\mathbf{f}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_3\mathbf{g}(t)) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{w}(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \quad ,
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

hvor vi har benyttet (7.37) fra kapitel 7 og den aksevektor, $\boldsymbol{\omega}(t)$, som som er bestemt via $\mathbf{R}(t)$.

Da valget af det faste punkt $q(t)$ i det medfølgende nye koordinatsystem var helt generelt og givet ved punktets faste koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ i det nye system, så kan vi nu ved hjælp af (9.21) til ethvert tidspunkt bestemme den øjeblikkelige hastighed af *ethvert punkt*, der er fast monteret i det rum, der følger med tetraederet. Vi skal blot kende punktets faste koordinatsæt i dette medfølgende tetraeder-rum samt fodpunktets hastighedsvektor $\mathbf{p}'(t)$ og rotationsmatricens øjeblikkelige akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Med andre ord: Vi kender nu bevægelsen, ikke blot af selve tetraederet $\boxtimes(t)$ og dets hjørnepunkter, men også bevægelsen af ethvert punkt i hele det rum, der er *fast monteret på tetraederet*.

Vi har dermed:

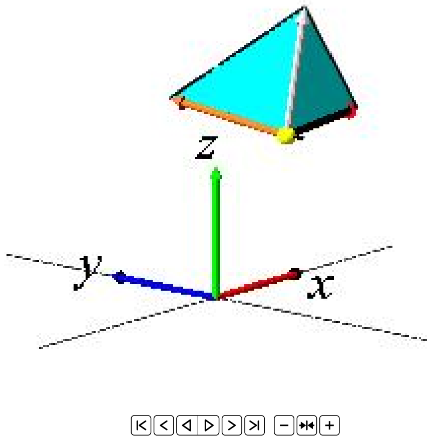
Sætning 9.4 Lad $\boxtimes(t)$ betegne en bevægelse af et tetraeder:

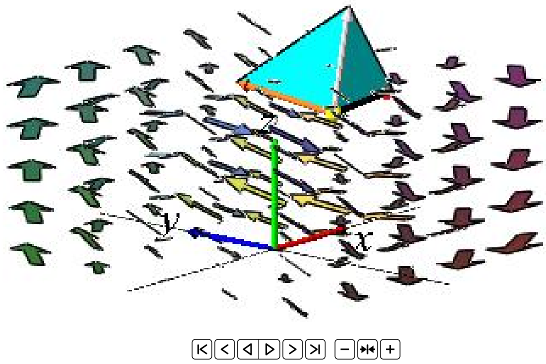
$$
\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t)\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \tag{9.22}
$$

hvor $\mathbf{R}(t)$ angiver en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t med akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Det til denne bevægelse hørende øjeblikkelige hastighedsfelt til tidspunktet t_0 er så givet ved følgende vektor i det vilkårligt givne punkt i rummet, der har stedvektoren $\mathbf{q}$ (ud fra det gamle faste Origo, O):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{q}'(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{w}(t_0) \\
&= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad .
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

Bemærkning 9.5 Med andre ord: Til ethvert tidspunkt og til ethvert givet punkt i rummet har vi dermed knyttet en vektor, nemlig den hastighed som punktet har på det tidspunkt hvis det følger fast med i hele tetraeder-rummets bevægelse, sådan som den bevægelse er fastlagt af $\boxtimes(t)$.





Figur 9.2: En tetraeder-bevægelse langs en cirkel og det tilhørende øjeblikkelige hastigheds-vektorfelt $\mathbf{V}_q(t_0)$ for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.6. Animeret.

Eksempel 9.6

En roterende bevægelse af et standard tetraeder er givet ved en parametriseret fodpunktskurve (i dette tilfælde en cirkel) og en tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, der er et produkt af to akserotationsmatricer som følger, hvor parameteren er $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\ \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G \quad . \end{aligned} \tag{9.24}$$

Vi bestemmer først aksematricen $\mathbf{\Omega}(t)$ og aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ til ethvert tidspunkt t:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sin(t) \\ 1 & 0 & -\cos(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{bmatrix}_G \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \quad . \end{aligned} \tag{9.25}$$

Ud fra disse ingredienser finder vi det øjeblikkelige hastighedsfelt for ethvert punkt $q = (q_1, q_2, q_3)_G$, se opgave 9.7:

$$\mathbf{V}_q(t) = (-q_2 + (q_3 - 1)\sin(t), q_1 - (q_3 - 1)\cos(t), (q_2 - \sin(t))\cos(t) - (q_1 - \cos(t))\sin(t))_G \, .$$

Se figur 9.2, hvor hastighedsfeltet (og tetraeder-bevægelsen) er vist i animation over det givne $t-$interval, $t \in [0, 2\pi]$.

OPGAVE 9.7

Eftervis de angivne udtryk i eksempel 9.6 - især det sidste, dvs. udtrykket for det øjeblikkelige hastighedsfelt for den angivne bevægelse af tetraederrummet.

OPGAVE 9.8

Bestem tilsvarende udtryk som i eksempel 9.6, men nu ud fra følgende – lidt simplere – data for bevægelsen af tetraederrummet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (t,t,1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.26}$$

9.3 Karakterisering af hastighedsfeltet

Der er to hovedtilfælde for det øjeblikkelige hastighedsfelt for en bevægelse af tetraederrummet til et givet tidspunkt t_0. Vi antager som ovenfor, at bevægelsen er givet på følgende måde, hvor $\mathbf{R}(t)$ som sædvanlig betegner en tidsafhængig rotationsmatrix og $\mathbf{p}(t)$ betegner en tidsparametriseret fodpunktskurve:

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{9.27}$$

Det afgørende er, om den ud fra $\mathbf{R}(t)$ bestemte akse-vektor (til det givne tidspunkt) $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ er nul-vektoren eller ikke:

9.3.1 Øjeblikkelig parallelforskydning

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$ er hastighedsfeltet simpelthen ifølge (9.23):

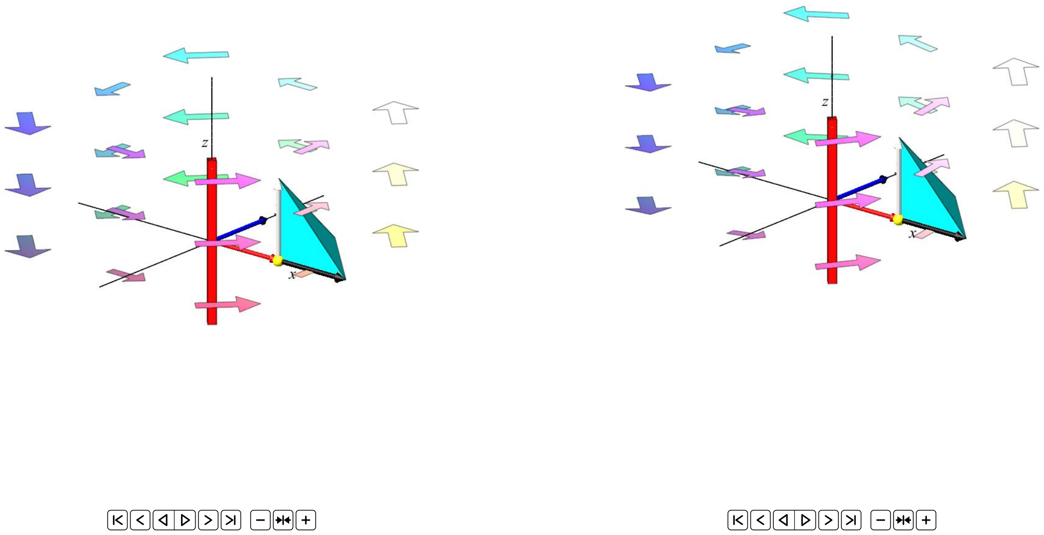
$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) \quad , \tag{9.28}$$

således at *alle* punkter q i hele rummet har *samme* hastighedsvektor til det betragtede tidspunkt t_0. Der er altså tale om en øjeblikkelig parallelforskydning (øjeblikkelig translation) i den retning og med den fart, som er givet ved tetraederfodpunktets hastighed $\mathbf{p}'(t_0)$ til det tidspunkt. Hvis specielt $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$ siger vi, at alle punkter i hele rummet er i øjeblikkelig hvile til tidspunktet t_0.

9.3.2 Øjeblikkelig skrue-bevægelse

Hvis $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ er en fast valgt vektor i rummet, kan vi definere en ret linje i rummet med retningsvektoren $\boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ på følgende måde, hvor parameteren er u og $\mathbf{r}_0$ er stedvektoren til et fast punkt i rummet:

$$\mathcal{L} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\,\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.29}$$



Figur 9.3: Lodrette tetraeder-bevægelser langs henholdsvis en cirkel og en vindellinje, begge med tilhørende øjeblikkelige skrue-akser samt hastighedsfelter for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$. Animeret.

Sætning 9.9 Vi ser på en speciel bevægelse af tetraederrummet beskrevet ved $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t)\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ som ovenfor men her med *konstant akse-vektor* $\boldsymbol{\omega}$ og en fodpunktsbevægelse med *konstant hastighedsvektor* $h\boldsymbol{\omega}$ *på linjen* $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + h\,t\,\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.30}$$

Denne bevægelse giver anledning til følgende hastighedsfelt i rummet:

$$\mathbf{V}_q = h\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad . \tag{9.31}$$

Bevis. Vi indsætter $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + h\,t\,\boldsymbol{\omega}$ i (9.23) og får som ønsket til ethvert tidspunkt t_0:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 - h\,t_0\,\boldsymbol{\omega}) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad .\end{aligned} \tag{9.32}$$

$\square$

Definition 9.10 Enhver bevægelse af et tetraederrum, der til et givet tidspunkt t_0 giver anledning til et hastighedsfelt af formen (9.31) vil vi kalde en øjeblikkelig skrue-bevægelse med den rette linje $\mathcal{L}$ som øjeblikkelig skrue-akse, øjeblikkelig vinkelhastighed $\boldsymbol{\omega}$ og øjeblikkelig reduceret skrue-højde (pitch) h. Betegnelsen *øjeblikkelig* betyder selvfølgelig, at skrue-aksen, vinkelhastigheden, og den reducerede skruehøjde alle afhænger af tidspunktet og jo ikke nødvendigvis er konstante.

De betegnelser er helt rimelige. Lad os se på et eksempel:

Eksempel 9.11

Med udgangspunkt i akserotationsmatricen $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$, der har tilhørende akse-vektor $\boldsymbol{\omega} = (0,0,1)_G$, og ved valg af fodpunktskurven $p(t) = (0,0,ht)_G$, hvor h er en konstant, får vi

$$\begin{aligned}\boxtimes(t) &= \mathbf{R}_z(t)\boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + (0,0,ht)_G \\ &= \boxtimes((0,0,ht)_G,\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)) \quad ,\end{aligned} \tag{9.33}$$

hvor

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(t) &= (0,0,1)_G \\ \mathbf{e}(t) &= (\cos(t),\sin(t),0)_G \\ \mathbf{f}(t) &= (-\sin(t),\cos(t),0)_G .\end{aligned} \tag{9.34}$$

Hvis vi nu betragter et punkt $q(t)$ med faste koordinater $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)_N$ i det bevægede tetraedersystem får vi stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra O til $q(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = (0,0,ht)_G + \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.35}$$

således at

$$\mathbf{q}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix}_G \quad . \tag{9.36}$$

Dette er en rotation med vinkel t af vektoren $\mathbf{w}$ omkring z-aksen efterfulgt af en parallelforskydning i $z-$akseretningen med vektoren $(0,0,ht)_G$ - altså en skrue-bevægelse. Endnu mere konkret kan vi eksempelvis betragte punktet $(1,0,0)_N$ i det medfølgende tetraederrum. Det punkt vil gennemløbe følgende punkter, beskrevet med koordinaterne i det gamle koordinatsystem:

$$\mathbf{q}(t) = (0,0,ht)_G + \mathbf{e}(t) = (\cos(t),\sin(t),ht)_G \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.37}$$

hvilket netop er en parameterfremstilling for en helix - som er højreskruet hvis $h > 0$, venstreskruet hvis $h < 0$ og som er udartet til en cirkel hvis $h = 0$, jvf. opgave 8.5 i kapitel 8.

|||| OPGAVE 9.12

I forlængelse af ovenstående eksempel 9.11: Find de kurver, som gennemløbes af punkterne $(0,1,0)_N$, $(0,0,1)_N$ og $(1,2,3)_N$ i løbet af skruebevægelsen.

9.4 Hovedresultat for roterende bevægelser

Vi kan nu formulere og vise hovedsætningen for roterende bevægelser i rummet. Vi antager, at $\boldsymbol{\omega}(t_0) \neq \mathbf{0}$ sådan at der virkelig er tale om en egentlig rotation. (Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$ er sagen allerede klar; så er der tale om en øjeblikkelig parallelforskydning, se 9.3.1 ovenfor.)

|||| Sætning 9.13 Lad $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ betegne en egentlig roterende bevægelse af basistetraederet langs en given fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$. Vi antager altså, at $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t.

Så findes der til ethvert tidspunkt t_0 en entydigt bestemt ret linje $\mathcal{L}(t_0)$ i rummet, nemlig

$$\mathcal{L}(t_0) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \left(\mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \right) + u\, \boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.38}$$

således at den øjeblikkelige bevægelse af tetraederrummet til tidspunktet t_0 er en skrue-bevægelse med $\mathcal{L}(t_0)$ som skrue-akse og med reduceret skruehøjde $h(t_0)$ som er givet ved

$$h(t_0) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \cdot \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad . \tag{9.39}$$

Hvis $h(t_0) = 0$ er der tale om en øjeblikkelig drejning omkring aksen $\mathcal{L}(t_0)$ til det givne tidspunkt t_0.

Det øjeblikkelige hastighedsfelt for bevægelsen af tetraederrummet på stedet $\mathbf{q}$ er tilsvarende:

$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.40}$$

|||| Definition 9.14 De ingredienser som udledes i sætning 9.13 til beskrivelse af den egentlige roterende bevægelse $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$, altså $\mathcal{L}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, og $h(t)$ vil vi her og i det følgende kalde bevægelsens skrue-data til tiden t.

Bevis for sætning 9.13. Vi skal blot vise, at det øjeblikkelige hastighedsfelt har form som i ligning (9.31). Vi lokaliserer først skrue-aksen i rummet, dvs. vi skal finde et eller flere punkt(er) $q = r$

således at følgende ligning er opfyldt for en passende værdi af $h(t_0)$:

$$\mathbf{V}_r(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad . \tag{9.41}$$

Denne ligning er selvfølgelig ækvivalent med

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.42}$$

Men den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.42): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.42). Se opgave 9.15 nedenfor. Vi sætter $\mathbf{r}_0$ til at være det udpegede punkt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad , \tag{9.43}$$

sådan at

$$\mathcal{L}(t_0) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\,\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.44}$$

Med det $\mathbf{r}_0$ har vi så også (per konstruktion) at (9.42) er opfyldt:

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.45}$$

Heraf får vi

$$\mathbf{p}'(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad , \tag{9.46}$$

som ved indsættelse i (9.23) giver

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= (h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0))) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \tag{9.47}$$

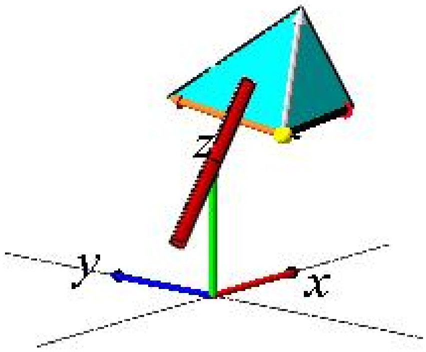
Det vil sige, at vi sluttelig har følgende øjeblikkelige hastighedsfelt for den betragtede bevægelse:

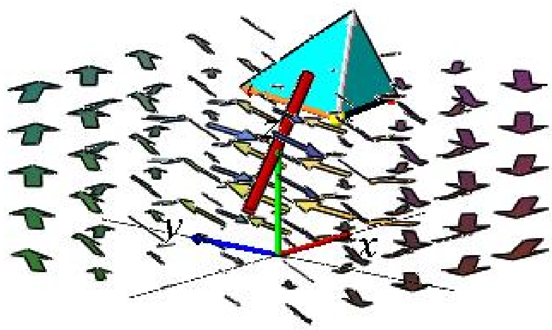
$$\mathbf{V}_q(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad , \tag{9.48}$$

og det er netop i henhold til definition 9.10 en øjeblikkelig skruebevægelse omkring den påståede akse. Skruebevægelsen reducerer specielt til en øjeblikkelig drejning hvis $h(t_0) = 0$. □

|||| OPGAVE 9.15

Vis, at ovenstående intermezzo i beviset for sætning 9.13 er OK, altså at: "Den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.42): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.42)."





Figur 9.4: Tetraeder-bevægelse langs cirkel, den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse samt hastighedsfeltet for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.16. Animeret.

Eksempel 9.16

En bevægelse af tetraederrummet er givet ved udtrykkene for $\mathbf{p}(t)$ og $\mathbf{R}(t)$, som er angivet i eksempel 9.6:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\
\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned}
\tag{9.49}
$$

I det eksempel fandt vi, at aksevektoren for bevægelsen er

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)_G \quad . \tag{9.50}
$$

Bevægelsen af tetrederrummet har så følgende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af t:

$$
\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 3/2)_G + (u\cos(t), u\sin(t), u)_G \quad , \quad u \in [0, 2\pi] \tag{9.51}
$$

med reduceret skruehøjde $h(t) = 0$. Bemærk, at den øjeblikkelige skrueakse afhænger (kraftigt) af tidspunktet t. Se opgave 9.17 og figurerne 9.4.

OPGAVE 9.17

Vis, at den påståede skrue-akse i eksempel 9.16 er korrekt for enhver værdi af t, og eftervis, at skruehøjden konstant er 0, således at der til ethvert tidspunkt er tale om en øjeblikkelig drejning omkring den øjeblikkelige skrue-akse.

OPGAVE 9.18

Bestem skrue-akse og reduceret skruehøjde for ethvert t i det eksempel, der er defineret i opgave 9.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (t,t,1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.52}$$

OPGAVE 9.19

Bestem $\omega(t)$, det øjeblikkelige hastighedsfelt, den øjeblikkelige skrueakse, og den øjeblikkelige reducerede skruehøjde for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$ ud fra følgende data for en bevægelse af tetraederrummet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t),\sin(t),0)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_x(2t) \quad . \end{aligned} \tag{9.53}$$

9.5 Frenet–Serret skrue-data

I dette afsnit vil vi se lidt nærmere på de specielle tetraederbevægelser, der er totalt styret af en given fodpunktskurve, nemlig Frenet–Serret styring ved hjælp af Frenet–Serret basen for en given regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ med positiv krumning som vi indførte og analyserede i kapitel 8, afsnittene 8.3 og 8.6.

Vi vil her specielt undersøge hvordan *krumningen* og *torsionen* af fodpunktskurven indgår i beskrivelsen af skrue-data for Frenet–Serret styringen af et basistetraeder langs den givne fodpunktskurve.

Sætning 9.20 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær kurve i rummet med fart $v(t)$, krumning $\kappa(t) > 0$, torsion $\tau(t)$, og medfølgende *Frenet–Serret tetraeder*:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t),\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)) = \mathbf{R}(t)\boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{9.54}$$

Skrue-data for den derved definerede Frenet–Serret styring af $\boxtimes(t)$ er da givet ved følgende udtryk for enhver given værdi af t:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t)\cdot\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t) + v(t)\cdot\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.55}$$

$$h(t) = \frac{\tau(t)}{\kappa^2(t)+\tau^2(t)} \quad , \quad \text{og} \tag{9.56}$$

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t)+\tau^2(t)}\cdot\mathbf{f}(t)\right) + u\cdot(\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t) + \kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t)) \quad . \tag{9.57}$$

Bevis. Vi ved allerede fra kapitel 8 at de gamle koordinater for $\boldsymbol{\omega}$ er elementer i aksematricen $\boldsymbol{\Omega}$ som jo per definition er matricen (mht. den gamle basis) for den lineære afbildning $\mathbf{v} \mapsto \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$. De nye koordinater for $\boldsymbol{\omega}$ (dvs. koordinaterne med hensyn til den nye basis $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$) fås derfor som de tilsvarende elementer i afbildningens matrix med hensyn til den nye basis, som er givet via basisskiftmatricen $\mathbf{R}$ på følgende vis – sammenlign med ligning (9.16):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{R} &= \mathbf{R}^{-1}\cdot(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}^*)\cdot\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R}^*\cdot(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}^*)\cdot\mathbf{R} \\
&= (\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}')\cdot(\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}) \\
&= (\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}')\cdot\mathbf{E} \\
&= \boldsymbol{\Xi} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -v\cdot\kappa & 0 \\ v\cdot\kappa & 0 & -v\cdot\tau \\ 0 & v\cdot\tau & 0 \end{bmatrix} \quad ,
\end{aligned} \tag{9.58}$$

hvor $v = v(t)$ betegner farten, længden af $\mathbf{p}'(t)$, i.e. $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$. Koordinaterne for $\boldsymbol{\omega}$ med hensyn til $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ er derfor:

$$\boldsymbol{\omega} = v\cdot(\tau, 0, \kappa)_N \quad , \tag{9.59}$$

sådan at

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t)\cdot(\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t) + \kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t)) \quad , \tag{9.60}$$

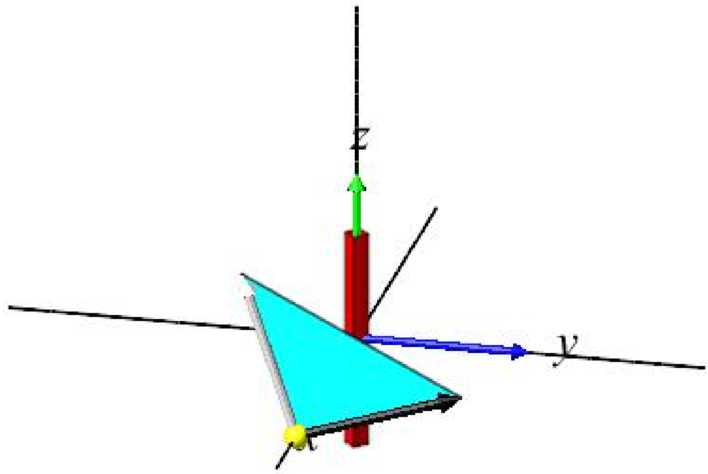
som påstået.

Dernæst får vi direkte:

$$\|\boldsymbol{\omega}(s)\|^2 = v^2(t)\cdot\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right) \quad , \tag{9.61}$$

og dermed følgende:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t)\bullet\mathbf{p}'(t) &= (\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t))\bullet\mathbf{e}(t) = \tau(t) \\
\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{p}'(t) &= (\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t))\times\mathbf{e}(t) = \kappa(t)\cdot\mathbf{f}(t) \quad ,
\end{aligned} \tag{9.62}$$



Figur 9.5: Frenet–Serret styring langs en vindellinje og den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af $s \in [0, 2\pi]$. Animeret.

som giver resten af de påståede skruedata ved indsættelse i definition 9.14. $\square$

OPGAVE 9.21

Lad $\mathbf{p}(s)$ betegne følgende buelængdeparametriserede rumkurve (jvf. opgave 8.49 fra kapitel 8):

$$\mathbf{p}(s) = (3\cos(s/5), 3\sin(s/5), 4s/5) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.63}$$

Bestem skrue-data for Frenet–Serret styring langs $\mathbf{p}(s)$ og angiv til ethvert tidspunkt det tilsvarende øjeblikkelige hastighedsfelt af det medfølgende tetraederrum.

9.6 Styring med givne skrue-data

Vi vil i dette afsnit se på den *omvendte problemstilling* i forhold til hovedresultatet i sætning 9.13, nemlig følgende:

Antag, at vi har fået oplyst en parameterfremstilling (med enheds-retningsvektor $\mathbf{v}(t)$) for en ret linje $\mathcal{L}(t)$ til ethvert tidspunkt t, samt to funktioner af tiden $w(t)$ og $h(t)$. Antag også, at vi kender den præcise placering af et standard tetraeder i rummet til tiden $t = 0$, dvs. vi kender $\boxtimes(0) = \mathbf{R}(0) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(0)$, hvor altså $\mathbf{R}(0)$ er en given rotationsmatrix og $\mathbf{p}(0)$ er et givet fodpunkt i rummet. Kan vi så konstruere $\mathbf{R}(t)$ og $\mathbf{p}(t)$ til ethvert senere – og tidligere – tidspunkt sådan at den givne rette linje $\mathcal{L}(t)$ til det tidspunkt netop bliver den øjeblikkelige skrue-akse for den øjeblikkelige skruebevægelse af $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ med øjeblikkelig akse-rotationsvektor $\boldsymbol{\omega} = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$?

Svaret er ja, det kan vi! Og det er indholdet af følgende sætning, hvor vi gentager beskrivelsen af scenariet med lidt flere præcise detaljer:

Sætning 9.22 Vi lader $\mathcal{L}(t)$ betegne følgende familie af orienterede rette linjer i rummet:

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{q}(t) + u \cdot \mathbf{v}(t) \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.64}$$

hvor $\mathbf{q}(t)$ er en parametriseret kurve i rummet, og hvor $\mathbf{v}(t)$ er en enhedsvektor til ethvert tidspunkt $t \in \mathbb{R}$. Lad $h(t)$ og $w(t)$ betegne to givne funktioner af t og antag at $w(t) > 0$ for alle t. Lad endelig p_0 betegne et punkt i rummet med stedvektor $\mathbf{p}_0$ og lad $\mathbf{R}_0$ betegne en given rotationsmatrix.

Så findes der en entydigt bestemt parametriseret fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ og en entydigt bestemt t-parametriseret familie af rotationsmatricer $\mathbf{R}(t)$ med $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ således at følgende roterende bevægelse af standard-tetraederrummet

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \tag{9.65}$$

netop har $\mathcal{L}(t)$ som øjeblikkelig skrueakse, $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ som øjeblikkelig aksevektor, og $h(t)$ som øjeblikkelig reduceret skruehøjde.

Specifikt skal fodpunktskurven tilfredsstille følgende differentialligninger (med begyndelsesbetingelsen $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \end{aligned} \tag{9.66}$$

Bevis. Som antydet skal vi løse to differentialligningssystemer, dels et for $\mathbf{p}(t)$ og dels et for $\mathbf{R}(t)$ med begyndelsesbetingelserne $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$. Men $\mathbf{R}(t)$ bestemmes direkte ud fra $\boldsymbol{\omega}(t)$ og $\mathbf{R}(0)$ som i kapitel 7 afsnit 7.4.1 (se metoden og eksemplerne der og konkrete eksempler nedenfor).

Vi mangler derfor kun at bestemme fodpunktskurven $\mathbf{p}(t)$, dvs. vise, at den er givet som løsning til (9.66).

Fodpunktet $\mathbf{p}(t)$ skal opfylde to krav som stammer direkte fra sætning 9.13: Det første krav er givet ved ligning (9.39):

$$\mathbf{p}'(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = h(t) \cdot \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 \quad , \tag{9.67}$$

som – efter division med $w(t)$ på begge sider af lighedstegnet – er ækvivalent med:

$$\mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = h(t) \cdot w(t) \quad . \tag{9.68}$$

Det andet krav er at til ethvert givet tidspunkt t skal det givne punkt $\mathbf{q}(t)$ ligge på den givne linje $\mathcal{L}(t)$, dvs. i henhold til ligning (9.38):

$$\mathbf{q}(t) = \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \right) + u\, \boldsymbol{\omega}(t) \tag{9.69}$$

for et passende valg af parameterværdi $u \in \mathbf{R}$ (som gerne må afhænge af t). Dvs. for ethvert tidspunkt t skal der findes en værdi af u således at

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + u \cdot w(t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \tag{9.70}$$

Vi kan isolere den søgte værdi af u fra denne ligning ved at danne skalarprodukt med $\mathbf{v}(t)$ på begge sider af lighedstegnet:

$$(\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = u \cdot w(t) \quad , \tag{9.71}$$

hvor vi har benyttet, at $\mathbf{v}(t)$ jo er vinkelret på krydsproduktet $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)$ og at $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 1$ for alle t.

Heraf får vi så ved at indsætte $u \cdot w(t) = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)$ tilbage i ligning (9.70):

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \tag{9.72}$$

Ved at omskrive den ligning lidt får vi endelig:

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) = w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \tag{9.73}$$

Vi har dermed de to påståede ligninger til bestemmelse af $\mathbf{p}(t)$ ud fra $h(t)$, $w(t)$, $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{q}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \end{aligned} \tag{9.74}$$

Hvis vi skriver disse ligninger ud i koordinater, altså bruger $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G$ osv. vil vi se (som i det simple eksempel nedenfor) at vi har ialt 4 koblede lineære første-ordens differentialligninger til bestemmelse af de 3 koordinatfunktioner for $\mathbf{p}(t)$.

Det betyder dog ikke, at differentialligningssystemet er overbestemt og derfor muligvis uden løsninger – hvad vi godt kunne frygte, fordi der jo er flere ligninger end ubekendte. Koefficientmatricen for det totale differentialligningssystem har netop rangen 3 (se opgaver og eksempler nedenfor) således at der for givne (passende pæne) koefficientdata $h(t)$, $w(t)$, $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{q}(t)$ findes præcis én løsning $\mathbf{p}(t)$ til differentialligningssystemet (9.74) med den givne begyndelsesbetingelse $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Og det var det, vi skulle vise. □

Vi illustrerer påstanden om, at der generelt findes præcis én løsning til (9.74):

Eksempel 9.23

Vi antager, at $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ = den sædvanlige tredje basisvektor i det (gamle) koordinatsystem for alle t. Så reducerer differentialligningssystemet i (9.74) til følgende – skrevet ud med koordinaterne for de respektive vektorfunktioner:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ p_2'(t) &= w(t) \cdot (p_1(t) - q_1(t)) \\ p_1'(t) &= w(t) \cdot (q_2(t) - p_2(t)) \quad , \end{aligned} \tag{9.75}$$

som netop har rangen 3 og en entydig løsning med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Bemærk, at 'krydsproduktligningen' i (9.74) kun giver anledning til 2 ligninger, der tilsammen redegør for hvordan $\mathbf{p}(t)$ udvikler sig i det 2D-vektorrum, der er vinkelret på $\mathbf{v} = \mathbf{k}$.

OPGAVE 9.24

Lad $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_G$ betegne en given enhedsvektor i rummet og lad $(*)$ betegne følgende ligningssystem for $\mathbf{x} = (x, y, z)_G$, hvor a er et reelt tal og hvor $\mathbf{b}$ er en vektor der er vinkelret på $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= a \\ \mathbf{v} \times \mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad . \end{aligned} \tag{9.76}$$

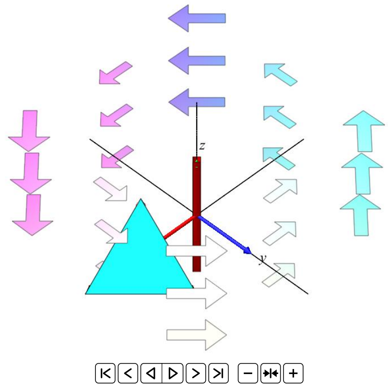
Vis, at $(*)$ kan skrives på formen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^*$, hvor $\mathbf{A}$ er en (4×3)-matrix og $\mathbf{c}$ er en vektor. Vis dernæst, at (4×4)-totalmatricen for dette lineære ligningssystem har rangen 3, således at der er netop én løsning $\mathbf{x}$ til systemet.

Eksempel 9.25

Med $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ som i ovenstående eksempel 9.23 og med $h(t) = 0$, $w(t) = 1$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$ for alle t får vi:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= 0 \\ p_2'(t) &= p_1(t) \\ p_1'(t) &= -p_2(t) \quad , \end{aligned} \tag{9.77}$$

som har den fuldstændige løsning (med frie konstanter c_i) (fås på samme måde som i eksempel 7.20 i



Figur 9.6: Tetraederbevægelsen som er udviklet i eksemplerne 9.23 og 9.25. Animeret.

Kapitel 7):

$$\begin{aligned} p_3(t) &= c_3 \\ p_2(t) &= c_1 \cdot \sin(t) + c_2 \cdot \cos(t) \\ p_1(t) &= c_1 \cdot \cos(t) - c_2 \cdot \sin(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.78}$$

Hvis vi dernæst antager, at fodpunktet til tiden $t = 0$ er givet ved $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = (1,0,0)_G$ får vi derfor følgende præcise fodpunktskurve til ethvert andet tidspunkt t – ved at indsætte $t = 0$ i ovenstående ligninger og løse for c_1, c_2, og c_3:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0 \\ p_2(t) &= \sin(t) \\ p_1(t) &= \cos(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.79}$$

Med fodpunktskurven på plads, mangler vi blot at konstruere rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ således at den netop til ethvert tidspunkt t har den ønskede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ og iøvrigt tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen, som vi her i dette eksempel vil antage er givet simpelt ved: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$.

Konstruktionen af $\mathbf{R}(t)$ foregår præcis som i eksempel 7.20 i kapitel 7. Hvis vi gennemgår proceduren derfra får vi følgende – ikke overraskende – resultat:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(t) \quad . \tag{9.80}$$

Vi kan altså konkludere, at i dette eksempel er det følgende entydigt givne tetraederbevægelse, der vil give anledning til de ønskede givne skrue-data inklusive de givne begyndelsesbetingelser (se animationen af bevægelsen samt det inducerede hastighedsvektorfelt i figur 9.6):

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + (\cos(t), \sin(t), 0)_G \quad . \end{aligned} \tag{9.81}$$

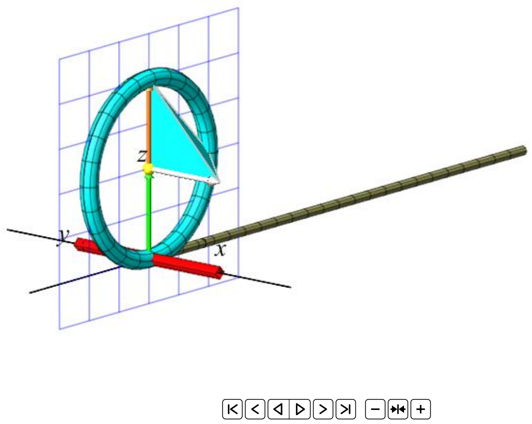
OPGAVE 9.26

Bestem på samme måde som i eksempel 9.23 de tetraederbevægelser, der opfylder følgende skrue-data og begyndelsesbetingelser:

1. $w(t) = 2$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
2. $w(t) = 2$, $h(t) = 1$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
3. $w(t) = 1$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_x(\pi/4)$
4. $w(t) = 1$, $h(t) = 1$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_z(\pi/4)$

OPGAVE 9.27

Angiv skruedata som kan bruges til konstruktion af rulning af en cirkel langs en ret linje som i figur 9.7.

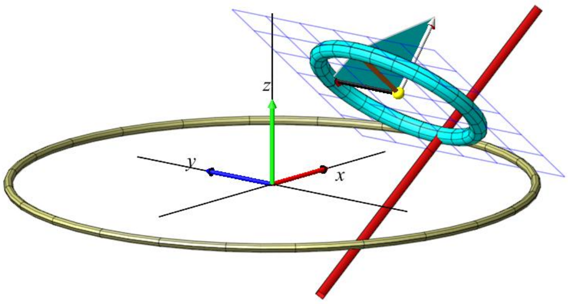


Figur 9.7: Rulning af cirkel langs linje. Bemærk især at den vandrette øjeblikkelige skrueakse ligger i (x,y)-planen parallel med y-aksen og at den øjeblikkelige reducerede skruehøjde er $h(t) = 0$ for alle t. Se opgave 9.27.

OPGAVE 9.28

Angiv skruedata som kan bruges til konstruktion af den rulning af en cirkel på en cirkel som er vist i figur 9.8.

Ved at ændre ganske lidt på de simple skrue-data, som vi har betragtet ovenfor kan man let konstruere langt mere komplicerede tetraeder-bevægelser, som f.eks. illustreret med følgende eksempel og tilhørende opgave:



Figur 9.8: Rulning af tiltet cirkel langs en vandret cirkel. Bemærk især at den øjeblikkelige skrueakse har en fast vinkel med z-aksen og at den øjeblikkelige reducerede skruehøjde også her er $h(t) = 0$ for alle t. Se opgave 9.28.

Eksempel 9.29

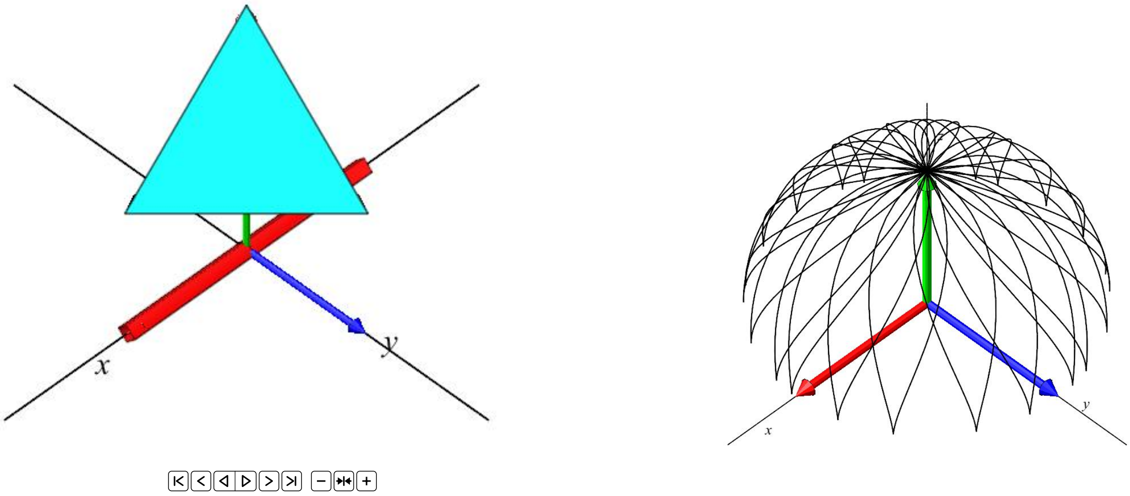
I dette eksempel benyttes følgende skrue-data og begyndelsebetingelser: $w(t) = 1$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)_G$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (0,0,1)_G$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$. De resulterende ligninger (9.74) *kan* løses eksakt og løsningerne *kan* udtrykkes ved almindelige funktionstegn. Resultatet er vist i figur 9.9.

OPGAVE 9.30

Det synes at fremgå af figur 9.9, at den tetraederbevægelse, der er resultatet af skrue-data i eksempel 9.29, har en fodpunktskurve, der ligger helt indeholdt i en (halv-)kugleflade med radius 1 og centrum i Origo samt at farten af fodpunktskurven er 0 netop når fodpunktet rører (x, y)-planen. Kan du bevise, at de observationer er korrekte? Er fodpunktskurven en lukket kurve, der gennemløbes igen og igen når tiden går? Hvis ikke, betyder det så at alle punkter på halvkuglen bliver 'ramt' af fodpunktskurven på et eller andet tidspunkt?

9.7 Skruebevægelser med fast akse

De bevægelser af det medfølgende tetraederrum, som har konstant skrue-akse og en fodpunktbevægelse på denne faste akse, må formodes at være særligt simple. Vi antager først, at den faste akse er z-aksen, og giver i næste afsnit en præsentation af rotationer omkring en vilkårlig fast akse.



Figur 9.9: Tetraederbevægelsen som er givet via skrue-data i eksemplet 9.29. Animeret. Til højre ses (en del af) den kurve som tetraederets fodpunkt $\mathbf{p}(t)$ gennemløber.

Når den faste akse er z-aksen får vi specielt fra hovedresultatet for roterende bevægelser, Sætning 9.13, at:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad : \quad \mathbf{r}(u) &= \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2}\right) + u\,\boldsymbol{\omega}(t) \\ &= (0, 0, g(t) + u\,w(t)) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , t \in [0, T] \quad , \end{aligned} \tag{9.82}$$

hvor fodpunktbevægelsen $\mathbf{p}(t)$ er antaget at foregå langs z-aksen, således at $\mathbf{p}(t) = (0, 0, g(t))$ for en løfte-funktion $g(t)$, og hvor den aktuelle akse-vektor er parallel med z-aksen og givet ved $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v}(t) = w(t)\,(0, 0, 1)$.

Den reducerede skruehøjde er dermed:

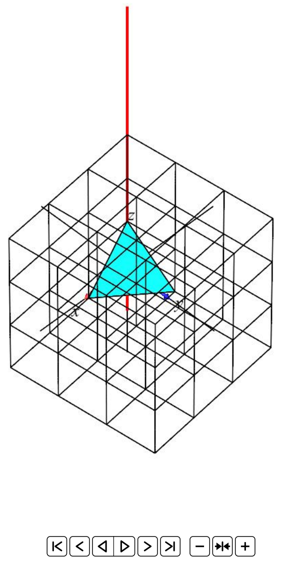
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \\ &= \frac{g'(t)}{w(t)} \quad , \quad \text{for alle } t \in [0, T] \quad . \end{aligned} \tag{9.83}$$

Da der er tale om en skruebevægelse omkring z-aksen må vi forvente, at den rotationsmatrix-funktion $\mathbf{R}(t)$, der definerer bevægelsen via udtrykket

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (\mathcal{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \tag{9.84}$$

har følgende form:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \tag{9.85}$$



Figur 9.10: Tetraederbevægelse med fast akse og data $f(t) = t$ og $g(t) = t$.

hvor drejningsvinklen er en passende funktion af tiden, $f(t)$.

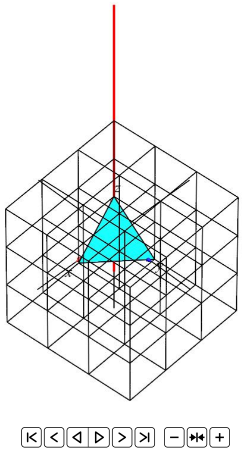
At den forventning holder stik fås direkte af udregningen af rotationens aksematrix $\mathbf{\Omega}(t)$ og den tilhørende aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \\
&= \mathbf{R}_z'(f(t)) \cdot \mathbf{R}_z^*(f(t)) \\
&= \mathbf{R}_z'(f(t)) \cdot \mathbf{R}_z^*(f(t)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -f'(t) & 0 \\ f'(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \\
\boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, f'(t)) \quad .
\end{aligned} \tag{9.86}$$

Det vil sige, at den afledede af drejningsvinklen er længden (med fortegn) af rotationens aksevektor. Den reducerede skruehøjde er således givet ved forholdet mellem de afledede af f og g:

$$h(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad , \quad \text{for alle } t \in [0, T] \quad . \tag{9.87}$$

I det specielle tilfælde i eksempel 9.11 er $g(t) = ht$ og $f(t) = t$ således at $h(t) = h$ (med fortegn). Det eksempel er animeret i figur 9.10 (med $h = 1$) hvori der også er monteret et gitter fast på det bevægede tetraeder for at vise den inducerede bevægelse af det medfølgende rum. Til sammenligning vises bevæglesen med data $f(t) = 2\pi \sin^2(t)$ og $g(t) = 2\pi \sin^2(t)$ i figur 9.11 nedenfor.



Figur 9.11: Tetraederbevægelse med fast akse og data $f(t) = 2\pi \sin^2(t)$ og $g(t) = 2\pi \sin^2(t)$.

9.8 Rodrigues' formel

Når aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ har en konstant retning, som ikke nødvendigvis er $(0,0,1)$ som ovenfor, så kan $\mathbf{R}(t)$ stadig bestemmes direkte - det er lidt mere kompliceret, men Rodrigues' formel giver en færdig formel:

Sætning 9.31 Lad $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v}$ være en given vektorfunktion hvor $\mathbf{v}$ er en konstant enhedsvektor, $||\mathbf{v}|| = 1$. Vi ønsker at konstruere den rotationsmatrix-funktion $\mathbf{R}(t)$, der har aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ og som starter med en given rotationsmatrix $\mathbf{R}_0$.

Lad $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ betegne den aksematrix, der har aksevektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.88}$$

Ud fra $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\mathbf{R}(t) = \left(\mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\mathbf{\Omega}}^2(t)\right) \cdot \mathbf{R_0} \quad , \tag{9.89}$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(\tau)\, d\tau \quad . \tag{9.90}$$

Så er $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$, og den til $\mathbf{R}(t)$ hørende akse-matrix er givet ved

$$\mathbf{\Omega}(t) = w(t)\, \widehat{\mathbf{\Omega}} \quad . \tag{9.91}$$

Den tilsvarende akse-vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} \quad , \tag{9.92}$$

som ønsket.

Bevis. Det følger via en direkte udregning af $\mathbf{\Omega}(t)$ ud fra den påståede $\mathbf{R}(t)$. □

Eksempel 9.32

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v} = w(t)\,\mathbf{k} = (0, 0, w(t))$ og $\mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ får vi:

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.93}$$

Ud fra $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\mathbf{\Omega}}^2(t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(f(t)) & -\sin(f(t)) & 0 \\ \sin(f(t)) & \cos(f(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \end{aligned} \tag{9.94}$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(u)\, du \quad . \tag{9.95}$$

Så er $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$, og den til $\mathbf{R}(t)$ hørende aksematrix er givet ved

$$\mathbf{\Omega}(t) = w(t)\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) = f'(t)\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) \tag{9.96}$$

og den tilsvarende akse vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} = f'(t)\,(0,0,1) \quad , \tag{9.97}$$

som i ovenstående afsnit 9.7.

Kapitel 10

Formning og design via Cosserat-sweeping

Ved hjælp af tetraederrummets bevægelse - med foreskreven fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ og rotation $\mathbf{R}(t)$ - kan vi nu designe kurver, flader og rumlige områder ved simpelthen at vælge en grundfigur, f.eks. et punkt, en kurve, eller en flade, som er givet (eventuelt i afhængighed af tiden t) *i tetraederrummet*, og dernæst betragte den punktmængde, som i det faste koordinatsystem 'fejes ud' af den valgte figur når tetraederrummet udfører den givne bevægelse.

Denne form for design vil vi kalde Cosserat-sweeping fordi den er direkte inspireret af brødrene Eugene og François Cosserat's arbejder om elasticitetsteori fra begyndelsen af 1900-tallet, se Wiki: Elastica og referencerne der.

Fordelen ved denne design- og parametiserings-metode er, at de resulterende geometriske objekter i rummet automatisk bliver udstyret med parameterfremstillinger, som derefter kan bruges direkte til den videre analyse af deres geometriske egenskaber – som f.eks. bestemmelsen af længde, areal, volumen, krumninger, etc.

Det er vigtigt at bemærke, at vi kun har brug for ganske få grund-objekter for at kunne bygge en meget stor klasse af interessante resulterende geometriske strukturer:

1. En fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ – som jo iøvrigt selv kan være frembragt af en forudgående Cosserat-sweeping i rummet.

2. En tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ til styring af tetraederrummet langs med fodpunktskurven.

3. Et geometrisk objekt som er beskrevet ved en parameterfremstilling $\mathbf{w}$ i det medfølgende tetraederrum – parat til bevægelse (og evt. samtidig deformation) langs fodpunktskurven. Typisk er $\mathbf{w}$ parameterfremstillingen for et punkt, en kurve eller en flade i tetraederrummet. Igen kan det grundobjekt selv være resultatet af en forudgående Cosserat-sweeping i tetraederrummet. Og objektet kan selv være defineret tids-afhængig, dvs. selv ændre position og form i tetraederrummet.

Med andre ord har vi på denne måde mulighed for at konstruere og analysere en lang række af kurver, flader og områder i rummet ved at betragte dem som ekstruderede objekter, som formes ud fra simplere, let beskrivelige objekter med lavere dimension, ved at disse så at sige 'trækkes' igennem rummet med en tetraeder-bevægelse givet ved en fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ og en tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$.

Metoden kan benyttes iterativt. For eksempel: Hvis en kurve $\mathbf{q}(t)$ i rummet er frembragt ved Cosserat-sweeping med et punkt i tetraederrummet, der bevæges langs en given fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ med en given rotation $\mathbf{R}(t)$ så kan $\mathbf{q}(t)$ efterfølgende selv benyttes som en ny fodpunktkurve for en Cosserat-sweeping med det samme punkt i tetraederrummet og med den samme rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, osv. De resulterende kurver må forventes at være selv-similære og danne et mønster af kurver i rummet afhængig af den først valgte fodpunktskurve og tidsafhængige rotationsmatrix?

I dette kapitel vil vi kun se på nogle forholdsvis simple konstruktioner af denne type. Vi fokuserer mest på metoden i konstruktionerne og formgivningen, og på opstillingen af de tilhørende parametriseringer.

10.1 Kurver

Cosserat sweeping med et fast punkt i tetraederrummet:

Eksempel 10.1

Hvis vi betragter punktet $q(t)$ med stedvektorfunktionen $\mathbf{q}(t)$ med fodpunkt i det gamle origo O som i 9.2, ligning (9.18), så gennemløber dette punkt en kurve, som er givet ved:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad , \tag{10.1}$$

hvor $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$ betegner de (i dette tilfælde) faste koordinater for stedvektoren $\mathbf{w}$ fra det nye Origo $Q = p(t)$ til punktet $q(t)$ med hensyn til de nye basisvektorer $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$. Vi kan derfor skrive stedvektorens gamle koordinater på følgende måde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_G(t) &= (q_1(t), q_2(t), q_3(t))_G \\
&= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G + \tilde{w}_1 \cdot (e_1(t), e_2(t), e_3(t))_G \\
&\qquad\qquad + \tilde{w}_2 \cdot (f_1(t), f_2(t), f_3(t))_G \\
&\qquad\qquad + \tilde{w}_3 \cdot (g_1(t), g_2(t), g_3(t))_G \\
&= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_G^*(t) & \mathbf{f}_G^*(t) & \mathbf{g}_G^*(t) \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= \mathbf{p}_G(t) + (\mathbf{R}_G(t)\mathbf{w}_N^*)^* \quad ,
\end{aligned} \tag{10.2}$$

hvor vi benytter, at $\mathbf{R}_G(t)\mathbf{w}_N^* = \mathbf{w}_G^*$. Se ligning (9.8) i kapitel 9.

Læg mærke til den dobbelte brug af transponeringen $(\cdot)^*$ i ovenstående. De benyttes sådan at typerne i matrixproduktet og i ligningen passer sammen. En vektor **a** har f.eks. koordinaterne $(a_1, a_2, a_3)_G$ med hensyn til den gamle basis og dermed den tilhørende koordinat-søjle-matrix:

$$\mathbf{a}_G = (a_1, a_2, a_3)_G$$
$$\mathbf{a}_G^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_G \quad . \tag{10.3}$$

Så er

$$(\mathbf{a}_G^*)^* = (a_1, a_2, a_3)_G = \mathbf{a}_G \quad . \tag{10.4}$$

Her er et eksempel på brug af ovenstående metode til fremstilling af en Cosserat-sweeping med et punkt i rummet:

|||| Eksempel 10.2

Vi vil finde den eksplicitte parameterfremstilling for den kurve, der gennemløbes af punktet $q(t)$ som konstrueres i (10.1), og som vises i figur 10.1:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_G(t) &= (0,0,t)_G \quad , \quad t \in [0,T] \\
\mathbf{R}_G(t) = \mathbf{R}_z(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_G^*(t) & \mathbf{f}_G^*(t) & \mathbf{g}_G^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \quad , \quad t \in [0, 3\pi] \\
\mathbf{w}_N &= (1,1,1)_N \quad .
\end{aligned} \tag{10.5}$$

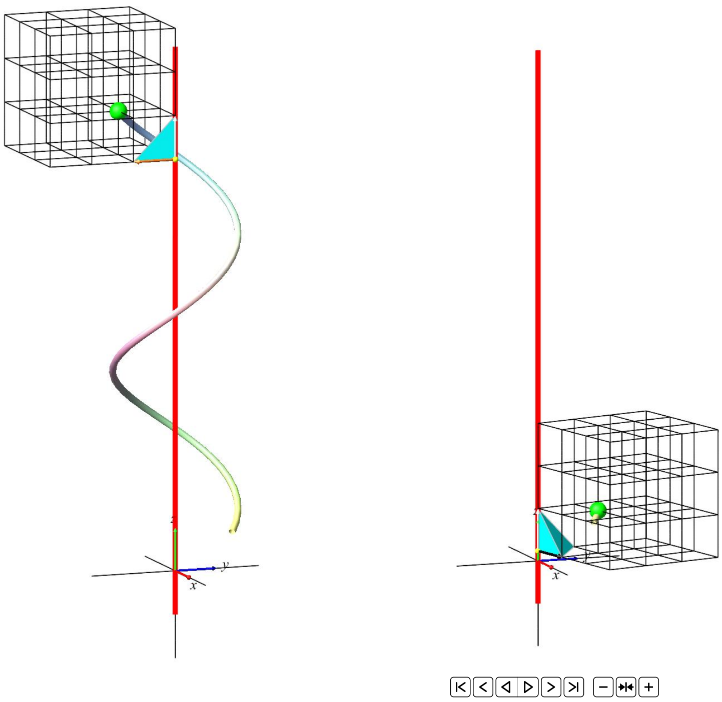
Med de ingredienser får vi (med alle detaljer og garneringer i udredningen) følgende parameterfremstilling for $\mathbf{q}_G(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_G(t) &= \mathbf{p}_G(t) + \mathbf{w}_G \\
&= (0,0,t)_G + 1 \cdot \mathbf{e}_G(t) + 1 \cdot \mathbf{f}_G(t) + 1 \cdot \mathbf{g}_G(t) \\
&= (0,0,t)_G + \left(\mathbf{R}_G(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= (0,0,t)_G + \left(\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= (0,0,t)_G + \left(\begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}_G \right)^* \\
&= (0,0,t)_G + (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)_G \\
&= (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), t+1)_G \quad .
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Ud fra de meget simple ingredienser, fodpunktskurven $(0,0,t)_G$ og rotationsmatricen $\mathbf{R}_z(t)$ har vi konstrueret parameterfremstillingen for den resulterende Cosserat-sweep-kurve:

$$\mathbf{q}_G(t) = (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), t + 1)_G \quad , \quad t \in [0, 3\pi] \quad . \tag{10.7}$$

Den tilhørende animerede Cosserat-sweeping – i dette tilfælde en af de velkendte vindellinjer – er illustreret i figur 10.1.



Figur 10.1: Cosserat-sweeping med punkt som grundobjekt i tetraederrummet og med en rotation af tetraederrummet omkring z-aksen. Det giver en vindellinje. Se eksempel 10.2. Bemærk: startpunktet for vindellinjen er $(1, 1, 1)$. Animeret.

Nogle helt naturlige første spørgsmål er nu, med reference dels til indledningen og dels til ovenstående eksempel: Hvor lang er kurven, hvad er krumningen og torsionen af kurven, og hvordan afhænger kurven og disse størrelser af de ingredienser, den er konstrueret ud fra, altså i dette tilfælde $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{R}(t)$, og $\mathbf{w}$? Men hvis rotationen $\mathbf{R}(t)$ i Cosserat-konstruktionen ikke er koblet direkte til fodpunktskurven – f.eks. via Frenet–Serret basen som i eksempel 10.3 nedenfor – kan vi ikke sige noget generelt om hvordan den udfejede kurve afhænger af Cosserat-ingredienserne. Generelt kan en given kurve i rummet konstrueres på uendelig mange måder ved Cosserat-sweeping hvis vi selv kan vælge ingredienserne $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{w}$, og $\mathbf{R}(t)$.

Eksempel 10.3

Hvis vi – i forlængelse af eksempel 10.1 – antager, at den benyttede rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er Frenet–Serret rotationsmatricen for den *regulære* fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ med farten $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$ og positiv krumning $\kappa(t) > 0$ får vi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}'_G(t) &= \mathbf{p}'_G(t) + (\mathbf{R}'_G(t)\mathbf{w}^*_N)^* \\
&= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}'^*(t) & \mathbf{f}'^*(t) & \mathbf{g}'^*(t) \end{bmatrix}_G \mathbf{w}^*_N\right)^* \\
&= v(t)\mathbf{e}_G(t) + (\tilde{w}_1\mathbf{e}'^*_G(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}'^*_G(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}'^*_G(t))^* \\
&= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \tilde{w}_1\mathbf{e}'_G(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}'_G(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}'_G(t) \\
&= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \tilde{w}_1 v(t)\kappa(t)\mathbf{f}_G + \tilde{w}_2(-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}_G(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}_G(t)) + \tilde{w}_3(-v(t)\tau(t)\mathbf{f}_G) \\
&= v(t)\left(w_2\kappa(t)\mathbf{e}_G(t) + (w_1\kappa(t) - w_3\tau(t))\,\mathbf{f}_G(t) + w_2\tau(t)\mathbf{g}_G(t)\right)
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

således at længden af $\mathbf{q}'(t)$, dvs. farten af $\mathbf{q}(t)$ kan bestemmes ud fra:

$$
\|\mathbf{q}'(t)\|^2 = v^2(t)\cdot\left(\left(\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2\right)\cdot\kappa^2(t) + \left(\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2\right)\cdot\tau^2(t) - 2\tilde{w}_1\cdot\tilde{w}_2\cdot\kappa(t)\cdot\tau(t)\right) \quad . \tag{10.9}
$$

Bemærk, at kurven $\mathbf{q}(t)$ i eksempel 10.3 ikke nødvendigvis er regulær selv om $\mathbf{p}(t)$ er regulær.

OPGAVE 10.4

Antag i eksempel 10.3 at fodpunktskurven $\mathbf{p}(t)$ har torsion $\tau(t) = 0$ for alle t og konstant krumning $\kappa(t) = 3$ for alle t. Hvilken kurve $\mathbf{q}(t)$ fremstilles da ved den betragtede Cosserat-sweeping? Eftervis direkte formlen (10.9) i dette tilfælde.

10.1.1 Længde af kurver

Vi repeterer først fra kapitel 8 hvordan vi beregner længden af en given kurve – her med henblik på at varme op til de tilsvarende definitioner for areal af flader (definition 10.12) og volumen af rumlige områder (definition 10.26) nedenfor.

Definition 10.5 Længden af en kurve $\mathcal{K}$ med parameterfremstilling

$$
\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))_G \quad , \quad t \in [0, T] \tag{10.10}
$$

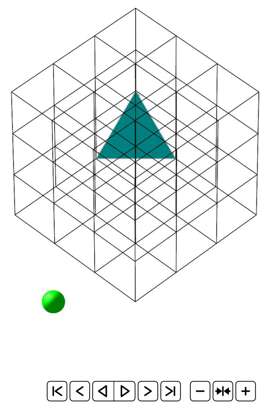
er - under forudsætning af, at kurven er regulær, dvs. $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t - givet ved integralet af længden af hastighedsvektoren:

$$
\mathrm{L}(\mathcal{K}) = \int_0^T \|(\mathbf{r}'(t)\|\,dt \quad = \int_0^T \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2 + (r_3'(t))^2}\,dt \quad . \tag{10.11}
$$

OPGAVE 10.6

Bestem længden af den kurve, som vi konstruerede i eksempel 10.2 og viser i figur 10.1.

Vi kan også beregne længder af kurver, der stammer fra en mere generel konstruktion, hvor punktet $q(t)$ ikke nødvendigvis har faste koordinater i det medfølgende tetraederrum.



Figur 10.2: Bevægelsen af punktet $\mathbf{w}(t)$ i tetraederrumemt. Den resulterende kurve (her en cirkel) kan betragtes som resultatet af en Cosserat-sweeping med det bevægede punkt men *uden rotation og translation* af tetraederrummet. Se eksempel 10.7. Hvis vi tilføjer rotation og translation får vi resultatet som vist i figur 10.3. Animeret.

Eksempel 10.7

Vi konstruerer en rumkurve via Cosserat-sweeping med følgende data:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (0,0,t)_G \quad , \quad t \in [0,3\pi] \\ \mathbf{w}_N(t) &= (1+3\cos(t),2,3\sin(t))_N \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad . \end{aligned} \tag{10.12}$$

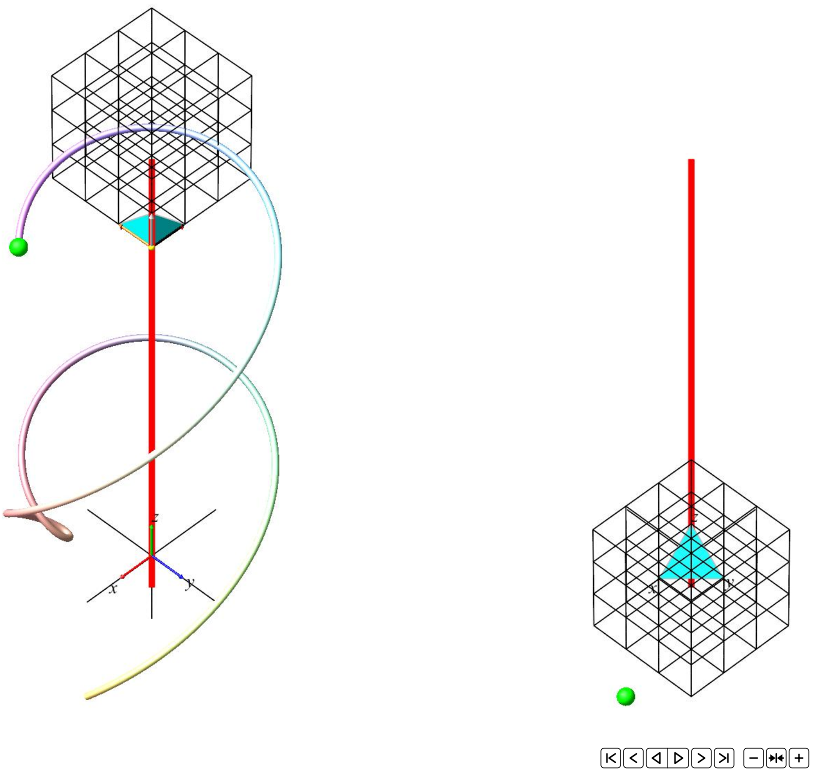
Det geometriske objekt i tetraederrummet, som her benyttes til konstruktionen, er igen et punkt – ligesom i eksempel 10.2 – men punktets koordinater i tetraederrummet er ikke længere konstante: Punktet bevæger sig i tetraederrummet samtidig med at tetraederrummet bevæges dels med rotationen $\mathbf{R}_z(t)$ og dels med løftet til fodpunktet $(0,0,t)_G$ i z-aksens retning.

Generatorpunktets bevægelse i tetraederrummet er vist som en kurve i figur 10.2 og den resulterende sweeping i det omgivende rum er vist i figur 10.3.

Den resulterende parameterfremstilling fås på samme måde som i eksempel 10.1 – forskellen er blot at $\mathbf{w}_N$ nu afhænger af t:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_G(t) &= \mathbf{p}_G(t) + \mathbf{w}_G(t) \\
&= (0,0,t)_G + \left(\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 1+3\cos(t) \\ 2 \\ 3\sin(t) \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= (0,0,t)_G + \left(\begin{bmatrix} \cos(t)(1+3\cos(t)) - 2\sin(t) \\ \sin(t)(1+3\cos(t)) + 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{bmatrix}_G \right)^* \\
&= (0,0,t)_G + (\cos(t)(1+3\cos(t)) - 2\sin(t), \sin(t)(1+3\cos(t)) + 2\cos(t), 3\sin(t))_G \\
&= (\cos(t)\cdot(1+3\cos(t)) - 2\sin(t)\,,\ \sin(t)\cdot(1+3\cos(t)) + 2\cos(t)\,,\ t + 3\sin(t))_G \quad ,
\end{aligned}
\tag{10.13}
$$

hvor t gennemløber intervallet $t \in [0, 3\pi]$.



Figur 10.3: se eksempel 10.7. Sammenlign med figur 10.1 og eksempel 10.2. Animeret.

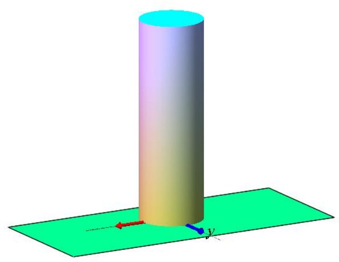
OPGAVE 10.8

I figur 10.3 ser det ud som om den frembragte kurve skærer igennem sig selv ca. midtvejs i bevægelsen. Find ud af, om det er tilfældet – ved at bruge ingredienserne i konstruktionen fra 10.7.

OPGAVE 10.9

Bestem længden af den kurve der er frembragt ved Cosserat-sweeping i figur 10.3 ved hjælp af ingredienserne i eksempel 10.7.

10.2 Flader



Figur 10.4: En ekstruderet cylinder.

Eksempel 10.10

Cylinderoverfladen $\mathcal{C}$ (uden ende-cirkelskiverne) i figur 10.4 har et cirkulært tværsnit med radius $1/2$ og højden af cylinderen er π. Så er flade-arealet let at regne ud - det er omkredsen gange højden, altså:

$$\text{Areal}(\mathcal{C}) = \pi^2 \quad . \tag{10.14}$$

Cylinderfladen har følgende parameterfremstilling, som kan konstrueres ved simpel sweeping med et linjestykke omkring z-aksen:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \quad : \quad \mathbf{s}(t,u) &= (\cos(u)/2, \sin(u)/2, t) \\ t \in [0,\pi]\,&,\; u \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.15}$$

Et sæt tilhørende Cosserat-sweeping-data, der giver denne parameterfremstilling, er f.eks. følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 0)_G \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (0, 0, u)_N \quad , \quad u \in [0, \pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.16}$$

Alternativt kan også benyttes lidt simplere Cosserat-data, som giver præcis den samme cylinderflade:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, 0)_G \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (1/2, 0, u)_N \quad , \quad u \in [0, \pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.17}$$

Bemærk, at $\mathbf{w}(u)$ her er udstyret med 'selvstændig' parameter u uafhængig af t, således at det er en flade og ikke en kurve, der konstueres med disse Cosserat-data.

Arealet af cylinderfladen kan også fås ved brug af den generelle arealformel for regulære parameterfremstillinger:

10.2.1 Areal af flader

En parametriseret flade i rummet er typisk givet ved en parameterfremstilling som følger

$$F_{\mathbf{s}} : \quad \mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \quad , \; u \in [a, b] \; , \; v \in [c, d] \quad , \tag{10.18}$$

hvor $s_1(u, v)$, $s_2(u, v)$, og $s_3(u, v)$ er givne funktioner af de to variable u og v.

Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(u, v)$ for parameterfremstillingen er her givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(u, v) = \|\mathbf{s}'_u(u, v) \times \mathbf{s}'_v(u, v)\| \quad , \tag{10.19}$$

dvs. arealet af det parallelogram, der på stedet $\mathbf{s}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{s}'_u(u, v)$ og $\mathbf{s}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{s}(u, v)$ på fladen.

Definition 10.11 Parameterfremstillingen (10.18) siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle} \quad u \in [a, b] \; , \; v \in [c, d] \quad . \tag{10.20}$$

Definition 10.12 Arealet af den parametriserede flade

$$F_{\mathbf{s}} : \quad \mathbf{s}(u,v) = (s_1(u,v), s_2(u,v), s_3(u,v)) \quad , \; u \in [a,b] \;, \; v \in [c,d] \tag{10.21}$$

defineres som :

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{s}}) = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(u,v)\, du\, dv \quad . \tag{10.22}$$

Eksempel 10.13

En parameterfremstilling for cylinderfladen var følgende, se eksempel 10.10:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \quad : \quad & \mathbf{s}(t,u) = (\cos(u)/2, \sin(u)/2, t) \\ & t \in [0,\pi] \,, \; u \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.23}$$

Denne parameterfremstilling har Jacobi-funktionen

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t,u) = 1/2 \quad , \tag{10.24}$$

og arealet er derfor:

$$\text{Areal}(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t,u)\, dt\, du = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, dt\, du = \pi^2 \quad , \tag{10.25}$$

i overensstemmelse med den direkte beregning.

10.3 Cosserat-sweeping med kurver

Eksempel 10.14

En fodpunktskurve er defineret som en parametriseret dobbelt-gennemløbet cirkel i (x,y)-planen:

$$\mathbf{p}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)_G \quad , \quad t \in [0, 4\pi] \quad . \tag{10.26}$$

Bemærk tidsintervallet!

Det geometriske objekt, der benyttes som generator for Cosserat-sweeping af den flade der er vist i figur 10.5 , er en ret linje der defineres i tetraederrummet – med hensyn til det nye koordinatsystem således:

$$\mathcal{L} : \mathbf{w}_N(u) = (u, 2u, 3u)_N \quad , \quad u \in [-2, 2] \quad . \tag{10.27}$$

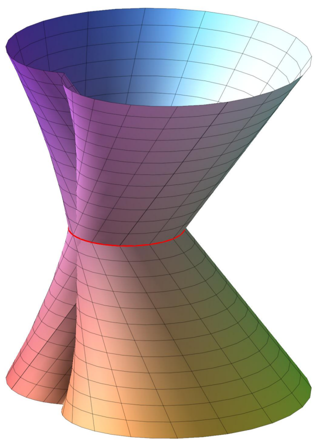
Den rotation, der styrer tetraederrummet langs med fodpunktskurven defineres ved rotationsmatricen:

$$\mathbf{R}_G(t) = \mathbf{R}_z(t/2) \quad . \tag{10.28}$$

Den resulterende flade $\mathcal{F}$, der fejes ud ved den tilhørende Cosserat-sweeping er afbildet i figur 10.5. Den har dermed parameterfremstillingen med hensyn til det gamle koordinatsystem $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \,:\, \mathbf{r}_G(t,u) &= \mathbf{p}_G(t) + (\mathbf{R}_G(t)\mathbf{w}_N^*(u))^* \\
&= (2\cos(t), 2\sin(t), 0)_G + \left(\mathbf{R}_z(t) \begin{bmatrix} u \\ 2u \\ 3u \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= (2\cos(t), 2\sin(t), 0)_G + \left(\begin{bmatrix} \cos(t/2) & -\sin(t/2) & 0 \\ \sin(t/2) & \cos(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 2u \\ 3u \end{bmatrix}_N \right)^* \\
&= (2\cos(t), 2\sin(t), 0)_G + \begin{bmatrix} u\cos(t/2) - 2u\sin(t/2) \\ u\sin(t/2) + 2u\cos(t/2) \\ 3u \end{bmatrix}_G^* \\
&= (2\cos(t), 2\sin(t), 0)_G + (u\cos(t/2) - 2u\sin(t/2)\,,\; u\sin(t/2) + 2u\cos(t/2)\,,\; 3u)_G \\
&= (2\cos(t) + u\cos(t/2) - 2u\sin(t/2)\,,\; 2\sin(t) + u\sin(t/2) + 2u\cos(t/2)\,,\; 3u)_G \quad ,
\end{aligned} \tag{10.29}$$

hvor $t \in [0, 4\pi]$ og $u \in [-2, 2]$.

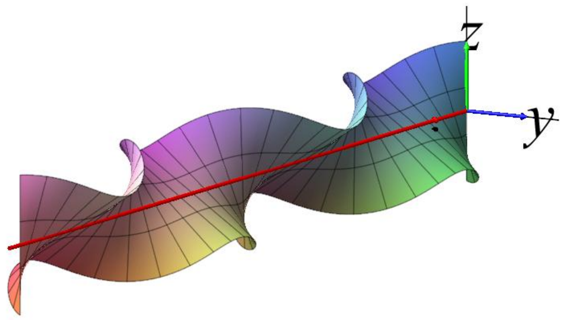


Figur 10.5: Se eksempel 10.14 og opgave 10.16.

OPGAVE 10.15

Dette er opgave 3 fra 2-timersprøven 18. december 2013

En krøllet flade i rummet er konstrueret ved sweeping med et linjestykke langs x-aksen således:



Fodpunktskurven er givet med hensyn til det sædvanlige koordinatsystem $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ som en del af x-aksen således:

$$\mathbf{p}(t) = (t,0,0)_G \quad , \quad \text{for } t \in [0,4\pi] \quad . \tag{10.30}$$

Rotationsmatricen, der definerer de nye basisvektorer $\{\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\}$, er givet ved følgende variable rotation omkring x-aksen:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(\sin(t)) \quad . \tag{10.31}$$

Linjestykket, der bevæges langs med fodpunktskurven, har følgende faste parameterfremstilling med hensyn til den medfølgende basis:

$$\mathbf{w}(u) = (0,0,u)_N \quad , \quad \text{for } u \in [-1,1] \quad . \tag{10.32}$$

1. Bestem en parameterfremstilling (med hensyn til det sædvanlige koordinatsystem) for bevægelsen af det punkt på linjestykket, der svarer til $u = 1$, altså punktet $(0,0,1)_N$.

2. Argumentér for, at arealet af den konstruerede flade er større end 8π.

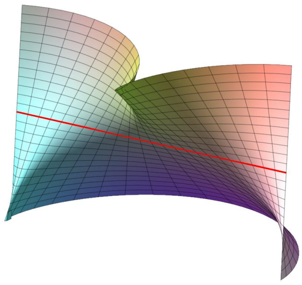
OPGAVE 10.16

Bestem arealet af fladen $\mathcal{F}$ som er konstrueret i eksempel 10.14 og afbildet i figur 10.5. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et u-interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

Eksempel 10.17

Cosserat-data for fladen i figur 10.6:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_G(t) &= (t,0,0)_G \quad , \quad t \in [0,4\pi] \\
\mathbf{w}_N(u) &= (u,2u,3u)_N \quad , \quad u \in [-2,2] \\
\mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t/2) \quad .
\end{aligned} \tag{10.33}$$



Figur 10.6: Se eksempel 10.17.

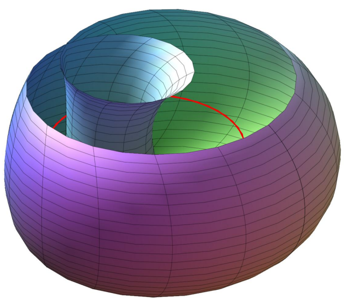
OPGAVE 10.18

Bestem arealet af fladen $\mathcal{F}$ som er konstrueret i eksempel 10.17 og afbildet i figur 10.6. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et u-interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

Eksempel 10.19

Cosserat-data for fladen i figur 10.7:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_G(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G \quad , \quad t \in [0, 4\pi] \\
\mathbf{w}_N(u) &= (\cos(u), 0, \sin(u))_N \quad , \quad u \in [-\pi/2, 1] \\
\mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t/2) \quad .
\end{aligned}
\tag{10.34}
$$



Figur 10.7: Se eksempel 10.19.

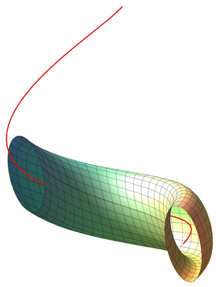
OPGAVE 10.20

Bestem arealet af fladen $\mathcal{F}$ som er konstrueret i eksempel 10.19 og afbildet i figur 10.7. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et u-interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

Eksempel 10.21

Cosserat-data for fladen i figur 10.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), t)_G \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (\cos(u)/2, 0, \sin(u))_N \quad , \quad u \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad . \end{aligned} \tag{10.35}$$



Figur 10.8: Se eksempel 10.21.

Eksempel 10.22

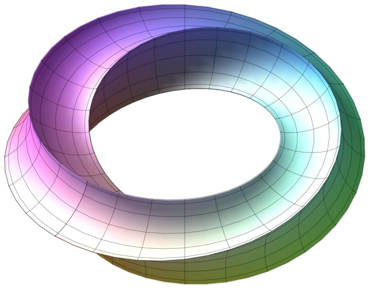
Cosserat-data for fladen i figur 10.9:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (3\cos(t), 3\sin(t), t)_G \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (\cos^3(u), 0, \sin^3(u))_N \quad , \quad u \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_y(t/2) \quad . \end{aligned} \tag{10.36}$$

Eksempel 10.23

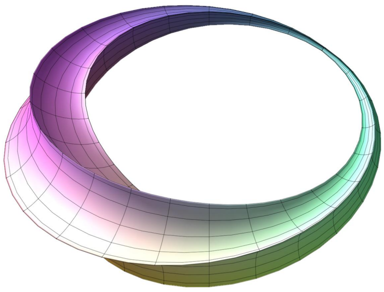
Cosserat-data for fladen i figur 10.10:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (3\cos(t), 3\sin(t), t)_G \quad , \quad t \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{w}_N(t,u) &= (\cos^3(u) \cdot e^{-t^2/3}, 0, \sin^3(u) \cdot e^{-t^2/3})_N \quad , \quad u \in [-\pi, \pi] \quad , \quad t \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_y(t/2) \quad . \end{aligned} \tag{10.37}$$



Figur 10.9: Se eksempel 10.22.

Bemærk, at i dette tilfælde er $\mathbf{w}(t,u)$ afhængig af både t og u således at den profilkurve i tetraederrummet, der benyttes til Cosserat-sweeping af fladen ændrer form langs fodpunktskurven, dvs. i afhængighed af tiden t, som det også fremgår af den tilhørende figur 10.10.



Figur 10.10: Se eksempel 10.23.

Eksempel 10.24

Den bøjede cylinderflade i figur 10.11 – halvdelen af en torus-flade – har parameterfremstillingen (for den del af overfladen, som ikke er cirkelskive-endefladerne):

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \quad : \quad \mathbf{s}(t,v) &= (\cos(t)(1+\cos(v)/2), \sin(v)/2, \sin(t)(1+\sin(t)\cos(v)/2)) \\ & t \in [0,\pi] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad .\end{aligned} \tag{10.38}$$

Cylinderfladen kan frembringes ved Cosserat-sweeping med følgende data:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t)) \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (\cos(u)/2, \sin(u)/2, 0)_N \quad , \quad u \in [0,2\pi]\end{aligned} \tag{10.39}$$

Den tilhørende Jacobi-funktion:

$$\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t,u) = (2+\cos(u))/4 \quad , \tag{10.40}$$

således at arealet er

$$\mathrm{Areal}(F_{\mathbf{s}}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t,u)\,dt\,du = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2+\cos(u))/4\,dt\,du = \pi^2 \quad , \tag{10.41}$$

Figur 10.11: En ekstruderet cirkel, dels lodret og dels 'roteret', 'bøjet' (via en ekstra rotation om y-aksen. Se eksempel 10.35.

10.4 Rumlige områder

Eksempel 10.25

Den massive solide cylinder $\widehat{\mathcal{C}}$ svarende til overfladen i figur 10.4 har cirkulært tværsnit med radius $1/2$ og højden af cylinderen er π. Så er volumenet let at regne ud - det er tværsnitsarealet gange højden, altså:

$$\mathrm{Vol}(\widehat{\mathcal{C}}) = \left(\frac{1}{4}\right)\pi^2 \quad . \tag{10.42}$$

Den massive cylinder har følgende parameterfremstilling, som fremkommer ved en simpel sweeping (ekstrudering), nu med en cirkelskive langs z-aksen:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}} \quad : \quad \mathbf{s}(t,u,v) &= (u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), t) \\ t\in[0,\pi]\,,\; v &\in [0,2\pi]\,,\; u\in[0,1/2] \quad . \end{aligned} \tag{10.43}$$

En tilhørende Cosserat-sweeping kan opnås ved at bruge følgende simple data:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0,0,t) \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{w}(u,v) &= (u\cos(v), u\sin(v), 0)_N \quad , \quad u \in [0,1/2] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.44}$$

Volumenet af den massive cylinder kan også fås ved brug af den generelle volumenformel for regulære parameterfremstillinger:

10.4.1 Rumfang af rumlige områder

Et parametriseret rumligt område er generelt givet ved en parameterfremstilling

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(t,u,v) &= (r_1(t,u,v), r_2(t,u,v), r_3(t,u,v))_G \\ & t \in [0,T]\ ,\ u \in [a,b],\ v \in [c,d] \quad . \end{aligned} \tag{10.45}$$

Definition 10.26 Rumfanget af det parametriserede område $\mathcal{M}_{\mathbf{r}}$ er så bestemt ved

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{\mathbf{r}}) = \int_0^T \int_c^d \int_a^b \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v)\, du\, dv\, dt \quad , \tag{10.46}$$

hvor Jacobi-funktionen $\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v)$ er

$$\begin{aligned} \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v) &= |(\mathbf{r}'_u(t,u,v) \times \mathbf{r}'_v(t,u,v)) \cdot \mathbf{r}'_t(t,u,v)| \\ &= |\mathrm{Rum}(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_t)| \quad . \end{aligned} \tag{10.47}$$

OPGAVE 10.27

Benyt ovenstående definition af rumfang til at gen-beregne rumfanget af den massive cylinder $\widehat{\mathcal{C}}$ i eksempel 10.25.

Eksempel 10.28

Den bøjede massive cylinder i figur 10.11 har parameterfremstillingen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t,u,v) &= (\cos(t)(1+u\cos(v)/2), u\sin(v)/2, \sin(t)(1+u\sin(t)\cos(v)/2)) \\ & t \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.48}$$

En Cosserat-sweeping af det rumlige område kan opnås ved at bruge følgende data:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}_g(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}(u,v) &= (u\cos(v)/2, u\sin(v)/2, 0)_N \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \; . \end{aligned} \tag{10.49}$$

Bemærk, at $\mathbf{w}(u,v)$ nu afhænger af de to (af t uafhængige) variable u og v, således at der med disse Cosserat-data extruderes et rumligt område, når t, u, og v gennemløber deres respektive definitionsintervaller.
Den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion:

$$\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v) = \left(\frac{1}{8}\right) u \cdot (u \cdot \cos(v) + 2) \quad , \tag{10.50}$$

således at volumenet er

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(F_{\mathbf{r}}) &= \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v)\, dt\, du\, dv \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}\right) u \cdot (u \cdot \cos(v) + 2)\, dt\, du\, dv \\ &= \frac{1}{4}\pi^2 \quad . \end{aligned} \tag{10.51}$$

OPGAVE 10.29

De to massive cylindre, den rette og den bøjede, i figur 10.11 har samme rumfang. Har de også samme overfladeareal?

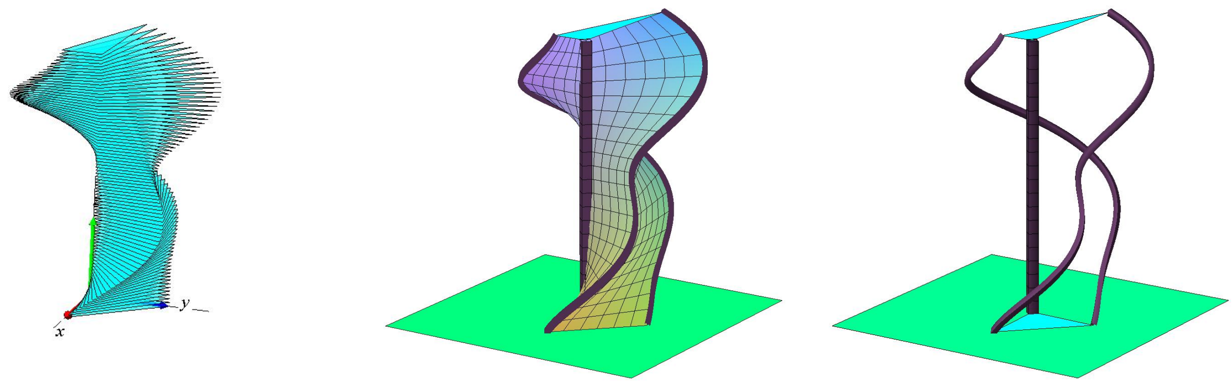
10.5 Cosserat-sweeping med flader

Cosserat sweeping med en flade i tetraederrummet giver typisk et rumligt område:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G \quad , \quad t \in I_t \\ \mathbf{w}_N(u,v) &= (\tilde{w}_1(u,v), \tilde{w}_2(u,v), \tilde{w}_3(u,v))_N \quad , \quad u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \\ \mathbf{R}_G(t) &= \text{tidsafhængig rotationsmatrix} \quad , \quad t \in I_t \quad . \end{aligned} \tag{10.52}$$

Generator-fladen i tetraederrummet kan gerne selv være tidsafhængig:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G \quad , \quad t \in I_t \\ \mathbf{w}_N(t,u,v) &= (\tilde{w}_1(t,u,v), \tilde{w}_2(t,u,v), \tilde{w}_3(t,u,v))_N \quad , \quad t \in I_t \quad , \quad u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \\ \mathbf{R}_G(t) &= \text{tidsafhængig rotationsmatrix} \quad , \quad t \in I_t \quad . \end{aligned} \tag{10.53}$$



Figur 10.12: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekanterne $\triangle(t)$ fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs $z-$aksen og trekanterne (be-)holdes vandrette, altså parallelle med $(x,y)-$planen. Bemærk, at de benyttede trekanter i dette tilfælde *ikke er uforanderlige* i det medfølgende tetraederrum.

Generatorfladen $\mathcal{S}_t$ defineres til ethvert tidspunkt t i (ξ,η,ζ)-koordinater i tetraederrummet generelt således:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t,u,v) &= (\tilde{w}_1(t,u,v), \tilde{w}_2(t,u,v), \tilde{w}_3(t,u,v))_N \\ t \in I_t \quad , \quad & u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \quad , \end{aligned} \tag{10.54}$$

hvor $\tilde{w}_1(t,u,v)$ og $\tilde{w}_2(t,u,v)$ er givne funktioner dels af tiden t og dels af de to parametre u og v, som løber i de tre parameterintervaller I_t, I_u, og I_v henholdsvis. Formen af det rumlige område er (til ethvert tidspunkt) 'bygget ind i' de tre funktioner $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$.

Selvom generatorfladerne i tetraederrummet således kan defineres som helt generelle flader i det rum, vil vi her nøjes med at betragte passende simple plane områder i (ξ,η)-planen som generatorflader:

Lad os se på en velkendt uforanderlig (tiduafhængig) figur i (ξ,η)-planen: En trekant i den plan, som er udspændt af to givne kantvektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ fra det fælles fodpunkt i det nye Origo $\mathcal{Q}$ består af de punkter i planen, der har stedvektorerne (fra $\mathcal{Q}$):

$$\mathbf{w}(u,v) = u(\mathbf{a} + v(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad . \tag{10.55}$$

OPGAVE 10.30

Vis, at denne parametrisering er ækvivalent med den beskrivelse af de indre trekantspunkter, som vi tidligere har benyttet i afsnit 2.2.1 i kapitel 2, nemlig følgende:

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \quad , \tag{10.56}$$

hvor vi der antog, at $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$. Vink: Vis først, at $\alpha = u - uv$ og $\beta = uv$.

De to udspændende vektorer **a** og **b** kan i det nye koordinatsystem skrives som:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, 0)_N \\ \mathbf{b} &= (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, 0)_N \quad , \end{aligned} \tag{10.57}$$

sådan at parameterfremstillingen for det trekantede område kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t,u,v) &= ((u-uv)\tilde{a}_1 + uv\tilde{b}_1, (u-uv)\tilde{a}_2 + uv\tilde{b}_2)_N \\ u &\in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad , \end{aligned} \tag{10.58}$$

Eksempel 10.31

Et uforanderligt rektangel er tilsvarende, og simplere, givet ved

$$\mathcal{R}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t,u,v) = (u,v,0)_N \quad , \quad u \in [a,b] \quad , \quad v \in [c,d] \quad , \tag{10.59}$$

hvor intervallerne $[a,b]$ og $[c,d]$ bestemmer størrelse og placering af rektanglet i (ξ,η)-koordinatsystemet.

Eksempel 10.32

En uforanderlig cirkelskive med centrum i $(c_1,c_2,0)_N$ og radius ρ fås ved brug af polære koordinater:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t,u,v) &= (c_1 + u\rho\cos(v), c_2 + u\rho\sin(v), 0)_N \\ u &\in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.60}$$

Eksempel 10.33

En variabel cirkelskive med *tidsafhængig centrum* i $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$ og *tidsafhængig radius* $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t \quad : \quad & \mathbf{w}(t,u,v) = (c_1(t) + u\rho(t)\cos(v), c_2(t) + u\rho(t)\sin(v), 0)_N \\ & t \in [0,T] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.61}$$

Eksempel 10.34

En uforanderlig cirkelskive ekstruderes lodret som til venstre i figur 10.11. Ingredienserne til denne konstruktion er med ovenstående notation:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0,0,t)_G \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t,u,v) &= (u\cos(v)/2, u\sin(v)/2, 0)_N \\ \\ \mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t,u,v) \\ & \quad t \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.62}$$

Eksempel 10.35

Den samme cirkelskive som i eksempel 10.34 kan ekstruderes med en roterende bevægelse af tetraederrummet og en tilsvarende cirkulær fodpunktsbevægelse, se figur 10.11 til højre.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0,\pi] \\ \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t,u,v) &= (u\cos(v)/2, u\sin(v)/2, 0)_N \\ \\ \mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t,u,v) \\ & \quad t \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.63}$$

Eksempel 10.36

En variabel ellipse-skive med tidsafhængig centrum i $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$ og *tidsafhængige halvakser* $\rho_1(t)$ og $\rho_2(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t \quad : \quad & \mathbf{w}(t,u,v) = (c_1(t) + u\rho_1(t)\cos(v), c_2(t) + u\rho_2(t)\sin(v), 0)_N \\ & t \in [0,T] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad . \end{aligned} \tag{10.64}$$

|||| Eksempel 10.37

En lodret ekstrudering af den variable ellipseskive kan konstrueres efter samme model som i eksempel 10.34 - se figur 10.13 til venstre:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= (0,0,t)_G \quad , \quad t \in [0,\pi] \\
\mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{w}(t,u,v) &= \frac{1}{2}\left(u\left(\frac{1}{2}+\sin^2(3t)\right)\cos(v)\,,\; u\left(\frac{1}{2}+\cos^2(3t)\right)\sin(v)\,,\; 0\right)_N \\
\mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t)+\mathbf{w}(t,u,v) \\
& \quad t \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad .
\end{aligned}
\tag{10.65}
$$

|||| Eksempel 10.38

En tilsvarende *variabel* ellipseskive ekstruderes med en roterende bevægelse af tetraederrummet langs en cirkulær fodpunktskurve - se figur 10.13 til højre:

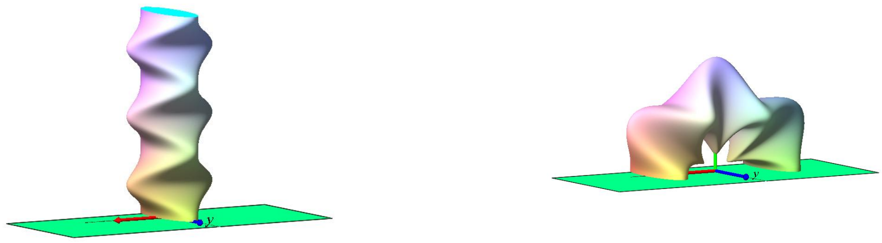
$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= (\cos(t),0,\sin(t))_G \quad , \quad t \in [0,\pi] \\
\mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{w}(t,u,v) &= \frac{1}{2}\left(u\left(\frac{1}{2}+\sin^2(3t)\right)\cos(v)\,,\; u\left(\frac{1}{2}+\cos^2(3t)\right)\sin(v)\,,0\right)_N \\
\mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t)+\mathbf{w}(t,u,v) \\
& \quad t \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad .
\end{aligned}
\tag{10.66}
$$

En uforanderlig trekant i $(\xi,\eta)-$planen, som er udspændt af de to specielle kantvektorer $\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{b} = \beta\,\mathbf{f}(t)$ fra det fælles fodpunkt i $\mathbf{p}(t)$ er som tidligere vist givet ved:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}(t,u,v) &= u(\alpha\,\mathbf{e}(t)+v(\beta\,\mathbf{f}(t)-\alpha\,\mathbf{e}(t))) \\
&= u\,\alpha(1-v)\mathbf{e}(t)+u\,v\beta\mathbf{f}(t) \\
& \quad t \in [0,T] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad .
\end{aligned}
\tag{10.67}
$$

Det udfejede område i rummet er dernæst:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t)+u\,\alpha(1-v)\mathbf{e}(t)+u\,v\beta\mathbf{f}(t) \\
& \quad t \in [0,T] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad .
\end{aligned}
\tag{10.68}
$$



Figur 10.13: Ekstruderet variabel ellipseskive, dels lodret og dels med roteret bevægelse af det ekstruderende tetraederrum. Se forskrifterne i eksemplerne 10.37 og 10.38.

|||| Eksempel 10.39

Med $\alpha = 1$ og $\beta = 1$ fås eksempelvis figur 10.14 som er baseret på følgende ingredienser:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0,1] \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t,u,v) &= (u(1-v), u\,v, 0)_N \end{aligned} \tag{10.69}$$

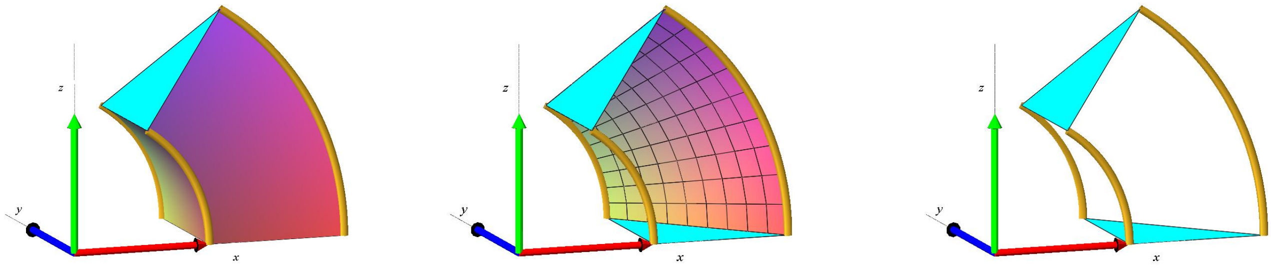
hvorved vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t,u,v) \\ &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), u\,v, \sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\ & t \in [0,1] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad . \end{aligned} \tag{10.70}$$

|||| Eksempel 10.40

I eksempel 10.39 har vi - ud over toppen og bunden, som er standard basis trekanter - tre sideflader $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, og $\mathcal{F}_3$. Deres respektive parameterfremstillinger følger direkte af parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t,u,v)$ for det tilsvarende rumlige område:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t,u,v) &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), u\,v, \sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\ & t \in [0,1] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad . \end{aligned} \tag{10.71}$$



Figur 10.14: Ekstrudering, sweeping, med basistrekant. Konstrueret ved rotation omkring y-aksen. Se eksempel 10.39.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \quad &: \quad \mathbf{s}_1(t,v) = \mathbf{r}(t,1,v) \;=\; (\cos(t)+\cos(t)(1-v), v, \sin(t)+\sin(t)(1-v))_G \\
&\qquad t \in [0,1]\,,\; v \in [0,1] \quad , \\
\mathcal{F}_2 \quad &: \quad \mathbf{s}_2(t,u) = \mathbf{r}(t,u,0) \;=\; (\cos(t)(1+u), 0, \sin(t)(1+u))_G \\
&\qquad t \in [0,1]\,,\; u \in [0,1] \quad , \\
\mathcal{F}_3 \quad &: \quad \mathbf{s}_2(t,u) = \mathbf{r}(t,u,1) \;=\; (\cos(t), u, \sin(t))_G \\
&\qquad t \in [0,1]\,,\; u \in [0,1] \quad .
\end{aligned} \tag{10.72}
$$

Det er sidefladen $\mathcal{F}_1$, der er vist i figur 10.14 i midten. Bemærk, at per konstruktion optræder parameteren t i alle sidefladernes parameterfremstillinger. De respektive Jacobi-funktioner er nu:

$$
\begin{aligned}
\text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t,v) &= \sqrt{2}(2-v) \quad , \\
\text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t,u) &= 1+u \quad , \\
\text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t,u) &= 1 \quad .
\end{aligned} \tag{10.73}
$$

Arealerne er derfor:

$$
\begin{aligned}
\text{Areal}(\mathcal{F}_1) &= \int_0^1\int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t,v)\,dt\,dv = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{2}(2-v)\,dt\,dv = 3/\sqrt{2} \quad , \\
\text{Areal}(\mathcal{F}_2) &= \int_0^1\int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t,u)\,dt\,du = \int_0^1\int_0^1 (1+u)\,dt\,du = 3/2 \quad , \\
\text{Areal}(\mathcal{F}_3) &= \int_0^1\int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t,u)\,dt\,du = \int_0^1\int_0^1 1\,dt\,du = 1 \quad .
\end{aligned} \tag{10.74}
$$

OPGAVE 10.41

Bestem de respektive længder af de hjørne-kurver, der er vist i figur 10.14.

Eksempel 10.42

I eksempel 10.39 får vi eksplicit for alle $u \in [a,b]$, $v \in [c,d]$ og for alle t:

$$\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t,u,v) = \mathbf{r}'_t(t,u,v) \cdot (\mathbf{r}'_u(t,u,v) \times \mathbf{r}'_v(t,u,v)) = u\,(1+u-u\,v) \tag{10.75}$$

- altså uafhængigt af t.

OPGAVE 10.43

Eftervis udtrykket i ligning (10.75) for den Jacobi-funktion.

OPGAVE 10.44

Bestem rumfanget af det område, der er vist i figur 10.14 baseret på eksempel 10.39. Benyt (10.75).

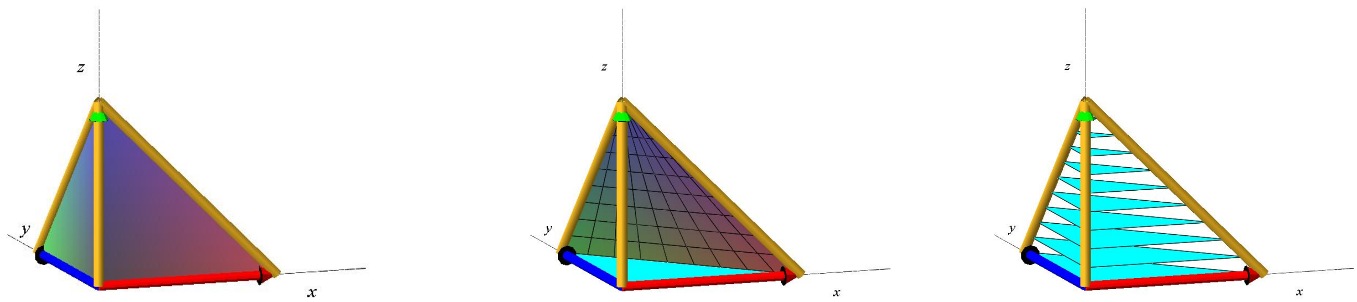
OPGAVE 10.45

Basistetraederet $\boxtimes_0 = \boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ er selv et rumligt område, der kan fremstilles ved 'ekstrudering' ud fra et simpelt plant område, i dette tilfælde basis-trekanten, ved en passende simpel tetraeder-bevægelse, som hermed angivet på sammme form som ovenfor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= (0,0,t)_G \quad , \quad t \in [0,1] \\
\mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} \\
\mathbf{w}(t,u,v) &= ((1-t)u(1-v),(1-t)\,u\,v,0)_N \\
\mathbf{r}(t,u,v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t,u,v) \\
& \quad t \in [0,1] \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \quad v \in [0,1] \quad .
\end{aligned} \tag{10.76}$$

i) Argumentér for, at denne beskrivelse virkelig *er* en beskrivelse af standard-tetraederet. Se figur 10.15.

ii) Bestem (ved at bruge denne beskrivelse og definition 10.26) rumfanget af basis-tetraederet, $\mathrm{Vol}(\boxtimes_0)$.



Figur 10.15: Basistetraederet som ekstruderet objekt. Se opgave 10.45.

OPGAVE 10.46

Bestem på tilsvarende måde (a'la opgave 10.45) rumfanget af en vilkårlig pyramide. Vink: Opdel først grundpolygonen i trekanter og find rumfanget af pyramider med trekantede grundflader. Se figur 10.16.

OPGAVE 10.47

Beskriv Malmø's Turning Torso som en Cosserat sweeping og find rumfanget af bygningen. Se figur 10.17.

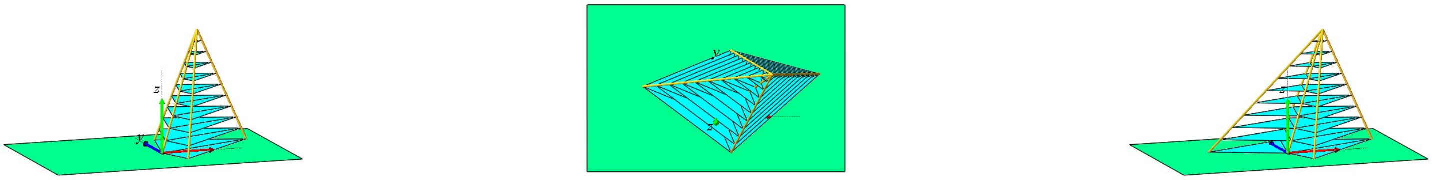
En vilkårlig given polygon i (x,y)-planen kan nu benyttes til konstruktion af mangfoldige Cosserat-sweepings – både af flader og af rumlige områder. Vi nøjes her med at illustrere princippet med en Γ lignende polygon som i figur 10.18.

OPGAVE 10.48

Den givne Γ-polygon i grund-figuren 10.18 har følgende 12 hjørnepunkter i rækkefølge – med hensyn til tetraederrummets koordinatsystem:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&(-1,9,0),(6,9,0),(6,7,0),(4,7,0),(4,8,0),(1,8,0),\\ &(1,2,0),(9,2,0),(9,1,0),(-4,1,0),(-4,2,0),(-1,2,0)\}_N \, .\end{aligned} \tag{10.77}$$

Bestem to sæt af Cosserat-sweeping data $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{R}(t)$, og $\mathbf{w}(u)$ således at de tilsvarende to Cosserat sweepings giver de rumlige områder (og tilhørende sideflader) i figur 10.19.

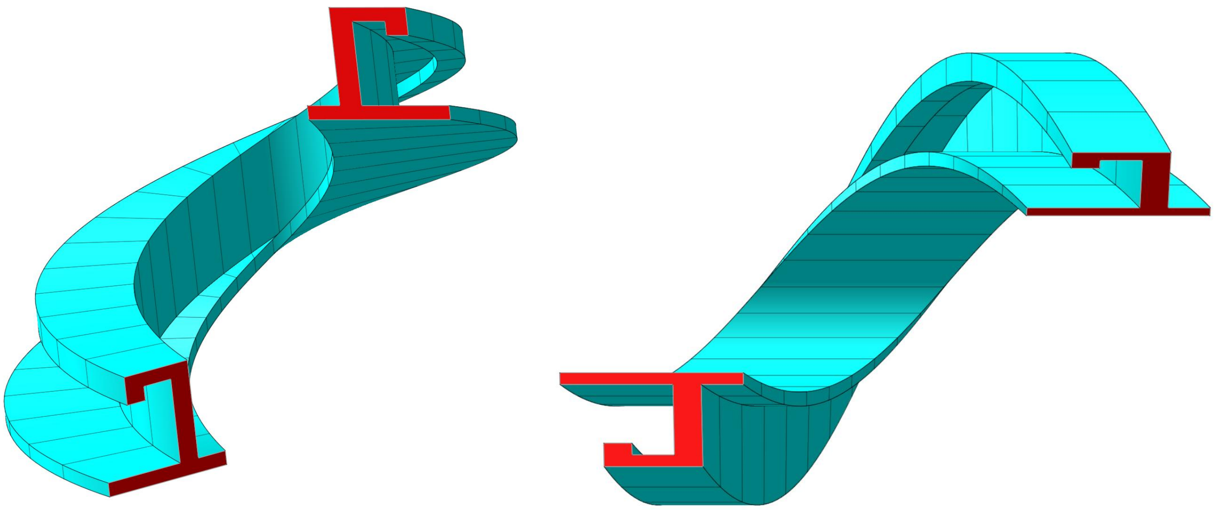


Figur 10.16: Pyramide som ekstruderet objekt ud fra en trianguleret firkant i planen. Se opgave 10.46.

Figur 10.17: 'Turning Torso of Malmø' som ekstrudering med 5-kantet basis. Se opgave 10.47.

Vink: Den ene figur fremkommer ved at definere $\mathbf{w}$ ved først at parallelforskyde Γ en fast vektor i η-aksens retning i tetraederrummet og derefter benytte en passende t-afhængig rotation $\mathbf{R}_x$ om x-aksen samt en fodpunktsbevægelse i x-aksens retning. Den anden figur fremkommer tilsvarende ved at definere $\mathbf{w}$ ved først at parallelforskyde Γ en fast vektor i ξ-aksens retning i tetraederrummet og derefter benytte en rotation om y-aksen og en fodpunktsbevægelse i y-aksens retning.

Figur 10.18: En plan figur som benyttes til Cosserat-sweeping i figur 10.19.



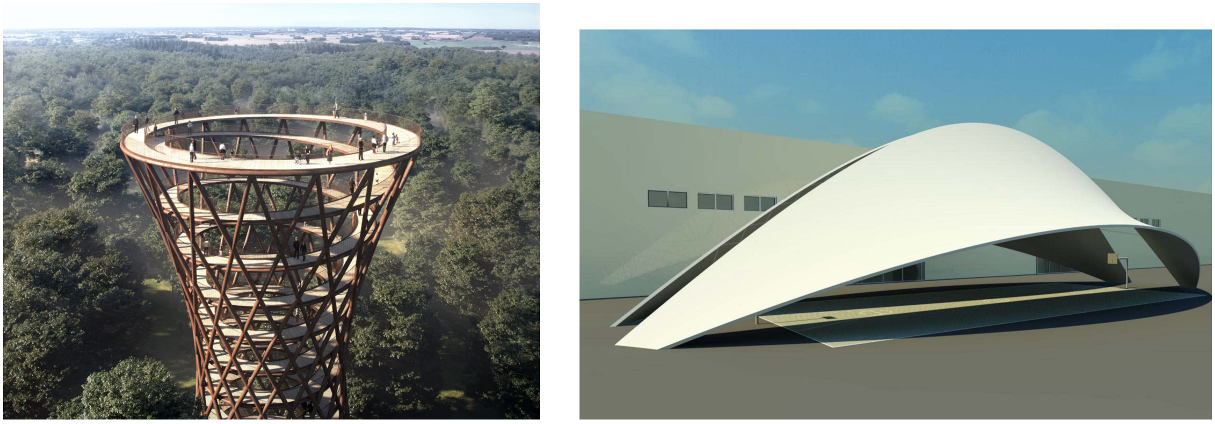
Figur 10.19: Den plane figur fra figur 10.18 er her benyttet til Cosserat-sweeping med to meget forskellige 'udtryk' og meget forskellige anvendelses-muligheder.

Kapitel 11

Design via Cosserat sweeping med rette linjer

I dette kapitel vil vi nu se på tre konkrete parametriske design-opgaver. Vi benytter nogle af de mest elementære begreber og ideer fra de foregående kapitler til at konstruere dels Skovtårnet ved Gisselfeld, dels et forslag til en overdækning af Matematiktorvet og dels Kistefos museumsbygningen i Norge.

Fremstillingen her er som nævnt rimelig simpel og (gen-)indfører faktisk en del – nu velkendte – greb 'from scratch'. Kapitlet kan derfor f.eks. benyttes til repetition, illustration, og forankring af de mangfoldige design-muligheder, som parametrisk design (og herunder især Cosserat-sweeping metoden fra kapitel 10) giver os i hænde. Det (måske) overraskende ved disse design-eksempler er, at de alle tre kan frembringes ved Cosserat sweeping med *rette linjestykker*. I tilknytning til eksemplerne er desuden indlejret en række opgaver, som i sig selv kan være inspiration til den afsluttende projekt-opgave i kurset.



Figur 11.1: Skovtårnet ved Gisselfeld og visionen for et design af en overdækning af Matematiktorvet på DTU imellem Bygning 303B og Bygning 306.

Figur 11.2: Kistefos museet The Twist, hen over Ranselva i Jevnaker, nord for Oslo

11.1 SKOVTÅRNET

Dette projekt går ud på at analysere de to mest basale strukturer i skovtårnet, se figur 11.1 ovenfor. Hvordan fremkommer den signifikante gitterstruktur i tårnet og hvordan findes den spiral-kurve langs tårn-yder-fladen som danner basis for gangbroen fra bund til top? Se figurerne ovenfor. Besøg selv tårnet med henblik på at blive inspireret til endnu flere interessante opgaver og projekter – ligesom i følgende beskrivelser af Steen Toft og i referencerne der: [Fra Steen Toft's hjemmeside] og [Oplæg, STJ, 2020].

11.2 Opvarmning

Den tårn-flade, som intuitivt dannes/udspændes af de to systemer af stål-rør i tårnet, er tydeligvis rotationssymmetrisk omkring en z-akse, som går lodret ned igennem midten af tårnet. Ved at rotere hele tårnet nogle ganske bestemte vinkler omkring z-aksen afbildes stål-rør systemet på sig selv – i den forstand, at ethvert roteret rør bliver positioneret præcis der hvor der før rotationen også var et rør i systemet.

OPGAVE 11.1

Hvilke vinkler er der tale om i ovenstående påstand når det oplyses, at tårnet indeholder ialt 36 stål-rør?

11.3 Rotationer i planen

Vi repeterer først *rotationen* af et punkt p omkring origo O (i et sædvanligt $\{O,x,y\}$-koordinatsystem) i *planen*. Med hensyn til det givne koordinatsystem har punktet p koordinaterne

$p = (p_1, p_2)$. Koordinaterne (med hensyn til den sædvanlige basis $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ for vektorer i planen) for *stedvektoren* $\boldsymbol{p}$ (dvs. vektoren fra O til p) er så de samme:

$$\begin{aligned} p &= (p_1, p_2)_{|\{O,x,y\}} \\ \boldsymbol{p} &= p_1 \cdot \boldsymbol{i} + p_2 \cdot \boldsymbol{j} = (p_1, p_2)_{|\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}} \quad . \end{aligned} \tag{11.1}$$

Sætning 11.2 Vi roterer $p = (p_1, p_2)$ (og den tilhørende stedvektor $\boldsymbol{p}$) en vinkel v om O i positiv omløbsretning (dvs. mod uret) i planen. Derved afbildes p i et punkt q (med tilhørende stedvektor $\boldsymbol{q}$), og koordinaterne for billedet $q = (q_1, q_2)$ er givet ved:

$$(q_1, q_2) = (p_1 \cdot \cos(v) - p_2 \cdot \sin(v),\ p_1 \cdot \sin(v) + p_2 \cdot \cos(v)) \quad , \quad \text{eller, på matrixform:} \tag{11.2}$$

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{p}^* \quad . \tag{11.3}$$

OPGAVE 11.3

Vis, at den givne afbildning i sætningen har alle de ønskede rotations-egenskaber for enhver vinkel v, altså at det netop er en rotation der beskrives ved (11.2) og (11.3):

1. Afstanden fra q til O er lig med afstanden fra p til O, således at længden af de respektive stedvektorer $\boldsymbol{p}$ og $\boldsymbol{q}$ er ens.
2. Cosinus af vinklen mellem de to stedvektorer $\boldsymbol{q}$ og $\boldsymbol{p}$ er netop lig med cosinus til den givne vinkel v i rotationen.
3. Punktet p er drejet vinklen v i *positiv omløbsretning* for at ramme q.
4. Hvilket punkt $\widehat{q}$ ville blive ramt hvis vi roterede p vinklen v i *negativ omløbsretning* (dvs. mod uret, dvs. vinklen $-v$ i positiv omløbsretning)?

Definition 11.4 Rotationsmatricen (rotations-operatoren) i ligning (11.3) vil vi her benævne med

$$\mathrm{R}_O(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \quad . \tag{11.4}$$

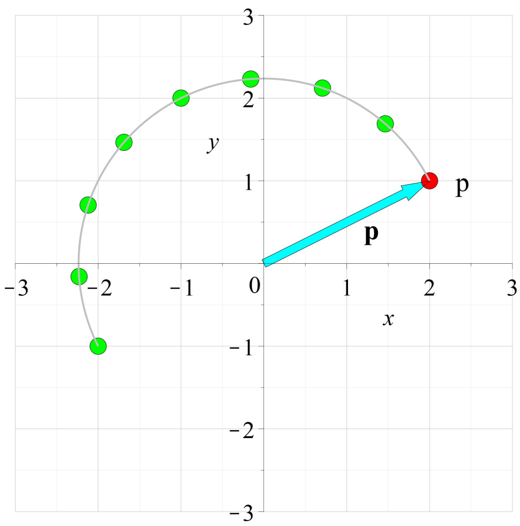
Bemærkning 11.5 Læg mærke til, at første søjle i rotationsmatricen er enhedsvektoren $(\cos(v), \sin(v))$, som netop er billedet af $(1,0)$ ved brug af rotationen $\mathrm{R}_O(v)$. På samme måde er den anden søjlevektor $(-\sin(v), \cos(v))$ netop billedet af $(0,1)$ ved rotationen.

OPGAVE 11.6

Vis, at hvis vinklen mellem to givne vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er θ, så er vinklen mellem billedvektorerne $(\mathrm{R}_O(v))(\boldsymbol{a})$ og $(\mathrm{R}_O(v))(\boldsymbol{b})$ ligeledes θ.

11.3.1 Diskrete rotationer i planen

For et givet punkt p kan vi nu bruge $\mathrm{R}_O(v)$ på $p = (p_1, p_2)$ med forskellige v-værdier, f.eks. $v = 0, \pi/8, 2\pi/8, \cdots, 8\pi/8$ hvorved der fremkommer 9 jævnt fordelte billedpunkter på den halvcirkel, der har centrum i O og radius $\|\boldsymbol{p}\|$, se figur 11.3.



Figur 11.3: Diskrete rotationer af punktet $p = (2,1)$ i planen omkring origo.

Hvis vi kan rotere punkter, så kan vi også rotere kurver og andre geometriske objekter i planen. De simpleste kurver i planen er de rette linjer. Enhver ret linje $\mathcal{L}$ i planen kan fremstilles på parameterform som i fremstillingen nedenfor, hvor p er et punkt på linjen og $\boldsymbol{e} \neq (0,0)$ er en *retningsvektor* for linjen (dvs. ud fra punktet p peger $\boldsymbol{e}$ og $-\boldsymbol{e}$ direkte i linjens retning(er).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad : \qquad \boldsymbol{r}(u) &= \boldsymbol{p} + u \cdot \boldsymbol{e} \\
&= (p_1, p_2) + u \cdot (e_1, e_2) \\
&= (p_1 + u \cdot e_1 \,,\; p_2 + u \cdot e_2) \\
&= (r_1(u), r_2(u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad .
\end{aligned} \tag{11.5}$$

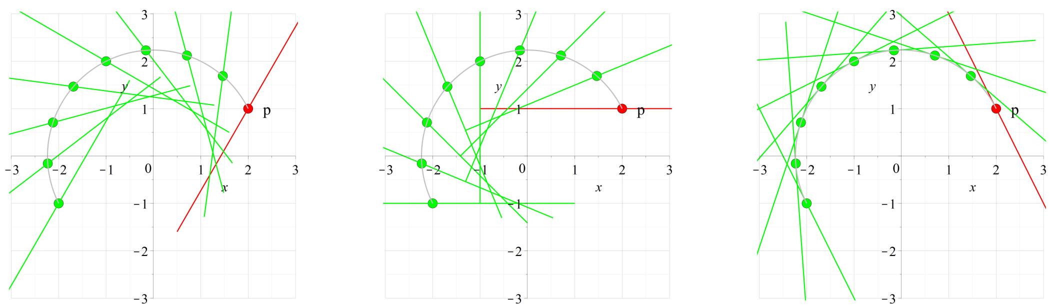
Den reelle parameter u løber her fra $-\infty$ til $+\infty$ svarende til at punktet $(r_1(u), r_2(u))$ løber fra den ene ende af linjen (som ligger i uendelig i retningen $-\boldsymbol{e}$ fra p) til den anden ende af linjen (som ligger i uendelig i retningen $\boldsymbol{e}$ fra p).

Vi bruger nu $\mathrm{R}_O(v)$ på alle punkterne på linjen og får dermed en sekvens af linjer i planen ved f.eks. igen at vælge de 9 vinkelværdier $v_1 = 0, v_2 = \pi/8, v_3 = 2\pi/8, \cdots, v_9 = 8\pi/8$ – se figur 11.4, hvor $p = (2,1)$ og hvor $\boldsymbol{e}$ er valgt til at være enhedsvektorerne $\boldsymbol{e} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ med $\theta = \pi/3$, $\theta = \pi$ og $\theta = \pi/2 + \arctan(1/2)$, henholdsvis.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_i \quad : \quad \boldsymbol{r}_i(u)^* &= (\mathrm{R}_O(v_i))(\boldsymbol{r}(u)^*) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 + u \cdot \cos(\theta) \\ 1 + u \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, \cdots, 9 \quad .
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

|||| OPGAVE 11.7

Hvorfor fås rette linjer når $\mathrm{R}_O(v)$ bruges på en ret linje som ovenfor?



Figur 11.4: Diskrete rotationer af tre forskellige startlinjer (linjestykker) igennem $p = (2,1)$ i planen omkring origo med forskellige $\boldsymbol{e}$-vektorer for den røde start-linje.

|||| OPGAVE 11.8

Hvad er vinklen mellem ethvert par af linjer $\mathcal{L}_i$ og $\mathcal{L}_j$ i hver enkelt af de tre sekvenser af 9 linjer i figur 11.4?

11.4 Rotationer om z-aksen i rummet

I rummet bruger vi et koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$ med tilsvarende basisvektorer $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Et punkt p i rummet og den tilsvarende stedvektor $\boldsymbol{p}$ har så tre koordinater $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Ved rotation af p omkring z-aksen bevares tredje-koordinaten p_3. Dvs. alle billed-punkterne $q = (q_1, q_2, q_3)$ som opnås ved rotationen af p har $q_3 = p_3$. Rotationen foregår altså udelukkende i de to andre (x, y)-koordinater og de rotationer har vi allerede fundet og udtrykt ovenfor ved hjælp af $\mathrm{R}_O(v)$. På matrixform har vi derfor direkte:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad . \tag{11.7}$$

Definition 11.9 Den udvidede rotationsmatrix vil vi kalde $\mathrm{R}_z(v)$:

$$\mathrm{R}_z(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{11.8}$$

således at vi kan skrive (11.7) kort:

$$\boldsymbol{q}^* = (\mathrm{R}_z(v))\boldsymbol{p}^* \quad . \tag{11.9}$$

Og den kan vi nu bruge på punkter og geometriske objekter i rummet på samme måde som vi ovenfor har brugt $\mathrm{R}_O(v)$ på punkter og rette linjer i planen:

11.5 Rotation af rette linjer om z-aksen i rummet

Enhver ret linje $\mathcal{L}$ i rummet kan fremstilles på parameterform på samme måde som de rette linjer i planen. Vi vælger et punkt p på linjen og en retningsvektor $\boldsymbol{e} \neq (0,0,0)$ for linjen. Så kan $\mathcal{L}$ repræsenteres således:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad : \qquad \boldsymbol{r}(u) &= \boldsymbol{p} + u \cdot \boldsymbol{e} \\ &= (p_1, p_2, p_3) + u \cdot (e_1, e_2, e_3) \\ &= (p_1 + u \cdot e_1\,,\ p_2 + u \cdot e_2\,,\ p_3 + u \cdot e_3) \\ &= (r_1(u), r_2(u), r_3(u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned} \tag{11.10}$$

Vi kan bruge $\mathrm{R}_z(v)$ på linjen $\mathcal{L}$ for en sekvens af rotationsvinkler v_i, $i = 1, \cdots, n$, og får dermed en sekvens af linjer i rummet – se allerede nu figur 11.8.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i \quad : \quad \boldsymbol{r}_i(u) &= \mathrm{R}_z(v_i)(\boldsymbol{r}(u)) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) & 0 \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \quad . \end{aligned} \tag{11.11}$$

OPGAVE 11.10

I hvilken højde, dvs. for hvilken z-værdi kommer de roterede linjer tættest på z-aksen? Vink: Højden kan findes ved hjælp af projektionen af linjen $\boldsymbol{r}(u)$ på (x,y)-planen.

Selve tårnfladen fremkommer nu ved at bruge *alle* vinkler i hele parameterområdet $[0,2\pi]$. Dvs, tårnfladen kan beskrives ved følgende parameterfremstilling, som er en funktion af de *to* variable u og v.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\boldsymbol{r}} \quad : \quad \boldsymbol{F}(u,v)^* &= (\mathrm{R}_z(v))(\boldsymbol{r}(u)^*)\\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{bmatrix} \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad v \in [0,2\pi] \quad .\end{aligned} \tag{11.12}$$

Eksempel 11.11

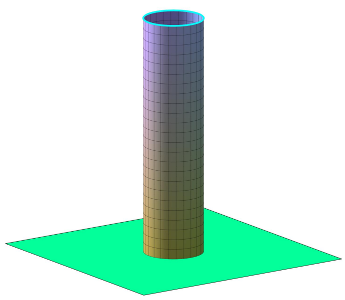
Et af de simpleste eksempler på en tårnflade fås ved at vælge $p = (1,0,0)$ og $\boldsymbol{e} = (0,0,1)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(u) = (r_1(u), r_2(u), r_3(u)) &= (p_1 + u \cdot e_1\,,\; p_2 + u \cdot e_2\,,\; p_3 + u \cdot e_3) \\ &= (0,0,u) \quad ,\end{aligned} \tag{11.13}$$

således at

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(u,v)^* &= (\mathrm{R}_z(v))(\boldsymbol{r}(u)^*) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ u \end{bmatrix} \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in [0,2\pi] \quad ,\end{aligned} \tag{11.14}$$

som fremstiller en cylinder med z-aksen som center-akse og tværsnitsradius 1, se figur 11.5.



Figur 11.5: Cylinderen fra eksempel 11.11.

OPGAVE 11.12

Hvilke 'tårnflader' $\mathcal{T}_{\boldsymbol{r}}$ frembringes ved ovenstående ligning (11.12) når vi vælger følgende respektive ingredienser til parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u)$ for den rette start-linje som roteres om z-aksen. (Illustrér med et passende matematik-værktøj.)

1. $p = (1,0,0)$ og $\boldsymbol{e} = (0,1,0)$
2. $p = (0,0,1)$ og $\boldsymbol{e} = (0,0,1)$
3. $p = (0,0,1)$ og $\boldsymbol{e} = (0,1,0)$
4. $p = (0,0,1)$ og $\boldsymbol{e} = (0,1,1)$.

11.6 Regulære tårn-flader

Vi antager, at $\mathcal{L}$ ikke skærer z-aksen, ikke er parallel med z-aksen, og ikke er vinkelret på z-aksen (jvf. opgave 11.12). Så har $\mathcal{L}$ netop ét punkt som er tættest på z-aksen, og vi vil antage at dette punkt har koordinaterne $p = (a,0,0)$ for et bestemt $a > 0$. (Hvis dette ikke er tilfældet kan vi altid vælge et nyt koordinatsystem så det bliver opfyldt!) Så er første-koordinaten for retningsvektoren $\boldsymbol{e}$ nødvendigvis 0 (ellers ville $\mathcal{L}$ ikke have mindste afstand til z-aksen i punktet p):

$$\begin{aligned} p &= (a,0,0) \quad , \quad a > 0 \\ \boldsymbol{e} &= (0,b,1) \quad , \quad b \in \mathbb{R} - \{0\} \quad . \end{aligned} \tag{11.15}$$

OPGAVE 11.13

Overvej ovenstående påstande, og vis, at vi altid under de givne betingelser kan vælge $\boldsymbol{e}$ på den angivne form, altså med $e_3 = 1$.

Vi kan nu formulere en mere præcis definition af de flader, vi er interesserede i:

Definition 11.14 En regulær skovtårn-flade $\mathcal{T}_{(a,b)}$ er givet ved parameterfremstillingen (ligesom i den generelle fremstilling (11.12)):

$$\mathcal{T}_{(a,b)} \quad : \quad \boldsymbol{F}_{(a,b)}(u,v)^* = (\mathrm{R}_z(v))(\boldsymbol{r}(u)^*) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad v \in [0,2\pi] \quad , \tag{11.16}$$

hvor den benyttede startlinje, der roteres omkring z-aksen, nu er bestemt ved de to konstanter a og b:

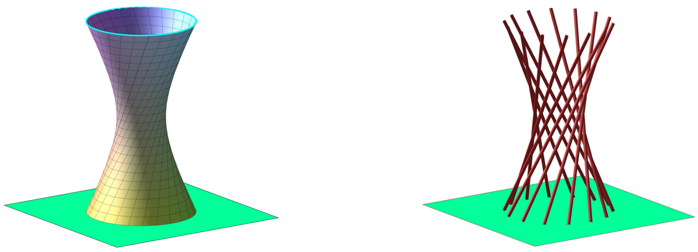
$$\mathcal{L}_{(a,b)} \quad : \quad \boldsymbol{r}(u) = (a,0,0) + u \cdot (0,b,1) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad b \in \mathbb{R} - \{0\} \quad . \tag{11.17}$$

Når a og b er givne har vi derfor eksplicit:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(a,b)} \quad : \quad \boldsymbol{F}_{(a,b)}(u,v) &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ u \cdot b \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot \cos(v) - u \cdot b \cdot \sin(v) \\ a \cdot \sin(v) + u \cdot b \cdot \cos(v) \\ u \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.18}$$

Eksempel 11.15

Hvis vi vælger konstanterne $a = 1$ og $b = 1/2$ fås det regulære skovtårn som er vist i figur 11.6. De tilhørende 14 rette linjer (stål-rør på fladen), som fremkommer ved at vælge konstante vinkler fra vinkel-sekvensen $v \in \{0, \pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7, \cdots, 13\pi/7\}$ i parameterfremstillingen $\boldsymbol{F}_{(1,\frac{1}{2})}(u,v)$ er vist til højre i figuren.



Figur 11.6: Det regulære skovtårn $\boldsymbol{F}_{(1,\frac{1}{2})}(u,v)$ samt 14 rør i den tilsvarende rør-konstruktion.

11.6.1 Ligningen for regulære skovtårne

Hvis vi skriver de tre koordinatfunktioner for $\boldsymbol{F}_{(a,b)}(u,v)$ fra (11.18) på formen

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(v) - u \cdot b \cdot \sin(v) \\ y &= a \cdot \sin(v) + u \cdot b \cdot \cos(v) \\ z &= u \quad , \end{aligned} \tag{11.19}$$

så fås det af en (rimelig simpel) udregning, at x, y, og z tilfredsstiller følgende andengradsligning:

$$x^2 + y^2 - (b \cdot z)^2 = a^2 \quad \text{for alle } u \text{ og } v \quad . \tag{11.20}$$

OPGAVE 11.16

Vis ovenstående påstand, dvs.: Hvis x, y, og z er givet ved ligningerne (11.19), så er ligning (11.20) opfyldt for alle u og v.

OPGAVE 11.17

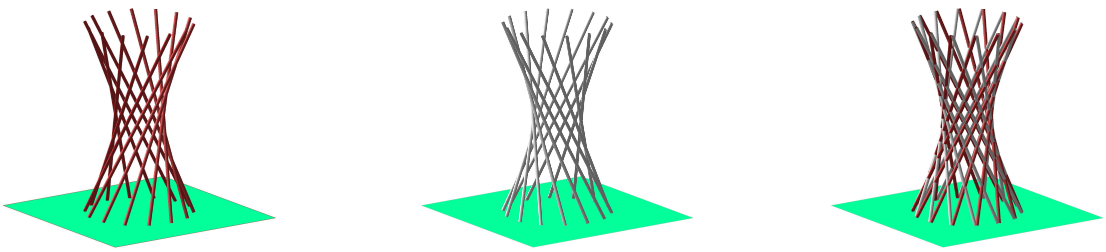
Vis også omvendt: Hvis (x,y,z) tilfredsstiller ligningen (11.20) så ligger punktet (x,y,z) på det regulære skovtårn $\mathcal{T}_{(a,b)}$, dvs. så findes der u og v, sådan at (11.19) også er opfyldt.

Figur 11.7: Skovtårnet på afstand og tæt på.

OPGAVE 11.18

Brug ligningen for $\mathcal{T}_{(a,b)}$, altså ligning (11.20), til at vise, at $\boldsymbol{F}_{(a,b)}(u,v)$ og $\boldsymbol{F}_{(a,-b)}(u,v)$ er parameterfremstillinger for *den samme flade*.

De to stålrørs-versioneringer af henholdsvis $\mathcal{T}_{(a,b)}$ og $\mathcal{T}_{(a,-b)}$ er vist i figur 11.8. Dermed har vi endelig konstrueret/udtrykt hele det dobbelte stålrør-system for alle regulære skovtårne.



Figur 11.8: Her vises 28 rør fra (den dobbelte) konstruktion af $\mathcal{T}_{(1,\frac{1}{2})} = \mathcal{T}_{(1,-\frac{1}{2})}$.

OPGAVE 11.19

Vis, at følgende *også* er en parameterfremstilling for $\mathcal{T}_{(a,b)}$, hvor igen parametrene er $u \in \mathbb{R}$ og $v \in [0, 2\pi]$:

$$\mathcal{T}_{(a,b)} \quad : \quad \boldsymbol{Q}(u,v) = \left(a \cdot \cosh(u) \cdot \cos(v)\,,\, a \cdot \cosh(u) \cdot \sin(v)\,,\, \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sinh(u)\right) \quad . \tag{11.21}$$

Dette viser eksplicit (igen), at tårnfladerne $\mathcal{T}_{(a,b)}$ er omdrejningsflader (se afsnit 14.1 i kapitel 14), og at de har generator-meridian-profil-kurverne $\gamma_{(a,b)}(u) = (a \cdot \cosh(u), 0, \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sinh(u))$ i (x,z)-planen. Med andre ord: De enkelte tårnflader kan også fremstilles ved at rotere kurverne $\gamma_{(a,b)}$ om z-aksen. Alle disse kurver er *hyperbler* – de tilfredsstiller følgende ligning i (x,z)-planen:

$$x^2 - (b \cdot z)^2 = a^2 \quad , \tag{11.22}$$

hvilket jo i øvrigt fås direkte af tårnligningen (11.20) ved simpelthen at sætte $y = 0$. Derfor kaldes de regulære tårnflader også *hyperboloider*.

11.7 Ledekurven for spiral-gangbroen i skovtårnet

Gangbroen i skovtårnet følger en kurve som ligger helt i tårn-fladen $\mathcal{T}_{(a,b)}$. Det er den kurve, vi vil kalde ledekurven for gangbroen. En parameterfremstilling for den kurve fås direkte af parameterfremstillingen $\boldsymbol{F}_{(a,b)}$ på følgende måde.

Vi skal blot bevæge et punkt på den rette linje $\boldsymbol{r}(u)$ samtidig med at linjen roteres rundt om z-aksen ved hjælp af $\mathrm{R}_z(v)$. Dette opnås ved at lade parameteren u i $\boldsymbol{r}(u)$ være en funktion af vinkel-parameteren v for rotationen. Dvs. hvis vi indsætter $u = h(v)$ for en passende funktion h i $\boldsymbol{F}_{(a,b)}(u,v)$ fås en kurve på tårnfladen $\mathcal{T}_{(a,b)}$, som typisk er en spiral-lignende kurve – hvis vi blot kræver, at $h'(v) \neq 0$ således at bevægelsen foregår samtidig både opad og rundt om tårnfladen.

Hvis vi vælger $h(v) = k \cdot v$ med f.eks. $k = 1/7$ fås spiral-kurven i figur 11.9. Det ses tydeligt, at hældningen af kurven i forhold til lodret er større på midten af tårnet end i top og bund. Det skyldes at bevægelsen når hurtigere rundt (på en kortere strækning) på midten, men med det samme 'løft' som i top og bund.

Det kan vi også indse ved at finde enhedstangentvektoren til kurven. For en generel værdi af $k > 0$

har vi spiralkurvens parameterfremstilling:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{(a,b,k)} \quad : \quad \boldsymbol{\xi}_{(a,b,k)}(v)^* &= \boldsymbol{F}_{(a,b)}(k\cdot v, v)^* \\
&= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ k\cdot v\cdot b \\ k\cdot v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\cdot\cos(v) - k\cdot v\cdot b\cdot\sin(v) \\ a\cdot\sin(v) + k\cdot v\cdot b\cdot\cos(v) \\ k\cdot v \end{bmatrix} \quad , \quad v\in\mathbb{R}
\end{aligned} \tag{11.23}$$

Denne rumkurves hastighedsvektor er:

$$\boldsymbol{\xi}'(v) = (-(a+b\cdot k)\cdot\sin(v) - k\cdot b\cdot v\cdot\cos(v)\,,\; -k\cdot v\cdot b\cdot\sin(v) + (a+b\cdot k)\cdot\cos(v)\,,\; k) \quad ,$$

og farten i bevægelsen er så:

$$\|\boldsymbol{\xi}'(v)\| = \sqrt{b^2\cdot k^2\cdot(1+v^2) + 2\cdot k\cdot b\cdot a + a^2 + k^2} \tag{11.24}$$

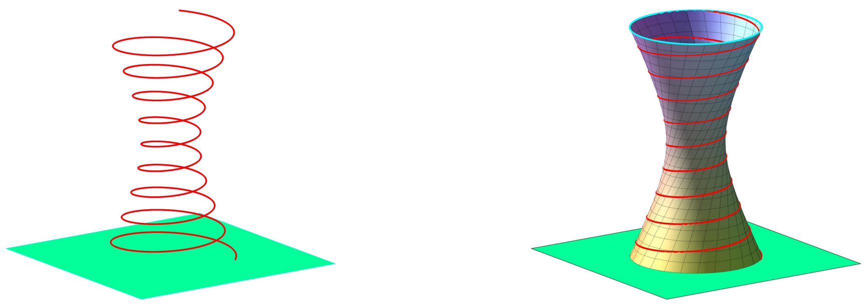
Hældningen $\alpha(v)$ af spiralkurven i forhold til lodret er 3.die koordinaten af enhedstangentvektoren:

$$\boldsymbol{e}(v) = \frac{\boldsymbol{\xi}'(v)}{\|\boldsymbol{\xi}'(v)\|} \quad . \tag{11.25}$$

Det vil sige:

$$\alpha(v) = \frac{k}{\sqrt{b^2\cdot k^2\cdot(1+v^2) + 2\cdot k\cdot b\cdot a + a^2 + k^2}} \quad . \tag{11.26}$$

Heraf fås direkte, at hældningen $\alpha(v)$ er størst for $v = 0$, dvs. midt på tårnfladen, som påstået ovenfor.



Figur 11.9: Spiralkurven $\mathcal{S}_{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{7})}$ på tårnfladen $\mathcal{T}_{(1,\frac{1}{2})}$.

11.8 Hvordan opnås konstant hældning/stigning af ledekurven for spiral-gangbroen?

I dette afsnit vil vi sluttelig undersøge, hvordan funktionen $h(v)$ kan vælges, sådan at spiralkurven $\mathcal{S}_{(a,b,h)}$ får konstant hældning i forhold til lodret.
For en helt generel løfte-funktion $h(v)$ har spiralkurven nu parameterfremstillingen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(a,b,h)} \quad : \quad \xi_{(a,b,h)}(v)^* &= \boldsymbol{F}_{(a,b)}(h(v),v)^* \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ h(v)\cdot b \\ h(v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\cdot\cos(v) - h(v)\cdot b\cdot\sin(v) \\ a\cdot\sin(v) + h(v)\cdot b\cdot\cos(v) \\ h(v) \end{bmatrix} \quad , \quad v\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{11.27}$$

Denne rumkurves hastighedsvektor $\xi'(v)$ kan nu udtrykkes via den afledede funktion $h'(v)$. Farten i bevægelsen og dermed hældningen fås derefter:

$$\alpha(v) = \frac{h'(v)}{\sqrt{(1+b^2)\cdot(h'(v))^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot h'(v) + h^2(v)\cdot b^2 + a^2}} \quad . \tag{11.28}$$

Hvis vi – ligesom i de konkrete eksempler ovenfor – nu igen sætter $a=1$ og $b=1/2$ samt eksplicit vælger at gå efter en konstant hældning på $\alpha = 1/10$, skal vi altså løse følgende *differentialligning* for at bestemme en løfte-funktion $h(v)$, som netop giver denne hældning:

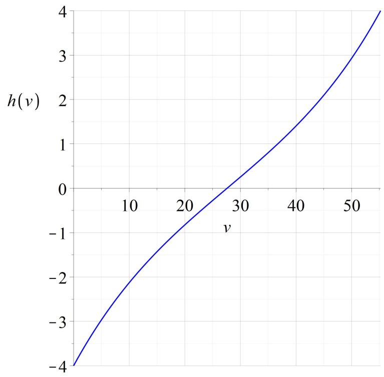
$$\cdot h'(v) = \frac{1}{20}\cdot\sqrt{5\cdot(h'(v))^2 + 4\cdot h'(v) + h^2(v) + 4} \quad , \tag{11.29}$$

hvorfra vi kan isolere (den positive) funktion $h'(v)$ (ved at løse en passende 2.grads-ligning):

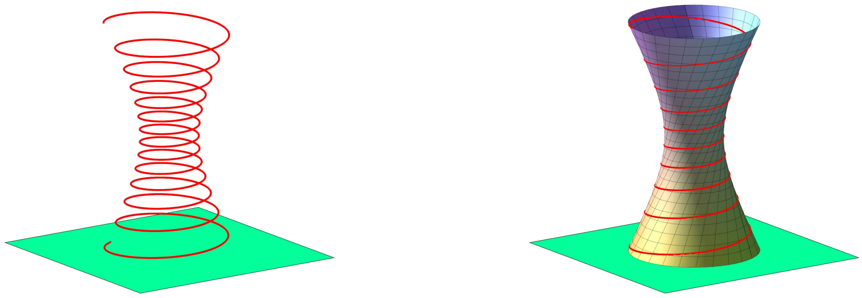
$$h'(v) = \frac{1}{395}\cdot\left(2+\sqrt{1584+395\cdot h^2(v)}\right) \quad . \tag{11.30}$$

Dermed har vi fundet en (ganske vist noget kompliceret) differentialligning for $h(v)$, og den kan løses (numerisk) hvis vi samtidig specificerer en begyndelsesværdi, f.eks. $h(0) = -4$ (som igen er motiveret af de konkrete eksempler ovenfor, hvor bunden af tårnfladen netop er placeret i $z=-4$ svarende til $u=-4$ i parameterfremstillingen $\boldsymbol{F}_{(1,\frac{1}{2})}$).

Resultatet $h(v)$ er vist i figur 11.10, og den tilhørende spiralkurve $\mathcal{S}_{(1,\frac{1}{2},h)}$ er præsenteret i figur 11.11.



Figur 11.10: Den funktion $h(v)$, som giver konstant hældning $\alpha(v) = 1/10$ for spiralkurven på tårnfladen $\boldsymbol{F}_{(1,\frac{1}{2})}$.



Figur 11.11: Spiralkurven $\mathcal{S}_{(1,\frac{1}{2},h)}$ på tårnfladen $\mathcal{T}_{(1,\frac{1}{2})}$ med en 'løfte'-funktion $h(v)$ som giver konstant hældning i forhold til lodret.

OPGAVE 11.20

Undersøg, hvad der foregår i følgende blog, og vis, at det resultat, som præsenteres der, giver en ledekurve hældning for gangbroen som kun *næsten* er konstant og som faktisk også kun *næsten* ligger på den præsenterede tårnflade: [Intmath.com blog]

OPGAVE 11.21

Vi kan følge ideen i ovennævnte blog på følgende måde: Vi ser på den tårnflade, der dannes ved rotation af hyperblen $(\cosh(u), 0, \sinh(u))$ omkring z-aksen, se opgave 11.19. Vi bevæger et punkt på den hyperbel samtidig med at hyperblen roteres, dvs. vi vælger igen en funktion f og sætter $u = f(v)$. Derved får vi – for så vidt at $f'(v) > 0$ – igen en spirallignende kurve på tårnfladen på følgende måde:

$$\eta_f(v) = \mathrm{R}_z(v)(\cosh(f(v)), 0, \sinh(f(v))) \quad , \quad v \in \mathbb{R} \quad . \tag{11.31}$$

1. Find hældningen af kurven η_f i forhold til lodret når $f(v) = v$, og vis, at hældningen igen er størst på midten af tårnet – men også, at hældningen er meget tæt på at være konstant.

2. Bestem (evt. kun numerisk) $f(v)$ således at η_f får konstant hældning i forhold til lodret.

11.9 Dimensionering af det faktiske skovtårn

OPGAVE 11.22

Find data for det 'rigtige' skovtårn og modificér de konstanter, der er benyttet i denne projektbeskrivelse sådan at skovtårn-fladen og gangbroen (f.eks. antal vindinger i 'ledekurven') kommer til at stemme overens med de virkelige data.

11.10 Alternative skovtårne med ellipse-tværsnit

De regulære skovtårne ovenfor har cirkulære tværsnit: Ved skæring med horisontale planer fås cirkler i de planer.

OPGAVE 11.23

Givet et regulært skovtårn $\mathcal{T}_{(a,b)}$: Hvad er radius af cirklerne som funktion af den højde, hvori der skæres?

Vi deformerer nu hele skovtårn-fladen ved at dividere alle x-koordinaterne for alle punkter på fladen med en positiv konstant $c > 0$, $c \neq 1$. Derved opnås en ny flade, som er lidt sammenpresset (hvis $c > 1$) eller udvidet (hvis $c < 1$) i x-akse-retningen.

OPGAVE 11.24

Vis, at det deformerede tårn (stadig) er dobbelt retlinet frembragt, dvs. de rette rør-linjer fra tårnet med de cirkulære tværsnit ved deformationen afbildes over i rette rør-linjer på tårnet med det elliptiske tværsnit.

OPGAVE 11.25

Vis, at det deformerede tårn har elliptiske tværsnit: Ved skæring med horisontale planer fås ellipser i de planer. Hvad er halvakserne for de ellipser som funktioner af den højde hvori der skæres? Vink: Wiki/Ellipse.

OPGAVE 11.26

Hvordan fås nu konstant hældning på spiral-gangbroen på det deformerede tårn?

11.11 OVERDÆKNING AF MATEMATIKTORVET

En standard hyperbolsk paraboloide $\mathcal{P}_{a,b,c}$ er typisk givet som graf-fladen for følgende funktion af to variable, hvor $a > 0$, $b > 0$, og $c \neq 0$ betegner reelle konstanter:

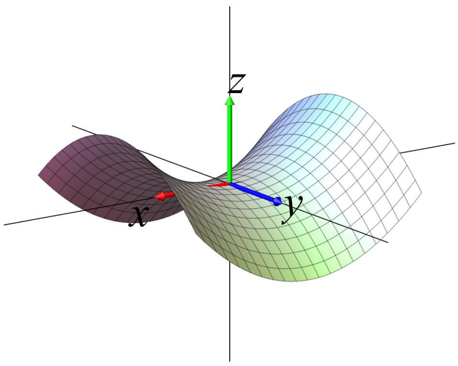
$$\mathcal{P}_{a,b,c}: \quad z = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right) \quad . \tag{11.32}$$

En parameterfremstilling for $\mathcal{P}_{a,b,c}$ er derfor:

$$\mathcal{P}_{a,b,c}: \quad \mathbf{r}(u,v) = \left(u,\, v,\, \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{u}{a}\right)^2 - \left(\frac{v}{b}\right)^2 \right) \right) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{11.33}$$

OPGAVE 11.27

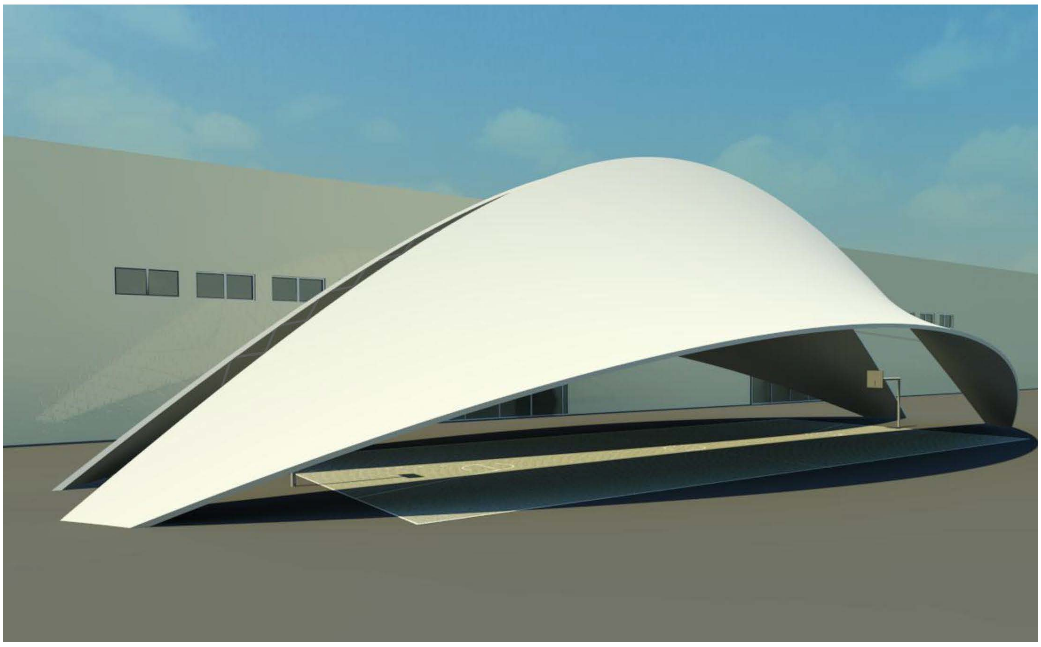
Undersøg om parameterfremstillingen i (11.33) er regulær for alle værdier af u og v når $a > 0$ og $b > 0$.



Figur 11.12: Hyperbolsk paraboloide $\mathcal{P}_{a,b,c}$ med $a = b = 1$ og $c = 2/3$.

11.12 Design skitser

Baseret på en idé af Lotte Bjerregaard, Stephan Sander et al., vil vi nu illustrere hvordan en del af en hyperbolsk paraboloide kan bruges som model for en overdækning (a'la Felix Candela) af Matematiktorvet på DTU – se figurerne 11.13, 11.14, og 11.15.



Figur 11.13: Visionen for det endelige design.

11.13 Sweeping med parabler

11.13.1 Parabel-sweeping

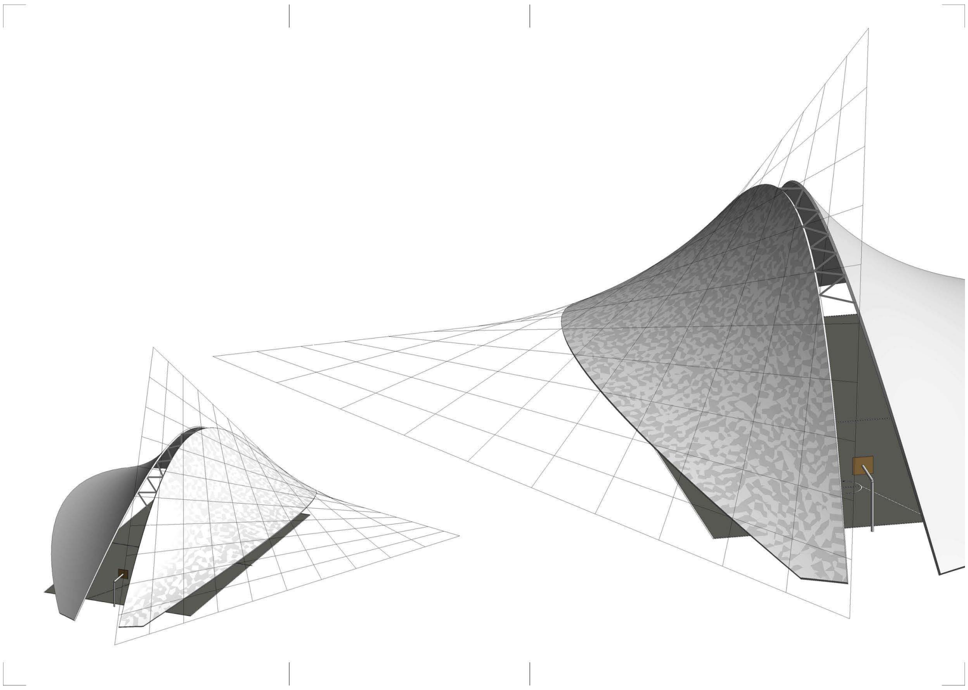
Alle koordinatkurverne i parameterfremstillingen 11.33 er parabler. Fladen kan på mange måder fremkomme ved sweeping med en parabel langs en anden parabel, som derved bliver fodpunktkurve for den pågældende sweeping.

OPGAVE 11.28

Beskriv detaljerne i en sådan sweeping. Dvs. den valgte fodpunktskurve, det medfølgende tetraederrum, og positioneringen af parablen i det rum.

11.13.2 Plane firkant-facetter

Påstand 11.29 Hjørnerne i enhver koordinat-firkant i $\mathbb{R}^2$ afbildes ved $\mathbf{r}(u,v)$ (fra (11.33)) på 4 punkter, der udspænder en plan firkant i rummet.



Figur 11.14: Den idemæssige kontakt til en *retlinet* frembringelse af den samme flade.

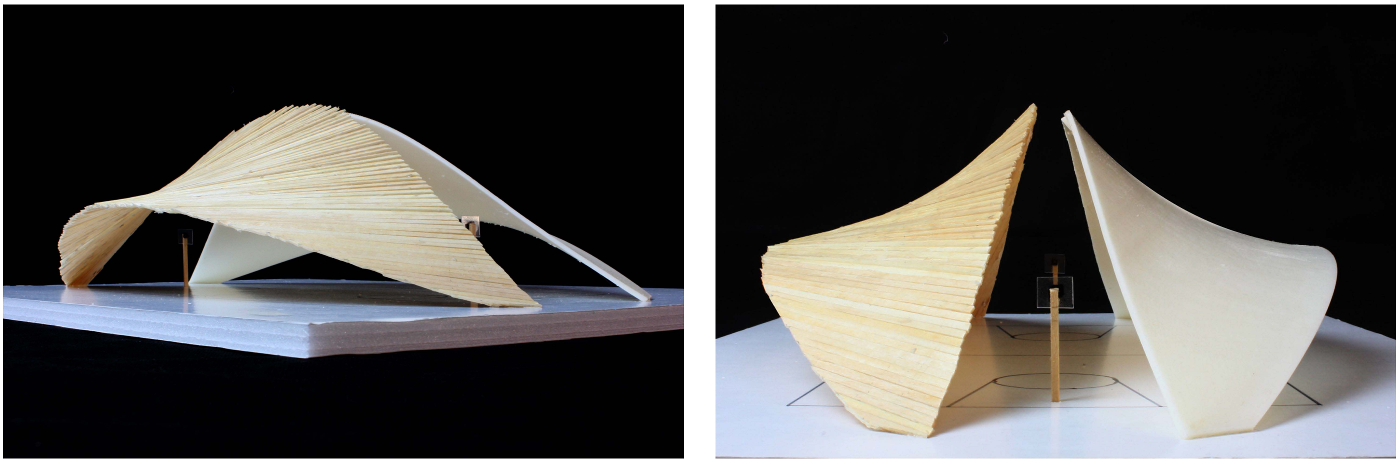
Bevis. En koordinatfirkant med hjørnepunkt (u_0, v_0) og sider henholdsvis δ_1 og δ_2 i koordinatområdet for parameterfremstillingen giver 4 (hjørne-)punkter på fladen, der hver for sig har følgende stedvektorer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}(u_0, v_0) \\
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{r}(u_0 + \delta_1, v_0) \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{r}(u_0 + \delta_1, v_0 + \delta_2) \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + \delta_2) \quad .
\end{aligned} \tag{11.34}$$

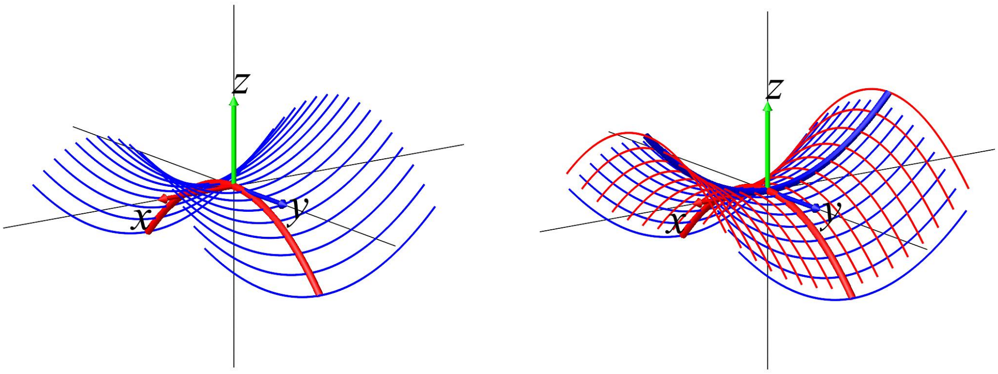
De 4 punkter giver følgende 3 forbindelses-vektorer, som vi blot skal vise er lineært afhængige, fordi netop da ligger de 4 punkter i samme plan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\
\mathbf{b} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 \\
\mathbf{c} &= \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{11.35}$$

En direkte beregning (med den givne parameterfremstilling $r(u, v)$ for $\mathcal{P}_{a,b,c}$ giver nu $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ således at de tre vektorer er lineært afhængige. Ethvert par af de tre vektorer **a**, **b**, og **c** udspænder derfor samme plan i rummet, og de 4 punkter $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_4$ ligger derfor også i den plan. Se figur 11.17. □



Figur 11.15: Retlinet konstruktion i praksis.



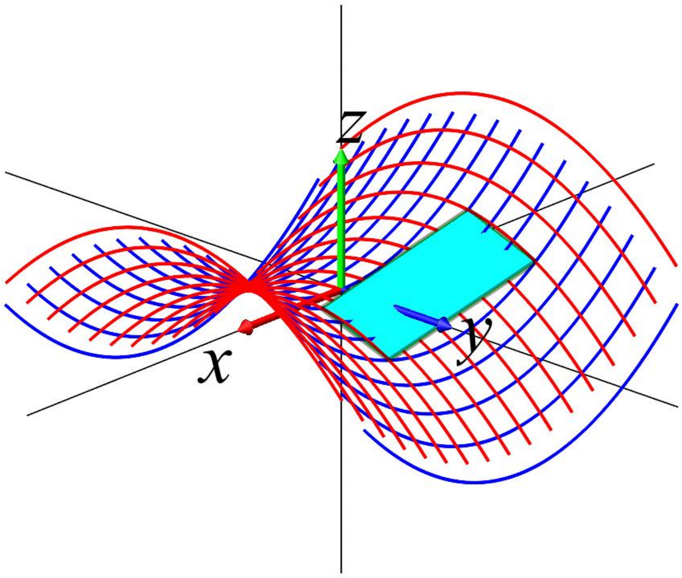
Figur 11.16: De to systemer af parallelle parabler, der hver for sig sweeper den hyperbolske paraboloide.

Dette resultat er et specialtilfælde af følgende meget mere generelle sætning:

Sætning 11.30 Lad $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G$, $t \in [0,T]$, betegne en parameterfremstilling for en (fodpunkts-)kurve i rummet og lad $\mathbf{w}(u) = (w_1(t), w_2(t), w_3(u))_N$, $u \in [\alpha, \beta]$, være en fast kurve det specielle medfølgende tetraederrum, som er givet ved $N = G$. Antag, at $\mathbf{p}'(t)$ og $\mathbf{w}'(u)$ ikke er proportionale uanset værdien af t og af u. Lad $\mathbf{r}(t,u)$ betegne den regulære flade, som dannes ved sweeping med kurven $\mathbf{w}(u)$ langs $\mathbf{p}(t)$, dvs. den flade, der har parameterfremstillingen:

$$\mathbf{r}(t,u) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(u) \quad , \quad t \in [0,T] \; , \; u \in [\alpha, \beta] \quad . \tag{11.36}$$

Så gælder det samme som i observationen 11.29: Hjørnerne i enhver koordinat-firkant i koordinat-området $[0,T] \times [a,b]$ afbildes ved $\mathbf{r}(t,u)$ (fra (11.36)) på 4 punkter, der udspænder en plan firkant i rummet.



Figur 11.17: Én firkant-facet 'på' en hyperbolsk paraboloide.

OPGAVE 11.31

Brug samme fremgangsmåde som i beviset for påstand 11.29 til at indse, at ovenstående sætning er korrekt.

OPGAVE 11.32

Hvorfor er 11.29 et specialtilfælde af 11.30?

11.14 Sweeping med rette linjer

Som antydet i konstruktionen 11.14 og 11.15 kan de hyperbolske paraboloider også frembringes ved sweeping med rette linjer. For at vise det undersøger vi først, om der i det hele taget *findes* rette linjer som er helt indeholdt i de hyperbolske paraboloider $\mathcal{P}_{a,b,c}$:

Sætning 11.33 Der er *to* systemer af rette linjer på enhver flade $\mathcal{P}_{a,b,c}$, hvor $a > 0$, $b > 0$ og $c \in \mathbb{R}$: Vi lader $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(0,t) = \left(0\,,\, t\,,\, -\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2\right)$ betegne den parabel, som fås ved at skære $\mathcal{P}_{a,b,c}$ med (y,z)-planen – se figur 11.18. For enhver værdi af t findes der to rette linjer, som ligger helt i fladen $\mathcal{P}_{a,b,c}$ og som begge går igennem punktet $\mathbf{p}(t)$.

Bevis. Enhver linje i rummet, som går igennem $\mathbf{p}(t)$, har en parameterfremstilling:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{k}} : \quad \mathbf{q}(u) = \mathbf{p}(t) + u \cdot \mathbf{k} \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \tag{11.37}$$

hvor $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ er en vektor i $\mathcal{L}$'s retning. Vi indsætter (for en fastholdt værdi af t) koordinaterne for $\mathbf{q}(u) = (x, y, z) = (p_1(t) + u \cdot k_1\,,\; p_2(t) + u \cdot k_2\,,\; p_3(t) + u \cdot k_3)$ på x, y og z pladserne i ligningen for $\mathcal{P}_{a,b,c}$:

$$p_3(t) + u \cdot k_3 = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{p_1(t) + u \cdot k_1}{a} \right)^2 - \left(\frac{p_2(t) + u \cdot k_2}{b} \right)^2 \right) \quad . \tag{11.38}$$

Vi undersøger, om der findes (k_1, k_2, k_3) således at denne ligning (11.38) er opfyldt for alle u. Ved at ekspandere højresiden i (11.38), indsætte koordinatfunktionerne for $\mathbf{p}(t)$ og samle potenserne af u får vi, at ligningen er ækvivalent med:

$$u^2 \cdot \left(\frac{c}{2b^2} \cdot k_2^2 - \frac{c}{2a^2} \cdot k_1^2 \right) + u \cdot \left(k_3 + \frac{c \cdot t}{b^2} \right) = 0 \quad . \tag{11.39}$$

For ethvert givet t er denne ligning opfyldt for alle u netop når:

$$k_1 = \frac{a}{b} \cdot k_2 \quad \mathrm{k}_3 = \frac{c \cdot t}{b^2} \cdot k_2 \tag{11.40}$$

eller

$$k_1 = -\frac{a}{b} \cdot k_2 \quad \text{og} \quad k_3 = \frac{c \cdot t}{b^2} \cdot k_2 \quad . \tag{11.41}$$

Det ses, at alle linje-løsningerne fås ved blot at vælge $k_2 = 1$. (Vi kunne også have valgt k_2 sådan at $\mathbf{k}$ ville blive en enhedsvektor.):

$$k_1 = \frac{a}{b} \quad \mathrm{k}_3 = \frac{c \cdot t}{b^2} \tag{11.42}$$

eller

$$k_1 = -\frac{a}{b} \quad \text{og} \quad k_3 = \frac{c \cdot t}{b^2} \quad . \tag{11.43}$$

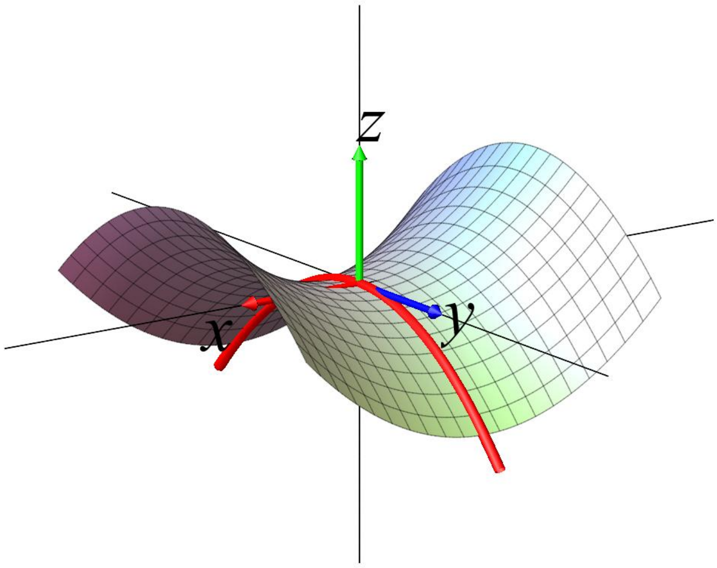
Vi har dermed fundet de to søgte linjer gennem punktet $\mathbf{p}(t)$ som ligger helt i fladen $\mathcal{P}_{a,b,c}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(t) &: \quad \mathbf{q}(u) = \mathbf{p}(t) + u \cdot \left(\frac{a}{b}, \, 1 \, , \, \frac{-c \cdot t}{b^2} \right) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2(t) &: \quad \mathbf{q}(u) = \mathbf{p}(t) + u \cdot \left(\frac{-a}{b}, \, 1 \, , \, \frac{-c \cdot t}{b^2} \right) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \end{aligned} \tag{11.44}$$

hvor

$$\mathbf{p}(t) = (0 \, , \, t \, , \, -\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2) \quad . \tag{11.45}$$

De to systemer af rette linjer (langs $\mathbf{p}(t)$) på fladen er vist i figurerne 11.19 og 11.20. □



Figur 11.18: Styre-parabel på hyperbolsk paraboloide.

OPGAVE 11.34

De ovenfor fundne to systemer af rette linjer kan selvsagt hver for sig benyttes til at udtrykke de hyperbolske paraboloider $\mathcal{P}_{a,b,c}$ som resultatet af en sweeping med en fast ret linje i et passende medfølgende tetraederrum langs med parablen $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{r}(t,u) = \mathbf{p}(t) + (\mathbf{R}(t).(\mathbf{w}(u))^*)^* \quad , \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad u \in \mathbb{R} \quad , \tag{11.46}$$

hvor $\mathbf{w}(u) = (u,0,0)_N$ og hvor den medfølgende basis N er defineret på sædvanlig måde som søjlevektorerne i rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$. Opgaven er at bestemme denne rotationsmatrix for hver enkelt af de to fundne systemer af rette linjer, der sweeper fladen. Vink: Se figur 11.20.

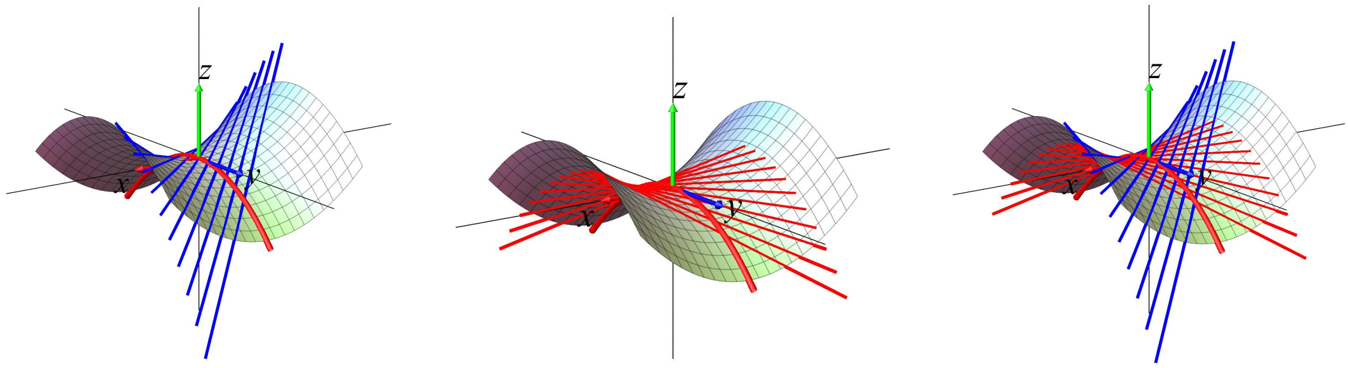
11.15 Afskæring

Det næste skridt hen imod modelleringen af overdækningen i figurerne 11.14 og 11.15 består nu i at afskære den hyperbolske paraboloide med to planer – som vist i figur 11.21 – således at netop én af de ønskede to skaller bliver veldefineret.

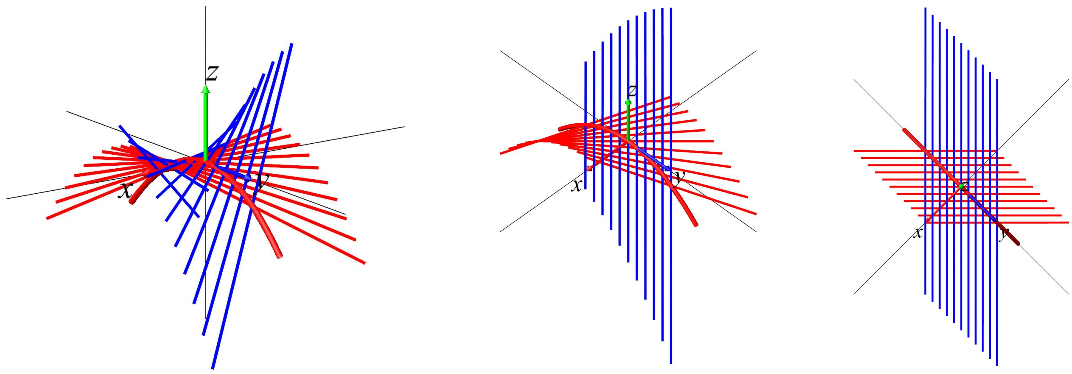
Den ene af de to (afskærings-)planer definerer vi med en ligning på formen:

$$P_1 \ : \quad \cos(\theta)\cdot x + \sin(\theta)\cdot z + d = 0 \quad , \tag{11.47}$$

hvor θ er en passende afskæringsvinkel, som vi her vil vælge til $\theta = \pi/4$, og hvor d er den konstant, som gør, at (afskærings-)planen går igennem punkterne $\mathbf{p}(1)$ og $\mathbf{p}(-1)$.



Figur 11.19: De to systemer af retlinjede frembringere langs styre-parablen.



Figur 11.20: De samme to systemer af retlinjede frembringere langs styre-parablen.

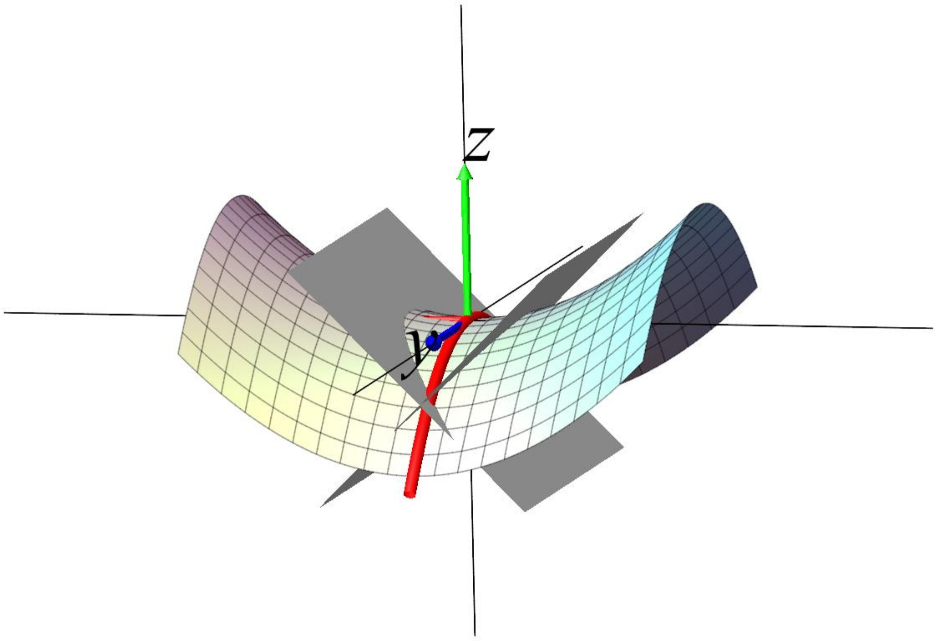
Den anden (afskærings-)plan definerer vi sådan at de to planer ligger symmetrisk i forhold til styre-parablen $\mathbf{p}(t)$ som vi definerede ovenfor, se figur 11.18:

$$P_2 : \quad \cos(\pi - \theta) \cdot x + \sin(\pi - \theta) \cdot z + d = 0 \quad . \tag{11.48}$$

|||| OPGAVE 11.35

| | Bestem værdien af d sådan at begge afskæringsplaner går igennem punkterne $\mathbf{p}(1)$ og $\mathbf{p}(-1)$.

For ethvert t findes dernæst det segment af $\mathcal{L}_1(t)$ som ligger 'over' begge planerne P_1 og P_2. Det svarer til at bestemme det tilsvarende u-interval for ethvert t. Intervallets største- og mindste-værdi fås ved at indsætte $\mathcal{L}_1(t)$ i ligningerne P_1 og P_2 og løse for u som funktion af t. Tilsvarende kan naturligvis udføres for $\mathcal{L}_2(t)$.



Figur 11.21: Afskæring af hyperbolsk paraboloide med to ortogonale planer.

OPGAVE 11.36

Sæt $\theta = \pi/4$, $a = 1$, $b = 1$, og $c = 2/3$ i ovenstående fremstillinger og bestem for ethvert $t \in [0,1]$ og for begge linjesystemer $\mathcal{L}_1(t)$ og $\mathcal{L}_2(t)$ de respektive u-intervaller, der definerer de afskårne linjer på den del af den hyperbolske paraboloide, som ligger helt over de to afskæringsplaner. Se figur 11.22. Vink: Se den generelle løsning nedenfor i opgave 11.37.

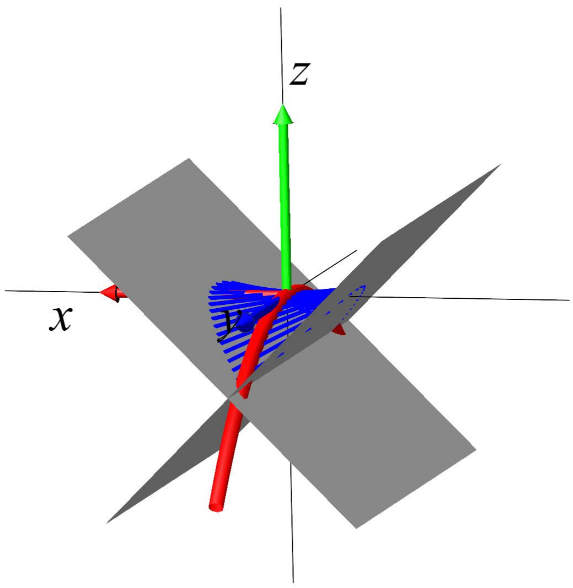
OPGAVE 11.37

Vælg nu generelle værdier for θ, a, b, og c i ovenstående fremstillinger. Det antages stadig, at begge afskæringsplaner går igennem punkterne $\mathbf{p}(1) = (0,1,-(1/2)c/b^2)$ og $\mathbf{p}(-1) = (0,-1,-(1/2)c/b^2)$. Eftervis, at for ethvert $t \in [-1,1]$ og for begge linjesystemerne $\mathcal{L}_1(t)$ og $\mathcal{L}_2(t)$ er det u-interval, der definerer de afskårne linjer på den del af den hyperbolske paraboloide, som ligger helt over de to afskæringsplaner, bestemt således (når ellers intervallet giver geometrisk 'mening' - se opgave 11.38 nedenfor):

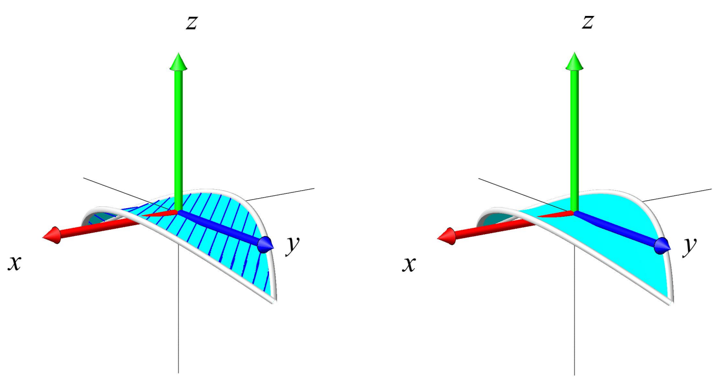
$$[\alpha(t)\,,\,\beta(t)] = \left[\frac{\sin(\theta)\cdot c\cdot(t^2-1)}{2\cdot(\cos(\theta)\cdot a\cdot b - \sin(\theta)\cdot c\cdot t)}\,,\,\frac{\sin(\theta)\cdot c\cdot(1-t^2)}{2\cdot(\cos(\theta)\cdot a\cdot b + \sin(\theta)\cdot c\cdot t)}\right] \quad . \tag{11.49}$$

OPGAVE 11.38

I det 'afskærings'-interval, som er angivet ovenfor i opgave 11.37, kan det forekomme, at $\alpha(t)$ hhv. $\beta(t)$ kan gå mod ∞ eller $-\infty$ når t vokser fra 0 mod 1 eller aftager fra 0 mod -1. Forklar hvornår og hvordan dette forekommer og hvad det betyder geometrisk for den gennemgåede afskærings-procedure.



Figur 11.22: Afskæring af retlinjede frembringere med to ortogonale planer.

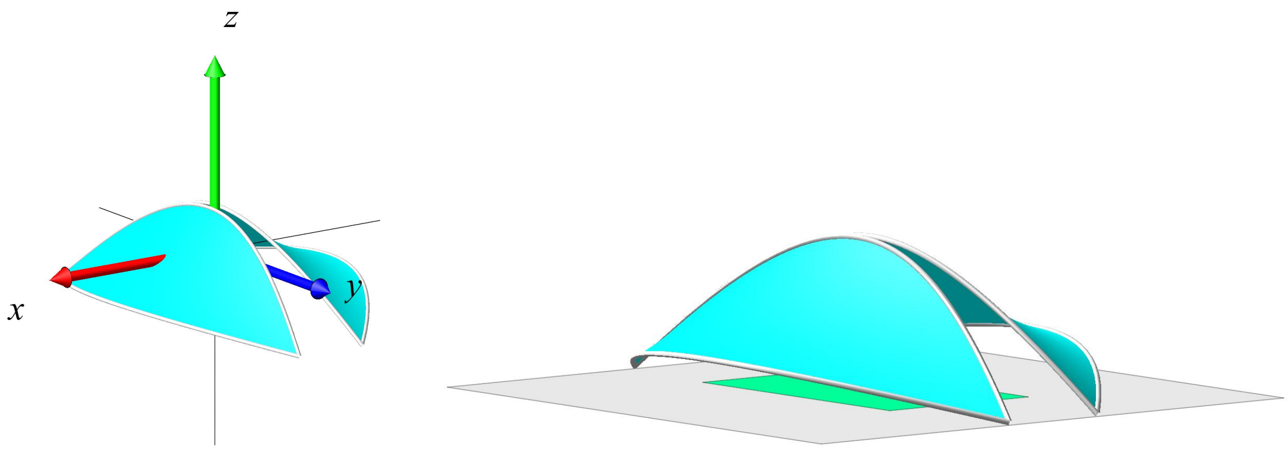


Figur 11.23: Resultatet af afskæring med to ortogonale planer.

Som det fremgår af figur 11.23 har vi dermed konstrueret en prototype på en skal, som vi i (dublet) kan benytte til den ønskede overdækning. Vi mangler dog at positionere skallen med passende rotationer og parallelforskydninger:

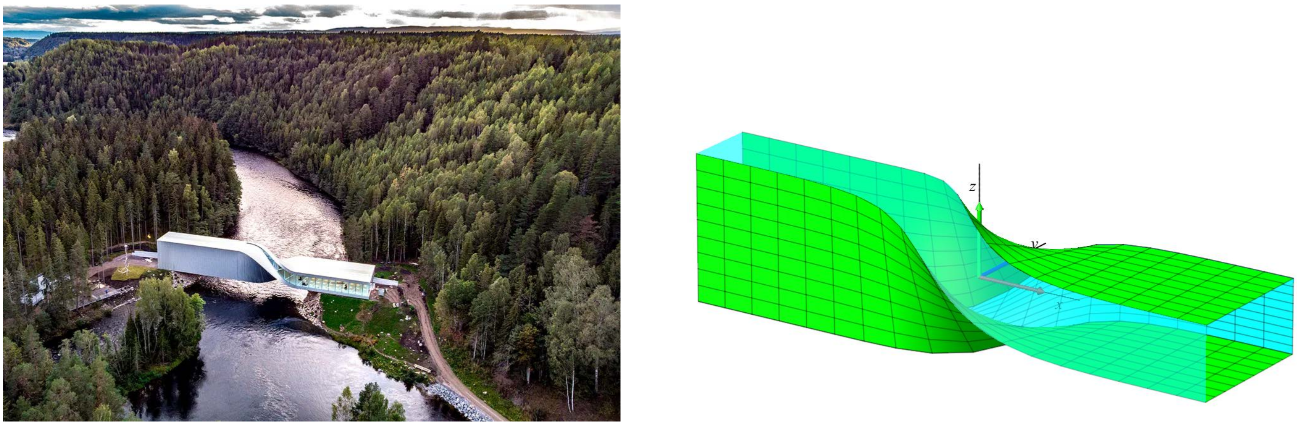
11.16 Positionering

Den afskårne parameterfremstilling roteres først omkring y-aksen dels med vinkel ϕ og dels med vinkel $-\phi$, hvor ϕ er en anelse mindre end $\pi/4$ (for at opnå fri passage ind under overdækningen). Dernæst forskydes de to roterede kopier af skallen henholdsvis i x-aksens positive retning og i x-aksens negative retning således at de to 'toppunkter' på overdækningen går fri af hinanden som vist i figur 11.24



Figur 11.24: To roterede og translaterede eksemplarer af afskæringen fra figur 11.23.

11.17 KISTEFOS MUSEET, THE TWIST



Figur 11.25: Kistefos museet The Twist og et grund-design af bygningen, med glasfacader, via et Cosserat sweep: Et lodret rektangel roteres effektivt og kontrolleret med $R_x(f(t))$ igennem vinklen $\pi/2$ langs den simple fodpunktskurve $p(t) = (t,0,0)$.

Kistefos bygningen er tydeligvis en vredet/twistet kasse, som hviler vandret på flodbredderne af elven Randselva men således at det er forskellige sider af kassen der har kontakt i de to ender. Fodpunktskurven $p(t)$ for vores Cosserat model kan vælges til at være et segment af x-aksen i et passende fast koordinatsystem som vist på figur 11.25 ovenfor til højre – i de viste eksempler er valgt $c = 4$ i parameterfremstillingen:

$$p(t) = (t,0,0) \ , \ t \in [-c,c] \quad . \tag{11.50}$$

Det afgørende greb for selve twistet i kassen er valget af den funktion $f(t)$ som styrer rotationen om x-aksen via $R_x(f(t))$ for $t \in [-c,c]$. I de viste eksempler har vi valgt (igen med $c = 4$):

$$f(t) = \frac{\pi}{4} \cdot (1 + \tanh(t)) \ , \ t \in [-c,c] \quad . \tag{11.51}$$

OPGAVE 11.39

Plot den funktion og vis, at den kan bruges som drejningsvinkel fra (næsten) vinkel 0 til (næsten) vinkel $\pi/2$ når t løber fra $-c$ til c, hvis ellers c blot er valgt stor nok.

OPGAVE 11.40

Hvilke andre såkaldte sigmoid funktioner (end $\tanh(t)$) kunne være brugt til ovenstående formål? Se Sigmoid funktioner.

I det følgende vil vi generelt bruge $f(t)$ som defineret i (11.51).

Vi er nu klar til at bruge Cosserat sweeping med den ovenstående fodpunktskurve $p(t)$ og rotationsmatricen

$$R(t) = R_x(\frac{\pi}{4} \cdot (1 + \tanh(t))) \ , \ t \in [-c, c] \quad . \tag{11.52}$$

Én af sidefladerne i Kistefos modellen fremkommer nu ved at benytte de ovenstående Cosserat data på et ret linjestykke med parameterfremstillingen:

$$r(u) = (0, b, u) \ , \ u \in [-a, a] \tag{11.53}$$

for passende valg af $a > 0$ og $b > 0$.

OPGAVE 11.41

Konstruér (plot) den sideflade, f.eks. med de værdier, der er benyttet i figur 11.25, nemlig $c = 4$, $a = 1$, og $b = 1/2$.

OPGAVE 11.42

De tre andre sideflader konstrueres og plottes 'på samme måde' ved brug af a, b, og c, men med a og b i forskellige roller. De 4 sideflader giver dermed en model for Kistefos overfladen. Eksperimentér med andre værdier a, b, og c med henblik på at få modellen til at 'ligne' det virkelige museum.

OPGAVE 11.43

Bestem arealet $A(a,b,c)$ af overfladen af modellen af Kistefos museumsbygningen som funktion af a, b og c,idet araelet af ende-rektanglerne tælles med.

OPGAVE 11.44

Bestem volumenet $V(a,b,c)$ af modellen af Kistefos museumsbygningen som funktion af a, b og c.

OPGAVE 11.45

Overvej, diskutér, find ud af om $V(a,b,c)$ har en maksimumsværdi hvis vi antager at $A(a,b,c) = 100$. Og i så fald: Hvilke værdier af a, b, og c giver dette maksimale volumen.

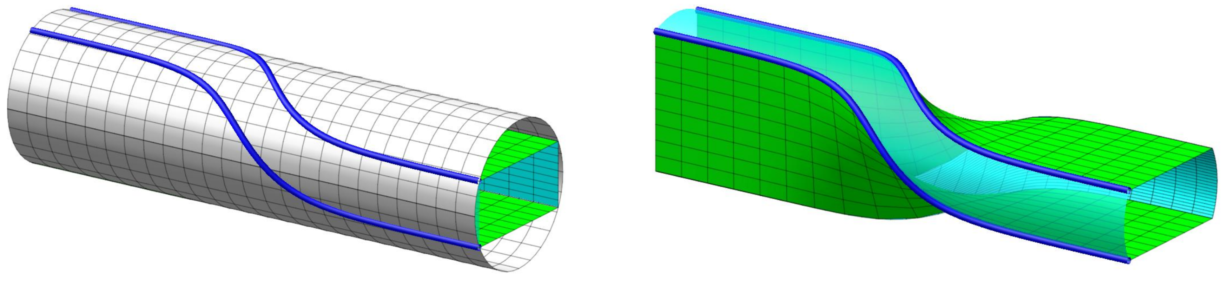
11.18 Vinduerne

De gennemsigtige vinduesfacader i modellen til højre i figur 11.25 er dobbelt-krumme ligesom en vindelflade (se mere om krumning i Kapitel 14). Det betyder, at disse facader ikke naturligt kan konstrueres med plane glas-elementer eller enkeltbøjede glas-elementer. Men enkelt-bøjede glas-elementer vil kunne bruges til konstruktion af et simpelt alternativ til de pågældende facader.

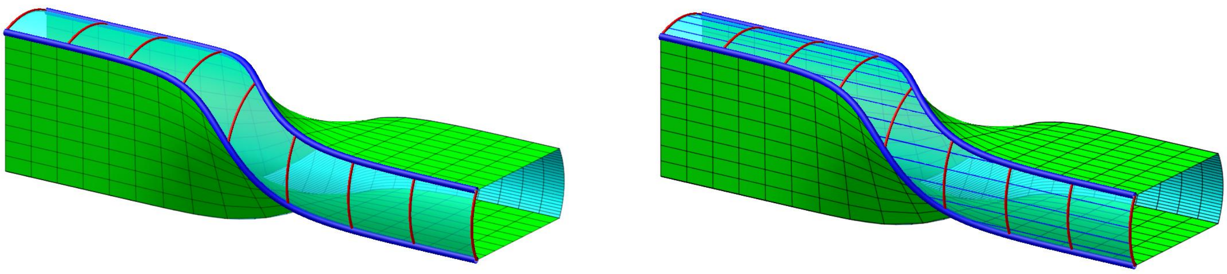
Bemærk nemlig, at Kistefos kassen (de fire hjørner i de roterede rektangler) definerer fire kurver på den omskrevne cylinder som vist i figur 11.26 til venstre. De to afgrænsede (cyan) områder på cylinderen er enkeltbøjede og hvert af dem kan derfor formes i ét stykke enkeltbøjet glas – eller i mindre segmenter, der passer perfekt sammen, som vist i figur 11.27.

OPGAVE 11.46

Hvad er radius $\rho(a,b,c)$ i den omskrevne cylinder som funktion af a, b, og c?



Figur 11.26: Omskreven cylinder og en tilsvarende afskåret enkeltbøjet glasfacade.



Figur 11.27: Segmenteret og dobbelt-segmenteret enkeltbøjet glasfacade.

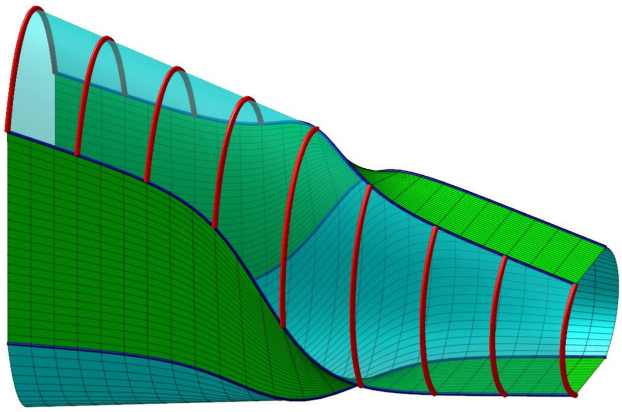
OPGAVE 11.47

Bestem arealet $A_g(a,b,c)$ af den cylindriske glasfacade som funktion af a, b, og c.

11.19 Kegle-omskrivning

I stedet for at benytte en enkelt-bøjet cylinder kan vi i stedet benytte en enkelt-bøjet kegleflade (med elliptisk tværsnit) til konstruktion af et (meget) alternativt 'Kistefos museum' – se figur

11.28. Ideen er den samme; Vinduesfacaderne (cyan) kan stadig laves i enkelt-bøjet glas, mens resten af overfladen (grøn) er dobbeltkrummet retlinet frembragt (af rette linjestykker).



Figur 11.28: Segmenteret enkeltbøjet glasfacade på en elliptisk kegleflade.

Kapitel 12

Regulære flader i rummet

12.1 Graf-flader for funktioner af to variable

Givet en funktion $f(x,y)$ af to variable. Så kan vi konstruere grafen for funktionen over (x,y)-planen i $\mathbb{R}^3$ (med det sædvanlige velkendte koordinatsystem), nemlig som den flade i rummet, der består af de punkter (x,y,z), der tilfredsstiller ligningen $z = f(x,y)$.

OPGAVE 12.1

Lad a, b, og c betegne 3 reelle tal og sæt $f(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$, hvor $(x,y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

1. Tegn eller skitsér graf-fladen for f omkring $(0,0,0)$ ved forskellige valg af a, b, og c.
2. Bestem de partielle afledede af f til og med 2. orden i et vilkårligt givet punkt (x_0,y_0), dvs. $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, $f''_{xx}(x_0,y_0)$, $f''_{xy}(x_0,y_0)$, og $f''_{yy}(x_0,y_0)$.
3. Beskriv tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$.
4. Antag, at $c = 0$. For hvilke værdier af a og b ligger graf-fladen for f over, under, eller i skæring med, tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$ – pånær lige i punktet selv, hvor graf-fladen og tangentplanen altid rører hinanden.?
5. Kan overspringes i første omgang (tages op igen i opgave 14.27) : Antag igen at c ikke nødvendigvis er 0. For hvilke værdier af a, b, og c ligger graf-fladen for f nu over, under, eller i skæring med, tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$?

12.2 Parametriserede flader

En helt generel parametriseret flade er givet ved en vektorfunktion $\boldsymbol{r}(u,v)$, som afbilder et parameter-område $\mathcal{U}$ i $\mathbb{R}^2$ ind i rummet via tre koordinatfunktioner, h, g, og f, som alle tre er funktioner af de to variable u og v:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (h(u,v), g(u,v), f(u,v)) \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad . \tag{12.1}$$

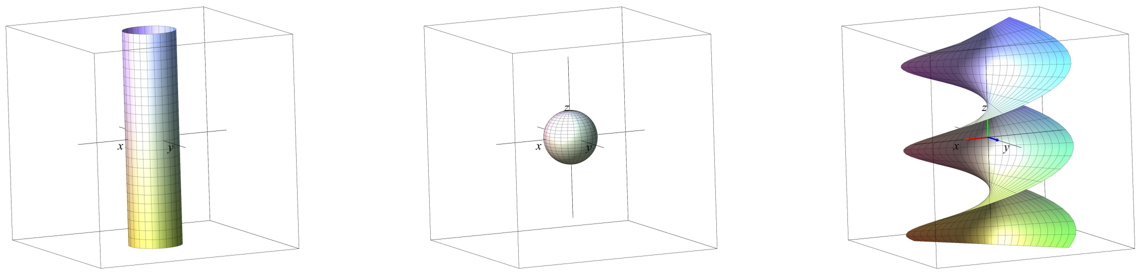
Eksempel 12.2

Graf-flader er parametriserede flader. For eksempel fås samme flade som i opgave 12.1 ved parameterfremstillingen: $\boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,f(u,v))$, dvs. ved blot at bruge de to simple funktioner $h(u,v) = u$, og $g(u,v) = v$ og så iøvrigt lade f betegne den samme funktion som i opgaven.

Eksempel 12.3

Her er nogle klassiske eksempler på parametriserede flader:

$$\begin{aligned}
&1.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,u^2+v^2) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
&2.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,u\cdot v) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
&3.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u+v,u-v,u) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
&4.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u+v,u-v,u\cdot v) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
&5.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (\cos(v),\sin(v),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\\
&6.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (\cos(u)\cos(v),\cos(u)\sin(v),\sin(u)) \quad , \quad u \in \,]-\pi/2,\pi/2[\quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\\
&7.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (v\cos(u),v\sin(u),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \\
&8.: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u\cos(v),u\sin(v),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\quad .
\end{aligned} \tag{12.2}$$



Figur 12.1: Et par af fladerne fra listen i eksempel 12.3

OPGAVE 12.4

Tegn selv eller skitsér (passende dele af) de givne flader i eksempel 12.3. Der er et par af de angivne 8 flader, som har konstant krumning; det kan ses allerede før vi præcis ved hvad krumning er eller betyder. Hvilke flader er der mon tale om?

OPGAVE 12.5

Hvilke parametriseringer fra eksempel 12.3 svarer til hvilke flader i figur 12.1?

Hver enkelt af de tre funktioner h, g, og f i den generelle parameterfremstilling (12.1) antages at være pæne differentiable funktioner som i de ovenstående eksempler. Så kan de – og dermed $\boldsymbol{r}(u,v)$ – differentieres partielt med hensyn til u og v. For eksempel er:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (h'_u(u,v), g'_u(u,v), f'_u(u,v)) \quad , \\ \boldsymbol{r}''_{uv}(u,v) &= (h''_{uv}(u,v), g''_{uv}(u,v), f''_{uv}(u,v)) \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Specielt har vi brug for følgende ekstra betingelse, som sikrer, at fladerne har veldefinerede tangent-planer:

Definition 12.6 Parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$ siges at være en regulær parameterfremstilling hvis følgende krydsprodukt ikke er nul-vektoren:

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v) \neq \boldsymbol{0} \quad \text{for alle} \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad . \tag{12.4}$$

OPGAVE 12.7

Vis, at alle graf-flade-parametriseringer er regulære. Vink: Krydsproduktet af $(1,0,\alpha)$ med $(0,1,\beta)$ er $(-\alpha,-\beta,1)$.

OPGAVE 12.8

Hvilke af parameterfremstillingerne i eksempel 12.3 er regulære?

OPGAVE 12.9

Hvorfor sikrer regularitetsbetingelsen, at den parametriserede flade har en veldefineret tangent-plan i ethver punkt?

Definition 12.10

Regularitet giver i punktet $\boldsymbol{r}(u,v)$ en tangentplan, som har enheds-normalvektoren:

$$\boldsymbol{N}(u,v) = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{\|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\|} \tag{12.5}$$

OPGAVE 12.11

Bestem enhedsnormalvektoren $\boldsymbol{N}(0,0)$ i punktet $\boldsymbol{r}(0,0)$ for enhver af de regulære flader i eksempel 12.3. Hvad er så en tilsvarende ligning for tangentplanen i det punkt på de enkelte flader? Vink. Som bekendt er ligningen for en plan i rummet: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, hvor a, b, c, og d er konstanter og hvor vektoren (a,b,c) er ortogonal på planen og dermed ortogonal på fladen i punktet $\mathbf{r}(0,0)$.

12.3 Regulære kurver på regulære flader i rummet

Som beskrevet ovenfor er en parametriseret flade i rummet givet ved en vektorfunktion $\boldsymbol{r}(u,v)$ af to variable $(u,v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Enhver kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$, $t \in [a,b]$, *på den parametriserede flade* kan derfor realiseres ved at bruge vektorfunktionen $\boldsymbol{r}$ på en kurve $\boldsymbol{\Gamma}(t)$, $t \in [a,b]$, i parameterområdet $\mathcal{U}$, altså ved at afbilde $\boldsymbol{\Gamma}$ på fladen med afbildningen $\boldsymbol{r}$:

Definition 12.12 Lad $\boldsymbol{\Gamma}(t) = (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$, $t \in [a,b]$, være en parameterfremstilling for en passende pæn (dvs. differentiabel) kurve i parameterplanen $\mathcal{U}$ og sæt

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) = \boldsymbol{r}(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) \quad , \quad t \in [a,b] \quad . \tag{12.6}$$

Så er $\boldsymbol{\gamma}(t)$ selv en differentiabel rumkurve med koordinaterne:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \\ &= (h(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)),\, g(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)),\, f(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))) \quad . \end{aligned} \tag{12.7}$$

Kurven $\boldsymbol{\Gamma}$ i $\mathcal{U}$ kaldes urbilledet af kurven $\boldsymbol{\gamma}$ på fladen. Kurven $\boldsymbol{\gamma}$ er så selv billedet på fladen af kurven $\boldsymbol{\Gamma}$ i $\mathcal{U}$.

Sætning 12.13 Hvis $\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U}$, er en regulær parameterfremstilling for en flade i rummet og hvis $\boldsymbol{\Gamma}(t)$, $t \in [a,b]$, er en regulær parameterfremstilling for en kurve i $\mathcal{U}$, så er $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t))$, $t \in [a,b]$, en regulær parameterfremstilling for en kurve i rummet, dvs. $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0}$.

OPGAVE 12.14

Brug kædereglen og vis sætning 12.13. Vink: Se opgave 12.22.

12.4 Krumningen af kurver på flader i rummet

Rumkurven $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) = \boldsymbol{r}(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$, $t \in [a,b]$, har for ethver t en krumning $\kappa(t)$ i rummet. Fra kapitel 8 afsnit 8.4.1 ved vi, at

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3} \quad , \tag{12.8}$$

og at krumningsvektoren tilsvarende er (når $\kappa(t) \neq 0$) givet ved

$$\kappa(t) \cdot \mathbf{f}(t) \quad , \tag{12.9}$$

hvor $\mathbf{f}(t)$ er den enheds-normalvektor til kurven, som optræder i Frenet–Serret basen $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ på stedet $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

Definition 12.15 Normal-krumningen $\kappa_n(t)$ af kurven $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t))$ på fladen med parameterfemstillingen $\boldsymbol{r}$ defineres som projektionen af kurvens krumningsvektor $\kappa(t) \cdot \mathbf{f}(t)$ i rummet på fladens normalvektor $\mathbf{N}$ på stedet $\boldsymbol{\gamma}(t)$:

$$\kappa_n^{\gamma}(t) = \kappa_n(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{f}(t) \bullet \mathbf{N}(t) \quad (\text{og } \kappa_n^{\gamma}(t) = 0 \text{ hvis } \kappa(t) = 0) \quad , \tag{12.10}$$

hvor $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) = \mathbf{N}(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$ er enhedsnormalvektorfeltet for fladen langs med kurven. Når det af sammenhængen er klart hvilken kurve vi betragter, vil vi nøjes med at skrive $\kappa_n(t)$ som ovenfor – ellers noteres normalkrumningen (som også vist ovenfor) med $\kappa_n^{\gamma}(t)$.

Som det fremgår kan det være lidt besværligt at beregne normalkrumninger ud fra denne definition. Grunden til at formulere normalkrumningen på den måde er udelukkende, at det så heraf fremgår, at normalkrumningen ikke afhænger af parametriseringen af kurven og heller ikke afhænger af parametriseringen af fladen – både $\kappa(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{N}(t)$ er størrelser og vektorer, som er geometriske i den forstand at de kun afhænger af kurven og fladen og ikke af de valgte parametriseringer – pånær dog modifikationen i følgende bemærkning:

Bemærk, at hvis vi havde benyttet en anden parameterfremstilling for den sammme flade i rummet men med et normal-vektorfelt som er modsatrettet $\mathbf{N}$, så vil $\kappa_n(t)$ skifte fortegn. Definitionen af $\kappa_n(t)$ er altså afhængig af den orientering af fladen som defineres ved normalvektorfeltet i (12.5).

OPGAVE 12.16

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne en af parameterfremstillingerne i eksempel 12.3. Angiv en ny parameterfremstilling for den samme flade, men som har et normalvektorfelt $\mathbf{N}$ som er modsat-rettet det oprindelige normalvektorfelt.

Beregningen af normalkrumningerne kan udføres direkte som følger:

Sætning 12.17 Normal-krumningen $\kappa_n(t)$ af kurven $\gamma(t)$ på fladen med parameterfemstillingen $\boldsymbol{r}$ kan beregnes direkte således:

$$\kappa_n^{\gamma}(t) = \kappa_n(t) = \left(\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}\right) \bullet \mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) \quad , \tag{12.11}$$

Bevis. Vi kan antage, at kurven først buelængde-parametriseres, således at den omparametriserede kurve har parameterfrestillingen $\mu(s) = \gamma(t(s))$. (Bemærk, at vi ikke behøver at finde den omparametrisering eksplicit for at kunne bruge den i beviset.) Så er

$$\kappa_n^{\gamma}(t(s)) = \kappa_n^{\mu}(s) = \mu''(s) \bullet \mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t(s))) \quad , \tag{12.12}$$

fordi $\|\mu'(s)\| = 1$, $\kappa(s) = \|\mu''(s)\|$, og $\mathbf{f}(t(s)) = \mu''(s)/\kappa(s)$. Vi skal derfor blot udtrykke $\mu''(s)$ ved $\gamma''(t)$:

$$\begin{aligned}
\mu''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\gamma'(t)\cdot\|\gamma'(t)\|^{-1}\right)\cdot\frac{dt}{ds} \\
&= \left(\gamma''(t)\cdot\|\gamma'(t)\|^{-1} + \gamma'(t)\cdot\frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\|^{-1}\right)\cdot\|\gamma'(t)\|^{-1} \\
&= \gamma''(t)\cdot\|\gamma'(t)\|^{-2} + \gamma'(t)\cdot(*) \quad ,
\end{aligned} \tag{12.13}$$

hvor $(*)$ betegner en eller anden funktion af t, som vi ikke behøver at udregne. Vi får nemlig af ovenstående at:

$$\begin{aligned}
\kappa_n^{\gamma}(t(s)) &= \mu''(s) \bullet \mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t(s))) \\
&= \gamma''(t)\cdot\|\gamma'(t)\|^{-2} \bullet \mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) \quad ,
\end{aligned} \tag{12.14}$$

og det var det, vi skulle vise. □

Vi vil selvfølgelig typisk benytte det simplere udtryk fra sætning 12.17, når vi i det følgende skal beregne et udtryk for normalkrumningen af en given kurve γ på en given flade med normalvektorfelt $\mathbf{N}$.

OPGAVE 12.18

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne parameterfremstillingen for en *plan* i rummet. Vis, at enhver kurve $\gamma(t)$ i planen har $\kappa_n(t) = 0$ for alle t.

OPGAVE 12.19

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne parameterfremstillingen for en kugleflade i rummet med udadrettet normalvektorfelt og radius R. Vis, at enhver kurve $\gamma(t)$ i på kuglefladen har konstant $\kappa_n(t)$ for alle t. Hvilken konstant er der tale om?

OPGAVE 12.20

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne parameterfremstillingen for en cylinder i rummet med udadrettet normalvektorfelt og cirkulært tværsnit med radius R. Vis, at der findes kurver $\gamma(t)$ på cylinderfladen, som har $\kappa_n(t) = 0$ for alle t og beskriv disse kurver. Vis også, at der findes andre kurver på cylinderfladen som har $\kappa_n(t) = -1/R$ for alle t og beskriv disse kurver.

Vi vil nedenfor indse følgende resultat, som ved første øjekast nok kan forekomme lidt overraskende, men som skal hjælpe os væsentligt med at definere krumningsbegreberne *for flader* ud fra normalkrumningsbegrebet for kurver på fladerne:

Sætning 12.21 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne en parameterfremstilling for en flade i rummet, og lad $\boldsymbol{\gamma}$ og $\boldsymbol{\eta}$ betegne to kurver på fladen, som begge går igennem et punkt p og som dér har proportionale tangentvektorer. Vi kan antage, at p for begge kurver svarer til parameterværdien 0, så antagelserne om kurverne er altså:

$$p = \boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\eta}(0) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\gamma}'(0) \propto \boldsymbol{\eta}'(0) \neq \mathbf{0} \quad . \tag{12.15}$$

Så har de to kurver præcis samme normalkrumning i punktet p:

$$\kappa_n^{\gamma}(0) = \kappa_n^{\eta}(0) \quad , \tag{12.16}$$

Vi vil vise – og bruge – den sætning i næste kapitel. Se sætning 13.2 og sætning 13.7 nedenfor. Selvfølgelig vil vi også samtidig finde et udtryk for den fælles normalkrumning, et udtryk der altså kun indeholder oplysninger om parameterfremstilllingen $\boldsymbol{r}$ for fladen omkring punktet p samt den ekstra oplysning som derudover er nødvendig, nemlig kurvernes fælles tangentretninger, for at bestemme deres fælles normalkrumning i p.

Indledningsvis vil vi først finde et udtryk for tangentvektoren (og dens længde) for én given kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ på fladen med parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$ – med reference til opgave 12.14. Vi har via kædereglen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}(t) &= \boldsymbol{r}(\Gamma_1(t),\Gamma_2(t)) \quad , \quad t\in[a,b] \\
\boldsymbol{\gamma}'(t) &= \Gamma_1'(t)\cdot \boldsymbol{r}_u'(\Gamma_1(t),\Gamma_2(t)) + \Gamma_2'(t)\cdot \boldsymbol{r}_v'(\Gamma_1(t),\Gamma_2(t)) \\
&= \Gamma_1'\cdot \boldsymbol{r}_u' + \Gamma_2'\cdot \boldsymbol{r}_v' \quad , \\
&\text{og dermed:} \\
\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2 &= (\Gamma_1'\cdot \boldsymbol{r}_u' + \Gamma_2'\cdot \boldsymbol{r}_v')\cdot(\Gamma_1'\cdot \boldsymbol{r}_u' + \Gamma_2'\cdot \boldsymbol{r}_v') \\
&= (\Gamma_1')^2\cdot(\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_u') + (\Gamma_1'\cdot\Gamma_2')\cdot(\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v') + (\Gamma_1'\cdot\Gamma_2')\cdot(\boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_u') + (\Gamma_2')^2\cdot(\boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_v') \\
&= \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v' \\ \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_v'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1' \\ \Gamma_2'\end{array}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Den (2×2)-matrix, der optræder i ovenstående udtryk for $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2$ vil vi nedenfor betegne $\mathcal{F}_I$ og kalde den *første fundamentalform-matrix* for den givne parameterfremstilling:

$$\mathcal{F}_I(u,v) = \left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v' \\ \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_v'\end{array}\right] \quad . \tag{12.18}$$

Vi kan altså allerede nu notere følgende udtryk for længden (i anden) af $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ som vi også skal gøre brug af nedenfor:

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2 = \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_I(\boldsymbol{\Gamma}(t))\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1' \\ \Gamma_2'\end{array}\right] \quad . \tag{12.19}$$

|||| OPGAVE 12.22

Vis, at vores antagelse om regularitet, $\|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'\|\neq 0$ svarer præcis til, at $\text{Det}(\mathcal{F}_I)\neq 0$. Og brug dette til at indse: Hvis urbilledet $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ er en regulær kurve i $\mathcal{U}$, så er $\gamma(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t))$ også en regulær kurve på fladen med parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$. Se opgave 12.14.

Da $\mathcal{F}_I$ spiller en afgørende rolle for beregning af længder af (tangentvektorer til) kurver på flader må vi også forvente, at vi kan bruge den til beregning af vinkler mellem skærende kurver på en flade.
Lad $\boldsymbol{\gamma}(t)$ og $\boldsymbol{\lambda}(w)$ betegne to kurver på fladen med parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(u,v)$ og antag at de skærer hinanden i $p=\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{\lambda}(0)$. Antag, at kurvernes urbilleder i $\mathcal{U}$ er henholdsvis $\boldsymbol{\Gamma}(t)=(\Gamma_1(t),\Gamma 2(t))$ og $\boldsymbol{\Lambda}(w)=(\Lambda_1(w),\Lambda_2(w))$ sådan at der ligeledes gælder i $\mathcal{U}$ at $\boldsymbol{\Gamma}(0)=\boldsymbol{\Lambda}(0)=\widehat{p}$ og $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(0))=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Lambda}(0))=\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{\lambda}(0)=p$. Så er:

$$\boldsymbol{\gamma}'(0)\cdot\boldsymbol{\lambda}'(0) = \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v' \\ \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_u' & \boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_v'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\Lambda_1' \\ \Lambda_2'\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_I\cdot\left[\begin{array}{c}\Lambda_1' \\ \Lambda_2'\end{array}\right] \quad , \tag{12.20}$$

hvor vi antager, at alle udtrykkene evalueres i de punkter p på fladen og $\widehat{p}$ i $\mathcal{U}$, der svarer til $t=0$ og $w=0$.

OPGAVE 12.23

Benyt samme fremgangsmåde og opskrivning som i (12.17) til at indse ovenstående udtryk (12.20) for skalarproduktet mellem de to tangentvektorer til to skærende kurver på fladen. Hvordan udtrykkes herefter $\cos(\sphericalangle(\boldsymbol{\gamma}'(0),\boldsymbol{\lambda}'(0)))$ ved hjælp af $\mathcal{F}_I$, $\boldsymbol{\Gamma}'(0)$, og $\boldsymbol{\Lambda}'(0)$?

Arealbestemmelsen af (områder på) fladen kan nu ligeledes formuleres direkte ved $\mathcal{F}_I(u,v)$, idet der gælder følgende omskrivning af integranden (Jacobi-funktionen) i areal-integralet:

Sætning 12.24

$$\text{Jacobi}_{\boldsymbol{r}}(u,v) = \|\boldsymbol{r}'_u(u,v)\times\boldsymbol{r}'_v(u,v)\| = \sqrt{\text{Det}(\mathcal{F}_I(u,v))} \tag{12.21}$$

Bevis. Følgende gælder for alle vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i rummet og derfor også for $\boldsymbol{r}'_u(u,v)$ og $\boldsymbol{r}'_v(u,v)$:

$$\begin{aligned}\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\end{bmatrix}\right) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2 - \cos^2(\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}))\cdot\|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2\cdot(1-\cos^2(\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})))\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2\cdot\sin^2(\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}))\\ &= \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 \quad ,\end{aligned} \tag{12.22}$$

så pengene passer! ☐

Med andre ord er matricen $\mathcal{F}_I(u,v)$ en uundværlig hjælp til beregning af længder af kurver, vinkler mellem vektorer og arealer af områder på flader med givne parameterfremstillinger $\boldsymbol{r}(u,v)$. Vi vil derfor allerede nu nævne nogle andre indledende observationer om $\mathcal{F}_I$ som vil være til nytte i de næste kapitler:

OPGAVE 12.25

Argumentér for, at $\mathcal{F}_I(u,v)$ er positiv definit for alle (u,v), altså at der gælder:

$$\begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix}\cdot\mathcal{F}_I\cdot\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} > 0 \quad \text{for alle} \quad (\xi,\eta)\neq(0,0) \quad . \tag{12.23}$$

Vink: Da matricen $\mathcal{F}_I$ er symmetrisk kan den diagonaliseres til en diagonalmatrix med egenværdierne λ_1 og λ_2 i diagonalen. De er begge positive fordi $\text{Det}(\mathcal{F}_I) > 0$ og $\text{Spor}(\mathcal{F}_I) > 0$. Alternativt kan der blot refereres til ligning (12.19) ovenfor.

OPGAVE 12.26

Argumentér for, at følgende niveau-kurve $\mathcal{E}$ er en ellipse i (ξ,η)-planen:

$$\mathcal{E} = \{\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \left[\begin{array}{cc} \xi & \eta \end{array}\right] \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] = 1\} \quad . \tag{12.24}$$

Bestem halvakserne a og b for ellipsen udtrykt ved de to egenværdier λ_1 og λ_2 for $\mathcal{F}_I$. Vink: Se opgave 12.25.

OPGAVE 12.27

Lad $f(\xi,\eta)$ betegne et andengrads-polynomium i de variable ξ og η. Lad $\mathcal{K}_c$ betegne følgende niveau-kurve for f i (ξ,η)-planen:

$$\mathcal{K}_c = \{\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid f(\xi,\eta) \; = c\} \quad . \tag{12.25}$$

Argumentér for, at hvis $\mathcal{K}_c$ ikke har en fælles tangent med $\mathcal{E}$ (fra opgave 12.26), så er c ikke den største værdi, som f antager på $\mathcal{E}$, og c er heller ikke den mindste værdi, som f antager på $\mathcal{E}$. Konkludér heraf, at største- og mindste-værdien af f på $\mathcal{E}$ optræder i punkter hvor $\mathbf{grad}(f)(\xi,\eta)$ er proportional med gradienten $\mathbf{grad}(g)(\xi,\eta)$ af funktionen $g(\xi,\eta)$, hvor:

$$g(\xi,\eta) = \left[\begin{array}{cc} \xi & \eta \end{array}\right] \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] \quad . \tag{12.26}$$

Kapitel 13

To fundamentale matrix-funktioner

Vi definerer to (2×2)-matricer, som viser sig at være altafgørende for krumningsberegningerne – den ene har vi allerede mødt ovenfor:

Definition 13.1 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$, være en regulær parameterfremstilling. Så definerer vi to (2×2)-matricer hørende til ethvert punkt $\boldsymbol{r}(u,v)$ på fladen, dvs. hørende til ethvert par af parameter-værdier $(u,v)\in\mathcal{U}$:

$$\mathcal{F}_I(u,v)=\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v\\ \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}E(u,v) & F(u,v)\\ F(u,v) & G(u,v)\end{array}\right]\quad, \tag{13.1}$$

og

$$\mathcal{F}_{II}(u,v)=\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{r}''_{uu}\cdot\boldsymbol{N}(u,v) & \boldsymbol{r}''_{uv}\cdot\boldsymbol{N}(u,v)\\ \boldsymbol{r}''_{vu}\cdot\boldsymbol{N}(u,v) & \boldsymbol{r}''_{vv}\cdot\boldsymbol{N}(u,v)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}L(u,v) & M(u,v)\\ M(u,v) & N(u,v)\end{array}\right]\quad, \tag{13.2}$$

hvor vi samtidig dermed har defineret 6 nye funktioner af to variable $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$, $L(u,v)$, $M(u,v)$, og $N(u,v)$. Matrix-funktionen $\mathcal{F}_I(u,v)$ kaldes som allerede nævnt første fundamentalform-matricen for $\boldsymbol{r}(u,v)$, og matrix-funktionen $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ kaldes anden fundamentalform-matricen for $\boldsymbol{r}(u,v)$.

Bemærk, at $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ begge er symmetriske matrix-funktioner på $\mathcal{U}$ – det er de fordi der gælder: $\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v=\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_u$ og $\boldsymbol{r}''_{uv}=\boldsymbol{r}''_{vu}$. (Den sidste ligning gælder altid når blot $\boldsymbol{r}(u,v)$ er passende mange gange differentiabel.)

I modsætning til $\mathcal{F}_I$ er $\mathcal{F}_{II}$ ikke nødvendigvis regulær og ikke nødvendigvis positiv definit: Vi skal nedenfor møde eksempler på flader med henholdsvis $\mathcal{F}_{II}=\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&0\end{array}\right]$ og $\mathcal{F}_{II}=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right]$.

Vi kan nu komplettere sætning 12.21 med et konkret udtryk der direkte viser den fælles normal-krumning for kurver, der i et givet punkt har proportionale tangentvektorer:

Sætning 13.2 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne en parameterfremstilling for en flade i rummet, og lad $\boldsymbol{\gamma}(t)$ betegne en kurve på fladen. Antag at $\boldsymbol{\gamma}(t)$ har urbilledet $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ i $\mathcal{U}$ således at $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t))$. Så er normalkrumningen $\kappa(t)$ for kurven på fladen givet ved følgende udtryk, som udover fladens parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(u,v)$ kun afhænger af tangentvektoren $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ repræsenteret ved tangentvektoren $\boldsymbol{\Gamma}'(t)$ til *kurvens urbillede* i $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\kappa_n(t) &= \frac{\left[\begin{array}{cc}\Gamma_1'(t) & \Gamma_2'(t)\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{II}(\boldsymbol{\Gamma}(t))\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'(t)\\ \Gamma_2'(t)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{cc}\Gamma_1'(t) & \Gamma_2'(t)\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{I}(\boldsymbol{\Gamma}(t))\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'(t)\\ \Gamma_2'(t)\end{array}\right]} \\ &= \frac{\left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}L & M\\ M & N\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'\\ \Gamma_2'\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}E & F\\ F & G\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'\\ \Gamma_2'\end{array}\right]} \quad .\end{aligned} \tag{13.3}$$

Bevis. Vi benytter det simple udtryk for normalkrumningen, som vi fandt ovenfor i sætning 12.17:

$$\kappa_n^{\gamma}(t) = \kappa_n(t) = \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2}\right)\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) \quad , \tag{13.4}$$

og vil nu bruge matricen $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ til en omskrivning af højresiden i (13.4) – igen via kædereglen. Vi har allerede fra (12.17):

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \Gamma_1'\cdot\boldsymbol{r}_u' + \Gamma_2'\cdot\boldsymbol{r}_v' \quad . \tag{13.5}$$

En ekstra differentiation med hensyn til t giver derefter:

$$\boldsymbol{\gamma}''(t) = \Gamma_1'\cdot\Gamma_1'\cdot\boldsymbol{r}_{uu}'' + \Gamma_1'\cdot\Gamma_2'\cdot\boldsymbol{r}_{uv}'' + \Gamma_2'\cdot\Gamma_1'\cdot\boldsymbol{r}_{vu}'' + \Gamma_2'\cdot\Gamma_2'\cdot\boldsymbol{r}_{vv}'' + (*_1)\cdot\boldsymbol{r}_u' + (*_2)\cdot\boldsymbol{r}_v' \quad , \tag{13.6}$$

hvor $(*_i)$ markerer udtryk, som vi ikke behøver at beregne, fordi de er faktorer på vektorerne $\boldsymbol{r}_u'$ og $\boldsymbol{r}_v'$, der begge er ortogonale på normalvektoren $\mathbf{N}$, således at de forsvinder når vi danner skalar-produkt med $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}''(t)\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N}(t) &= (\Gamma_1')^2\cdot\boldsymbol{r}_{uu}''\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N} + \Gamma_1'\cdot\Gamma_2'\cdot\boldsymbol{r}_{uv}''\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N} + \Gamma_2'\cdot\Gamma_1'\cdot\boldsymbol{r}_{vu}''\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N} + (\Gamma_2')^2\cdot\boldsymbol{r}_{vv}''\boldsymbol{\cdot}\mathbf{N} \\ &= \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1'(t) & \Gamma_2'(t)\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{II}(\boldsymbol{\Gamma}(t))\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'(t)\\ \Gamma_2'(t)\end{array}\right] \quad ,\end{aligned} \tag{13.7}$$

og da vi tidligere har beregnet – i (12.17) og (12.19):

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2 = \left[\begin{array}{cc}\Gamma_1' & \Gamma_2'\end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{I}(\boldsymbol{\Gamma}(t))\cdot\left[\begin{array}{c}\Gamma_1'\\ \Gamma_2'\end{array}\right] \quad , \tag{13.8}$$

fås udtrykket (13.3) for normalkrumningen i sætningen. □

OPGAVE 13.3

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne følgende parameterfremstilling for en cylinder-flade med cirkulært tværsnit og radius R:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R\cdot\cos(v), R\cdot\sin(v), u) \quad , \quad u\in\mathbb{R}\,,\ v\in[-\pi,\pi] \quad . \tag{13.9}$$

Lad $\boldsymbol{\gamma}(t)$ betegne den kurve på cylinderen som har urbilledet med følgende parameterfremstilling i parameter-området $\mathcal{U} = \mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$:

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) = (a\cdot t, t)\,,\ t\in[-\pi,\pi] \quad , \tag{13.10}$$

hvor $a\in\mathbb{R}$ er en fast værdi, således at

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}(t) &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Gamma}(t)) = \boldsymbol{r}(\Gamma_1(t),\Gamma_2(t)) \\ &= (R\cdot\cos(t), R\cdot\sin(t), a\cdot t) \quad .\end{aligned} \tag{13.11}$$

1. Tegn kurven $\boldsymbol{\gamma}(t)$ på fladen $\boldsymbol{r}(u,v)$ (vælg konkrete værdier for R og a) og beskriv kurven.

2. Bestem matricerne $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ for alle parameterværdier u og v.

3. Bestem normalkrumningsfunktionen $\kappa_n(t)$ for $\boldsymbol{\gamma}(t)$ for alle værdier af $t\in[-\pi,\pi]$.

OPGAVE 13.4

Lad igen $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne cylinderen med radius R:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R\cdot\cos(v), R\cdot\sin(v), u) \quad , \quad u\in\mathbb{R}\,,\ v\in[-\pi,\pi] \quad . \tag{13.12}$$

Lad nu $\boldsymbol{\gamma}_\theta(t)$ betegne den kurve på fladen, som har urbilledet:

$$\boldsymbol{\Gamma}_\theta(t) = (t\cdot\cos(\theta)\,,\ t\cdot\sin(\theta))\,,\ t\in[-\pi,\pi] \quad , \tag{13.13}$$

hvor θ betegner en vinkel i intervallet $[-\pi,\pi]$.

1. Tegn (et udvalg af) kurverne $\boldsymbol{\gamma}_\theta(t)$ på fladen $\boldsymbol{r}(u,v)$ (vælg en konkret værdi for R og nogle forskellige værdier for θ) og beskriv kurverne.

2. Bestem normalkrumningen $\kappa_n^\theta(0)$ for $\boldsymbol{\gamma}_\theta(t)$ i punktet $\boldsymbol{\gamma}_\theta(0) = \boldsymbol{r}(0,0) = (R,0,0)$ for enhver værdi af $\theta\in[-\pi,\pi]$.

3. Bestem den største værdi som $\kappa_n^\theta(0)$ antager som funktion af θ.

4. Bestem den mindste værdi som $\kappa_n^\theta(0)$ antager som funktion af θ.

5. Bestem tangentvektorerne $\boldsymbol{\Gamma}'_\theta(0)$ for *de urbilleder*, der svarer til de værdier af θ, som giver største, henholdsvis mindste, værdi af $\kappa_n^\theta(0)$.

6. Bestem tangentvektorerne $\boldsymbol{\gamma}'_\theta(0)$ for *de kurver på fladen*, der svarer til de værdier af θ, som giver største, henholdsvis mindste, værdi af $\kappa_n^\theta(0)$.

OPGAVE 13.5

Lad nu $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne følgende parameterfremstilling for forskellige graf-flader for nogle andengrads-polynomier:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}\left(a \cdot u^2 + b \cdot v^2\right)\right) \quad , \quad u \in \mathbb{R}\,,\, v \in \mathbb{R} \quad , \tag{13.14}$$

hvor a og b er faste reelle værdier. Lad $\gamma_\theta(t)$ betegne den kurve på fladen, som har urbilledet:

$$\boldsymbol{\Gamma}_\theta(t) = (t \cdot \cos(\theta)\,,\, t \cdot \sin(\theta))\,,\, t \in \mathbb{R} \quad , \tag{13.15}$$

hvor θ igen betegner en vinkel i intervallet $[-\pi, \pi]$.

1. Tegn (et udvalg af) kurverne $\gamma_\theta(t)$ på fladen $\boldsymbol{r}(u,v)$ (vælg konkrete værdier af a og b) og beskriv kurverne.

2. Bestem normalkrumningen $\kappa_n^\theta(0)$ for $\gamma_\theta(t)$ i punktet $\gamma_\theta(0) = \boldsymbol{r}(0,0) = (0,0,0)$ for enhver værdi af $\theta \in [-\pi, \pi]$.

3. Bestem den største værdi som $\kappa_n^\theta(0)$ antager som funktion af θ (størsteværdien udtrykkes ved a og/eller b).

4. Bestem den mindste værdi som $\kappa_n^\theta(0)$ antager som funktion af θ (mindsteværdien udtrykkes ved ved a og/eller b).

5. Bestem tangentvektorerne $\boldsymbol{\Gamma}_\theta'(0)$ for *de urbilleder* i $\mathcal{U}$, der svarer til de værdier af θ, som giver største, henholdsvis mindste, værdi af $\kappa_n^\theta(0)$.

6. Bestem tangentvektorerne $\gamma_\theta'(0)$ for *de kurver på fladen*, der svarer til de værdier af θ, som giver største, henholdsvis mindste, værdi af $\kappa_n^\theta(0)$.

13.1 Principale krumninger og principale retninger

Spørgsmålet om at bestemme maksimum og minimum for normalkrumningerne κ_n for kurverne igennem et givet punkt på en given flade – som i opgaverne 13.4 og 13.5 – vil vi nu løse meget smartere på en anden måde, nemlig som et egenværdi-problem i lighed med de bestemmelser af maksima og minima for funktioner af to variable som er behandlet i de indledende matematik-kurser. Som illustreret i opgaverne ovenfor er vi også interesserede i at bestemme de retninger (de tangentvektorer) der giver maksimale og minimale normalkrumninger. Det er naturligt at forvente, at de retninger må svare til de egenvektorer der optræder ved løsning af det nævnte egenværdiproblem. Det er præcis indholdet af sætning 13.7 nedenfor, som vi nu varmer op til:

13.1.1 Opvarmning til hovedsætning 13.7

Lad $p = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ betegne et punkt på en flade med parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}$ og lad $\mathcal{F}_I(u_0, v_0)$ og $\mathcal{F}_{II}(u_0, v_0)$ betegne de to tilhørede fundamentalform-matricer. Lad nu (ξ, η) betegne en vilkårlig vektor med fodpunktet $\widehat{p} = (u_0, v_0)$ i parameter-området $\mathcal{U}$ for parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}$. Så kan vi betragte (ξ, η) som tangentvektor for en kurve $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ i $\mathcal{U}$ som er urbilledet af en kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ på den parametriserede flade med $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = p$ altså $(\xi, \eta) = (\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$. Enhver kurve, hvis urbillede har en tangentvektor som er proportional med (ξ, η) har så samme normalkrumning i punktet p på fladen, nemlig:

$$\begin{aligned} \kappa_n(t_0) = k(\xi, \eta) &= \frac{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \mathcal{F}_{II}(u_0, v_0) \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \mathcal{F}_I(u_0, v_0) \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}} \quad . \end{aligned} \tag{13.16}$$

Funktionen $k(\xi, \eta)$ kan altså udtrykkes som forholdet mellem to kvadratiske funktioner af ξ og η:

$$k(\xi, \eta) = \frac{L \cdot \xi^2 + 2 \cdot M \cdot \xi \cdot \eta + N \cdot \eta^2}{E \cdot \xi^2 + 2 \cdot F \cdot \xi \cdot \eta + G \cdot \eta^2} \quad , \tag{13.17}$$

hvor vi her bruger de korte betegnelser E, F, G og L, M, N for elementerne i de to symmetriske matricer $\mathcal{F}_I$ og $\mathcal{F}_{II}$ henholdsvis. Som nævnt – og som det ses igen – giver to proportionale tangentvektorer samme normalkrumning:

$$k(q \cdot \xi, q \cdot \eta) = k(\xi, \eta) \quad \text{for alle } q \neq 0. \tag{13.18}$$

Vi undersøger derfor værdierne af $k(\xi, \eta)$ på den ellipse, der har ligningen:

$$\mathcal{E} \quad : \quad E \cdot \xi^2 + 2 \cdot F \cdot \xi \cdot \eta + G \cdot \eta^2 = 1 \quad , \tag{13.19}$$

Det svarer altså til at finde $k(\xi, \eta)$ for alle *enhedsvektorer* $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ (med fodpunkt p) for kurver på fladen, jvf. opgave 12.26. Værdien af andengradspolynomiet $L \cdot \xi^2 + 2 \cdot M \cdot \xi \cdot \eta + N \cdot \eta^2$ på den ellipse er dernæst størst henholdsvis mindst netop for de (ξ, η) hvor gradienterne af de to polynomier er proportionale (jvf. opgave12.27):

$$\mathbf{grad}(L \cdot \xi^2 + 2 \cdot M \cdot \xi \cdot \eta + N \cdot \eta^2) = \lambda \cdot \mathbf{grad}(E \cdot \xi^2 + 2 \cdot F \cdot \xi \cdot \eta + G \cdot \eta^2) \quad , \tag{13.20}$$

som svarer til:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \xi \cdot L + 2 \cdot \eta \cdot M &= \lambda \cdot (2 \cdot \xi \cdot E + 2 \cdot \eta \cdot F) \\ 2 \cdot \xi \cdot M + 2 \cdot \eta \cdot N &= \lambda \cdot (2 \cdot \xi \cdot F + 2 \cdot \eta \cdot G) \quad , \end{aligned} \tag{13.21}$$

eller på matrix-form:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} L-\lambda\cdot E & M-\lambda\cdot F \\ M-\lambda\cdot F & N-\lambda\cdot G \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \\
\left(\left[\begin{array}{cc} L & M \\ M & N \end{array}\right]-\lambda\cdot\left[\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right]\right)\cdot\left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{13.22}$$

Det betyder præcis at de ekstreme værdier (maksimum og minimum) for $k(\xi,\eta)$ opnås ved at bruge egenvektorer (ξ,η) hørende til egenværdiproblemet:

$$(\mathcal{F}_{II}-\lambda\cdot\mathcal{F}_{I})\cdot\left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \quad . \tag{13.23}$$

De to egenværdier for dette egenværdiproblem kalder vi henholdsvis κ_1 og κ_2 og ordner dem således at $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

Hvis vi antager, at $\kappa_1 > \kappa_2$ så findes der præcis to modsatrettede egenvektorer $\pm(\xi_1,\eta_1)$ hørende til κ_1 og $\pm(\xi_2,\eta_2)$ hørende til κ_2 således at alle 4 egenvektorer tilfredsstiller ligningen (13.19), dvs. således at alle disse 4 egenvektorer i $\mathcal{U}$ svarer til enhedsvektorer på fladen.

Vi indsætter de 4 egenvektorer i (13.23) og får følgende – for $\pm(\xi_1,\eta_1)$:

$$\left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{II}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] = \kappa_1\cdot\left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{I}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] = \kappa_1 \quad , \tag{13.24}$$

og tilsvarende for $\pm(\xi_2,\eta_2)$:

$$\left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{II}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] = \kappa_2\cdot\left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right]\cdot\mathcal{F}_{I}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] = \kappa_2 \quad . \tag{13.25}$$

Vi har altså at $k(\xi_1,\eta_1) = \kappa_1$ og $k(\xi_2,\eta_2) = \kappa_2$ og konkluderer, at den maksimale værdi for $k(\xi,\eta)$ netop er egenværdien κ_1 og den fås for vektorerne $\pm(\xi_1,\eta_1)$. Den minimale værdi for $k(\xi,\eta)$ er tilsvarende egenværdien κ_2 og den værdi fås for vektorerne $\pm(\xi_2,\eta_2)$.

Påstand: de to egenvektorer $\mathbf{\Gamma}_1' = (\xi_1,\eta_1)$ og $\mathbf{\Gamma}_2' = (\xi_2,\eta_2)$ i parameterområdet svarer til ortogonale enheds-tangentvektorer γ_1' og γ_2' *på fladen* med den givne parameterfremstilling når vi stadig antager at $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Det kan vi indse ved at betragte skalarproduktet:

$$\kappa_2\cdot\gamma_1'\cdot\gamma_2' = \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right]\cdot\kappa_2\cdot\mathcal{F}_{I}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right]\mathcal{F}_{II}\cdot\left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] \quad , \tag{13.26}$$

og tilsvarende

$$\kappa_1 \cdot \gamma_2' \cdot \gamma_1' = \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right] \cdot \kappa_1 \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right] \mathcal{F}_{II} \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] \quad . \tag{13.27}$$

Da $\mathcal{F}_{II}$ er symmetrisk får vi ved subtraktion af ligning (13.27) fra ligning (13.26) at

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \cdot \gamma_2' \cdot \gamma_1' = 0 \quad . \tag{13.28}$$

Det vil sige at $\gamma_2' \cdot \gamma_1' = 0$ når blot $\kappa_1 - \kappa_2 \neq 0$:

$$\gamma_2' \cdot \gamma_1' = \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right] \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right] \mathcal{F}_{II} \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] = 0 \quad , \tag{13.29}$$

og

$$\gamma_1' \cdot \gamma_2' = \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right] \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right] \mathcal{F}_{II} \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right] = 0 \quad . \tag{13.30}$$

Altså fås ortogonalitet mellem de to enhedsvektorer γ_1' og γ_2'. Disse to vektorer udgør derfor en basis i tangentplanen til den givne flade i punktet p.

Bemærk, at i ovenstående kunne vi lige så godt have valgt et andet par af egenvektorer blandt $\pm(\xi_1, \eta_1)$ og $\pm(\xi_2, \eta_2)$ således at tilsvarende valg af fortegn på γ_1' og γ_2' , altså $\pm\gamma_1'$ og $\pm\gamma_2'$ også ville fremkomme som ortogonale enhedsvektorer i tangentplanen til fladen i p. Blandt de ialt 4 valgmuligheder for en basis i tangentplanen er netop to af dem orienterede sådan at krydsproduktet af de valgte basisvektorer giver normalvektoren **N** til fladen i punktet p.

Da matricen $\mathcal{F}_I$ altid er regulær (faktisk positiv definit – se opgave 12.25) overalt (på grund af antagelsen om, at den givne parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(u,v)$ er regulær), så kan vi gange med den inverse matrix $\mathcal{F}_I$ på begge sider af egenværdi-ligningen (13.23) og får den ækvivalente ligning:

$$(\mathcal{F}_I^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II} - \lambda \cdot \boldsymbol{E}) \cdot \left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \quad . \tag{13.31}$$

Det vil sige, at med $\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II}$ får vi følgende ækvivalente egenværdi-problem for $\mathcal{W}$ på helt sædvanlig form:

$$(\mathcal{W} - \lambda \cdot \boldsymbol{E}) \cdot \left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \quad . \tag{13.32}$$

Bemærk dog, at $\mathcal{W}$ ikke nødvendigvis er symmetrisk, men at den alligevel med garanti har de to egenværdier κ_1 og κ_2 som fundet ovenfor. Matricen $\mathcal{W}$ kan derfor diagonaliseres ved koordinatskift med egenvektorerne (ξ_1, η_1) og (ξ_2, η_2) til en diagonalmatrix med disse egenværdier i diagonalen.

Definition 13.6 Matricen $\mathcal{W}(u,v) = \mathcal{F}_I^{-1}(u,v) \cdot \mathcal{F}_{II}(u,v)$ kaldes Weingarten matricen for den givne parametriserede flade $\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U}$.

Vi kan nu samle alle observationerne i følgende sætning:

Sætning 13.7 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U}$, være en parameterfremstilling for en regulær flade i rummet og lad $\mathcal{W}(u,v)$ betegne fladens Weingarten-matrix som en matrix-funktion af $(u,v) \in \mathcal{U}$. Lad $p = r(u_0,v_0)$ betegne et punkt på fladen svarende til punktet $\widehat{p} = (u_0,v_0)$ i $\mathcal{U}$.

Matricen $\mathcal{W}(u_0,v_0)$ har to relle egenværdier $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Disse egenværdier kaldes de principale krumninger af fladen i punktet p.

Hvis $\kappa_1 > \kappa_2$ findes der tilsvarende egenvektorer $\pm\widehat{\boldsymbol{e}}_1 = \pm(\xi_1,\eta_1)$ hørende til egenværdien κ_1 og $\pm\widehat{\boldsymbol{e}}_2 = \pm(\xi_2,\eta_2)$ hørende til egenværdien κ_2, som vil svare til ortogonale vektorer $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ i tangentplanen til fladen i punktet p således:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \pm(\xi_1 \cdot \boldsymbol{r}'_u(u_0,v_0) + \eta_1 \cdot \boldsymbol{r}'_v(u_0,v_0)) \\ \boldsymbol{e}_2 &= \pm(\xi_2 \cdot \boldsymbol{r}'_u(u_0,v_0) + \eta_2 \cdot \boldsymbol{r}'_v(u_0,v_0)) \end{aligned} \tag{13.33}$$

med følgende egenskaber (efter en eventuel normering, i.e. division med de respektive længder):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= 1 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 1 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{13.34}$$

Hvis $\kappa_1 = \kappa_2$ er alle vektorer (med fodpunkt i $\widehat{p}$ i $\mathcal{U}$) egenvektorer for Weingarten matricen $\mathcal{W}(u_0,v_0)$ og blandt dem er det selvfølgelig igen muligt (og altså meget lettere) at bestemme to vektorer $\widehat{\boldsymbol{e}}_1 = (\xi_1,\eta_1)$ og $\widehat{\boldsymbol{e}}_2 = (\xi_2,\eta_2)$ som svarer til ortogonale enheds-vektorer $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ som ovenfor.

De derved bestemte vektorer $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ kaldes principale retninger for fladen i punktet p. Bemærk, at hvis $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ er principale retninger, så er $-\boldsymbol{e}_1$ og $-\boldsymbol{e}_2$ også principale retninger.

Hvis $\kappa_1 = \kappa_2$, så er alle retninger (alle enhedsvektorer) principale retninger og p kaldes i så fald et navlepunkt på fladen.

De principale krumninger κ_1 og κ_2 er maksimum, henholdsvis minimum, for normalkrumnings-funktionen:

$$k(\xi,\eta) = \frac{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \mathcal{F}_{II}(u_0,v_0) \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \mathcal{F}_{I}(u_0,v_0) \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}} \quad , \tag{13.35}$$

hvor (ξ, η) gennemløber alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ med fodpunkt i $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$.

Vi vil nu gennemgå et eksempel på bestemmelse af de ingredienser, som optræder i sætning 13.7:

Eksempel 13.8

Lad $\boldsymbol{r}$ være følgende parameterfremstilling for en andengrads-flade i rummet, jvf. opgave 13.5:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}\left(a \cdot u^2 + b \cdot v^2\right)\right) \quad , \quad u \in \mathbb{R}\,,\ v \in \mathbb{R} \quad , \tag{13.36}$$

hvor a og b er faste reelle værdier. Vi ønsker at finde de principale krumninger og de principale retninger i punktet $\boldsymbol{r}(0,0) = (0,0,0)$ for fladen og beregner derfor følgende ingredienser til det formål:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (1, 0, a \cdot u) \\
\boldsymbol{r}'_v(u,v) &= (0, 1, b \cdot v) \\
\boldsymbol{r}'_u(0,0) &= (1,0,0) \\
\boldsymbol{r}'_v(0,0) &= (0,1,0) \\
\boldsymbol{r}''_{uu}(0,0) &= (0,0,a) \\
\boldsymbol{r}''_{uv}(0,0) &= (0,0,0) \\
\boldsymbol{r}''_{vv}(0,0) &= (0,0,b) \\
\mathbf{N}(0,0) &= (0,0,1)
\end{aligned} \tag{13.37}$$

og heraf:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_I(0,0) &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathcal{F}_{II}(0,0) &= \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
\mathcal{W}(0,0) &= \mathcal{F}_I^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
\kappa_1 &= a \\
\kappa_2 &= b \\
\widehat{\boldsymbol{e}}_1 &= (\xi_1, \eta_1) = \pm(1,0) \quad \text{(vi vælger } +(1,0)) \\
\widehat{\boldsymbol{e}}_2 &= (\xi_2, \eta_2) = \pm(0,1) \quad \text{(vi vælger } +(0,1)) \quad .
\end{aligned} \tag{13.38}$$

Med de *valg af fortegn* får vi derefter:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \xi_1 \cdot \boldsymbol{r}'_u + \eta_1 \cdot \boldsymbol{r}'_v = (1,0,0) \\
\boldsymbol{e}_2 &= \xi_2 \cdot \boldsymbol{r}'_u + \eta_2 \cdot \boldsymbol{r}'_v = (0,1,0)
\end{aligned} \tag{13.39}$$

Eksempel 13.9

Lad $\boldsymbol{r}$ være samme parameterfremstilling som ovenfor i eksempel 13.8. Til sammenligning med resultaterne i det eksempel beregner vi her *nogle* af udtrykkene i et *vilkårligt punkt* $\boldsymbol{r}(u,v)$ på fladen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (1,0,a\cdot u) \\ \boldsymbol{r}'_v(u,v) &= (0,1,b\cdot v) \\ \boldsymbol{r}''_{uu}(u,v) &= (0,0,a) \\ \boldsymbol{r}''_{uv}(u,v) &= (0,0,0) \\ \boldsymbol{r}''_{vv}(u,v) &= (0,0,b) \\ \mathbf{N}(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cdot u^2+b^2\cdot v^2}}\cdot(-a\cdot u,-b\cdot v,1) \quad , \end{aligned} \tag{13.40}$$

således at

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(u,v) &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2\cdot u^2 & a\cdot b\cdot u\cdot v \\ a\cdot b\cdot u\cdot v & 1+b^2\cdot v^2 \end{bmatrix} \\ \mathcal{F}_{II}(u,v) &= \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2\cdot u^2+b^2\cdot v^2}}\right)\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ \mathcal{W}(u,v) &= \mathcal{F}_I^{-1}\cdot\mathcal{F}_{II} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2\cdot u^2+b^2\cdot v^2}}\right)\cdot\begin{bmatrix} a(1+b^2\cdot v^2) & -a\cdot b^2\cdot u\cdot v \\ -b\cdot a^2\cdot u\cdot v & b(1+a^2\cdot u^2) \end{bmatrix} \\ \kappa_1\cdot\kappa_2 &= \frac{a\cdot b}{(1+a^2\cdot u^2+b^2\cdot v^2)^2} \\ \kappa_1+\kappa_2 &= \frac{a+b+a^2\cdot b\cdot u^2+b^2\cdot a\cdot v^2}{(1+a^2\cdot u^2+b^2\cdot v^2)^{3/2}} \quad . \end{aligned} \tag{13.41}$$

OPGAVE 13.10

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne følgende parameterfremstilling for cylinderfladen med cirkulært tværsnit med radius R, se opgave 12.20:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R\cdot\cos(v), R\cdot\sin(v), u) \quad , \quad u\in\mathbb{R}\,,\ v\in[-\pi,\pi] \quad . \tag{13.42}$$

1. Parameterfremstillingen giver et normalvektorfelt $\mathbf{N}$ via ligning (12.5). Er denne normalvektor udadrettet i forhold til cylinderfladen?

2. Bestem alle værdierne $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_1(u,v)$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_2(u,v)$, $\boldsymbol{e}_1(u,v)$, og $\boldsymbol{e}_2(u,v)$ for ethvert punkt (u,v) i parameterområdet således at $\boldsymbol{e}_1(u,v)\times\boldsymbol{e}_2(u,v) = \mathbf{N}(u,v)$. (Bemærk, at der er stadig to muligheder for valget af (fortegn for) de to vektorer $\boldsymbol{e}_1(u,v)$, og $\boldsymbol{e}_2(u,v)$.)

3. Sammenlign de fundne værdier af $\kappa_1(u,v)$ og $\kappa_2(u,v)$ med resultaterne i opgave 12.20.

OPGAVE 13.11

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne følgende parameterfremstilling for kuglefladen med radius R, se 12.19:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), R \cdot \cos(u) \cdot \sin(v), R \cdot \sin(u)) \quad , \quad u \in [-\pi/2, \pi/2] \quad , \quad v \in [-\pi, \pi] \tag{13.43}$$

1. Parameterfremstillingen giver et normalvektorfelt $\mathbf{N}$ på fladen via ligning (12.5). Er denne normalvektor udadrettet i forhold til kuglefladen?

2. Bestem værdierne af $\kappa_1(u,v)$, $\kappa_2(u,v)$, og vælg $\widehat{e}_1(u,v)$ og $\widehat{e}_2(u,v)$ således at $\boldsymbol{e}_1(u,v)$, og $\boldsymbol{e}_2(u,v)$ tilfredsstiller $\boldsymbol{e}_1(u,v) \times \boldsymbol{e}_2(u,v) = \mathbf{N}(u,v)$. (Bemærk, at der her er uendelig mange muligheder for valget af vektorerne $\boldsymbol{e}_1(u,v)$, og $\boldsymbol{e}_2(u,v)$.)

3. Sammenlign de fundne værdier af $\kappa_1(u,v)$ og $\kappa_2(u,v)$ med resultaterne i opgave 12.20.

Eksempel 13.12

En graf-flade er som tidligere nævnt givet ved en parameterfremstilling således (se også eksemplerne 13.8 og 13.9):

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad , \quad u \in \mathbb{R}\, ,\, v \in \mathbb{R} \quad , \tag{13.44}$$

Vi antager, at f er en funktion med $f'_u(0,0) = 0$ og $f'_v(0,0) = 0$, således at $(0,0)$ er et stationært punkt for f. Så er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (1, 0, f'_u(u,v)) \\
\boldsymbol{r}'_v(u,v) &= (0, 1, f'_v(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{uu}(u,v) &= (0, 0, f''_{uu}(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{uv}(u,v) &= (0, 0, f''_{uv}(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{vv}(u,v) &= (0, 0, f''_{vv}(u,v)) \\
\boldsymbol{r}'_u(0,0) \times \boldsymbol{r}'_v(0,0) &= (-f'_u(0,0), -f'_v(0,0), 1) = (0,0,1) \\
\mathbf{N}(0,0) &= (0,0,1) \\
\mathcal{F}_I(0,0) &= \begin{bmatrix} 1 + (f'_u(0,0))^2 & f'_u(0,0) \cdot f'_v(0,0) \\ f'_u(0,0) \cdot f'_v(0,0) & 1 + (f'_v(0,0))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathcal{F}_{II}(0,0) &= \begin{bmatrix} f''_{uu}(0,0) & f''_{uv}(0,0) \\ f''_{uv}(0,0) & f''_{vv}(0,0) \end{bmatrix} \\
\mathcal{W}(0,0) &= \mathcal{F}_I^{-1}(0,0) \cdot \mathcal{F}_{II}(0,0) = \begin{bmatrix} f''_{uu}(0,0) & f''_{uv}(0,0) \\ f''_{uv}(0,0) & f''_{vv}(0,0) \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{13.45}$$

13.2 Euler's sætning

En geometrisk informativ og yderst værdifuld præsentation af de principale krumninger og de principale retninger for en flade formuleres i Euler's sætning, som vi nu kan bevise:

Sætning 13.13 Vælg en basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ bestående af to principale retninger i tangentplanen til fladen i punktet p. Lad $\phi = \phi(\boldsymbol{v})$ betegne vinklen mellem en vektor $\boldsymbol{v}$ og den første principale retning $\boldsymbol{e}_1$ i punktet p på fladen, dvs. $\phi = \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)$. Så kan normalkrumningen af fladen i p i retningen givet ved $\boldsymbol{v}$ bestemmes således:

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\phi) = \kappa_1 \cdot \cos^2(\phi) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\phi) \quad . \tag{13.46}$$

Bevis. Vi kan uden tab af generalitet antage, at vektoren $\boldsymbol{v}$ i tangentplanen til fladen i punktet p er en *enhedsvektor*. Vi lader så følgende vektor betegne 'urbilledet' af $\boldsymbol{v}$ med fodpunkt i $\widehat{p}$ i $\mathcal{U}$):

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{v}} &= (\xi, \eta) = \cos(\phi) \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin(\phi) \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_2 \\ &= \cos(\phi) \cdot (\xi_1, \eta_1) + \sin(\phi) \cdot (\xi_2, \eta_2) \quad ,\end{aligned} \tag{13.47}$$

hvor (ξ_1, η_1) og (ξ_2, η_2) stadig betegner de egenvektorer til $\mathcal{W}$ som svarer til de ortogonale enheds-tangentvektorer $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ til fladen i punktet p.

Så svarer $\widehat{\boldsymbol{v}}$ til $\boldsymbol{v}$ og vinklen $\phi = \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)$ er som den skal være:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \left(\cos(\phi) \cdot \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right] + \sin(\phi) \cdot \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right]\right) \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] \\ &= \cos(\phi) \cdot 1 + \sin(\phi) \cdot 0 \\ &= \cos(\phi) \quad .\end{aligned} \tag{13.48}$$

Den til $\boldsymbol{v}$ svarende normalkrumning fås således som funktion af ϕ:

$$\begin{aligned}k(\xi, \eta) &= \left(\cos(\phi) \cdot \left[\begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \end{array}\right] + \sin(\phi) \cdot \left[\begin{array}{cc} \xi_2 & \eta_2 \end{array}\right]\right) \cdot \mathcal{F}_{II} \cdot \left(\cos(\phi) \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right] + \sin(\phi) \cdot \left[\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right]\right) \\ &= \kappa_1 \cdot \cos^2(\phi) + 0 + 0 + \kappa_2 \cdot \sin^2(\phi) \quad ,\end{aligned} \tag{13.49}$$

og det var det, vi skulle indse. □

OPGAVE 13.14

Udfyld alle detaljerne i den udregning, der ligger bag ovenstående ligning (13.49). Vink: Brug (13.24) og (13.25) samt ortogonaliteten fra (13.29) og (13.30).

Kapitel 14

Gauss-krumningen og middelkrumningen

Som vi har set ovenfor er de to principale krumninger nu veldefinerede funktioner $\kappa_1(u,v)$ og $\kappa_2(u,v)$ på enhver given flade – de er funktioner af (u,v) i parameterområdet $\mathcal{U}$. Ud fra disse to funktioner vil vi nu definere to andre funktioner som tilsammen indeholder præcis samme information som de principale krumninger: Gauss krumningen $K(u,v)$ og middelkrumningen $H(u,v)$:

Definition 14.1 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne en parameterfremstilling for en flade og lad $\kappa_1(u,v)$ og $\kappa_2(u,v)$ være de tilhørende to principale krumningsfunktioner. Så defineres Gauss krumningen $K(u,v)$ og middelkrumningen $H(u,v)$ således:

$$
\begin{aligned}
K(u,v) &= \kappa_1(u,v) \cdot \kappa_2(u,v) \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} \\
H(u,v) &= \frac{\kappa_1(u,v) + \kappa_2(u,v)}{2} \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad .
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

Bemærk, at hvis vi havde valgt en parametrisering med modsatrettet normalvektorfelt – i forhold til det felt **N** som er givet ved den givne parametrisering – så ville $H(u,v)$ skifte fortegn (fordi normalkrumningerne afhænger af retningen af **N**), mens $K(u,v)$ ville være uændret!

Som nævnt indeholder K og H tilsammen præcis samme information som κ_1 og κ_2 tilsammen:

Sætning 14.2 Hvis vi kender K og H så fås κ_1 og κ_2 som rødderne i ligningen

$$
x^2 + 2 \cdot H \cdot x + K = 0 \quad . \tag{14.2}
$$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2\cdot H \pm \sqrt{4\cdot H^2 - 4\cdot K}}{2} \\
&= \frac{2\cdot H \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\cdot\kappa_1\cdot\kappa_2 - 4\cdot\kappa_1\cdot\kappa_2}}{2} \\
&= \frac{2\cdot H \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\cdot\kappa_1\cdot\kappa_2}}{2} \\
&= \frac{2\cdot H \pm \sqrt{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}}{2} \\
&= \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) \pm (\kappa_1 - \kappa_2)}{2} \\
&= \begin{cases} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{cases} \quad .
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

□

Sætning 14.3 Der er følgende simple vej fra Weingarten-matricen $\mathcal{W}$ til Gauss-krumning og middelkrumning:

$$
\begin{aligned}
K &= \mathrm{Det}(\mathcal{W}) = \mathrm{Det}(\mathcal{F}_I^{-1}\cdot\mathcal{F}_{II}) = \mathrm{Det}(\mathcal{F}_I)^{-1}\cdot\mathrm{Det}(\mathcal{F}_{II}) \\
H &= \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{Spor}(\mathcal{W}) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{Spor}(\mathcal{F}_I^{-1}\cdot\mathcal{F}_{II}) \quad .
\end{aligned}
\tag{14.4}
$$

Bevis. Det er et fundamentalt resultat i lineær algebra, at både determinanten og sporet af en lineær afbildnings matrix er uafhængige af den benyttede basis. Det vil sige, at diagonalelementerne κ_1 og κ_2 i diagonaliseringen af $\mathcal{W}$ giver direkte $\mathrm{Det}(\mathcal{W}) = \kappa_1\cdot\kappa_2$ og $\mathrm{Spor}(\mathcal{W}) = \kappa_1 + \kappa_2$ og dermed sætningen. □

Via de to sætninger 14.2 og 14.3 kan vi altså nu bestemme de principale krumninger ved først at finde K og H som henholdsvis determinant og halve spor af $\mathcal{W}$ uden egentlig at løse egenværdi-problemet 13.32.

Ved at benytte de individuelle elementfunktioner E, F, og G i $\mathcal{F}_I$ og de enkelte elementfunktioner L, M, og N i $\mathcal{F}_{II}$ har vi nu følgende direkte udtryk for Gauss-krumningen og middelkrumningen – og dermed også de principale krumninger κ_1 og κ_2 via sætning 14.2 – af en given flade i et vilkårligt punkt på fladen:

Sætning 14.4

$$K(u,v) = \frac{L(u,v)\cdot N(u,v) - M^2(u,v)}{E(u,v)\cdot G(u,v) - F^2(u,v)} = \frac{L\cdot N - M^2}{E\cdot G - F^2} \quad ,$$

$$H(u,v) = \frac{L(u,v)\cdot G(u,v) - 2\cdot M(u,v)\cdot F(u,v) + N(u,v)\cdot E(u,v)}{2\cdot(E(u,v)\cdot G(u,v) - F^2(u,v))} = \frac{L\cdot G - 2\cdot M\cdot F + N\cdot E}{2\cdot(E\cdot G - F^2)} \quad . \tag{14.5}$$

OPGAVE 14.5

Vis, at (14.4) giver de eksplicitte formler i sætning 14.4 ud fra elementfunktionerne i $\mathcal{F}_I$ og $\mathcal{F}_{II}$ direkte fra definition 13.1.

OPGAVE 14.6

Find de to fundamentale matrix-funktioner $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ for hver enkelt af de regulære flader i eksempel 12.3, og beregn i hvert enkelt tilfælde de to funktioner $K(u,v)$ og $H(u,v)$.

Definition 14.7

Et punkt $p = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ på en flade med parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(u,v)$ kaldes et

- Elliptisk punkt hvis $K(u_0,v_0) > 0$
- Hyperbolsk punkt hvis $K(u_0,v_0) < 0$
- Parabolsk punkt hvis $K(u_0,v_0) = 0$ og $H(u_0,v_0) \neq 0$
- Planpunkt hvis $K(u_0,v_0) = 0$ og $H(u_0,v_0) = 0$
- Navlepunkt hvis $H^2(u_0,v_0) = K(u_0,v_0)$.

OPGAVE 14.8

Beskriv de enkelte betingelser for betegnelserne i definition 14.7 udelukkende ved brug af de principale krumninger $\kappa_1(u_0,v_0)$ og $\kappa_2(u_0,v_0)$.

Bemærk, at ethvert planpunkt er et navlepunkt, men ikke omvendt. Og at ethvert navlepunkt er et elliptisk punkt, men ikke omvendt.

OPGAVE 14.9

Bestem typen i henhold til definition 14.7 af ethvert punkt på enhver af fladerne i eksempel 12.3.

Betegnelsen *middel*-krumning er allerede motiveret - i og med at H er middeltallet mellem κ_1 og κ_2. Derudover kan vi motivere betegnelsen endnu mere med følgende observation:

Sætning 14.10 Middelkrumningen H af en flade i et givet punkt er middelværdien af alle normalkrumningerne i punktet:

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_n(\phi)\,d\phi \quad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \kappa_n(\phi)\,d\phi \quad . \tag{14.6}$$

Bevis. Vi ved, at

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\,d\phi = 2\pi \tag{14.7}$$

og at

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\,d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi)\,d\phi \quad , \tag{14.8}$$

sådan at begge de sidste integraler må være π. Indsættes nu den værdi for integralerne i (14.6) (efter at integranden er udtrykt ved Eulers sætning 13.13) får vi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_n(\phi)\,d\phi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_1 \cdot \cos^2(\phi) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}(\kappa_1 \cdot \pi + \kappa_2 \cdot \pi) \\ &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \\ &= H \quad . \end{aligned} \tag{14.9}$$

□

Ved bestemmelse af middelkrumninger er det dog ikke nødvendigt at kende κ_1 og κ_2:

Sætning 14.11 Middelkrumningen H er den halve sum af normalkrumningerne i to vilkårlige ortogonale retninger. For enhver fast vinkel ϕ_0 gælder nemlig:

$$H = \frac{1}{2}\left(\kappa_n(\phi_0) + \kappa_n\left(\phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad . \tag{14.10}$$

Bevis. Vi ved, at

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\phi_0+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2(\phi_0)\\ \sin^2\left(\phi_0+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos^2(\phi_0)\end{aligned} \tag{14.11}$$

Indsættes nu i påstanden (14.10) får vi ved igen at bruge Eulers sætning 13.13:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\kappa_n(\phi_0)+\kappa_n\left(\phi_0+\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\kappa_1\left(\cos^2(\phi_0)+\sin^2(\phi_0)\right)+\kappa_2\left(\cos^2(\phi_0)+\sin^2(\phi_0)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\kappa_1+\kappa_2\right) \quad ,\end{aligned} \tag{14.12}$$

så pengene passer. □

14.1 Omdrejningsflader

Eksempel 14.12

Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$ betegne følgende parameterfremstilling for en torus $\mathcal{T}_{a,b}$ med indre radius a og ydre radius $a+b$, $a>b>0$:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left((a+b\cdot\cos(u))\cdot\cos(v)\,,\;(a+b\cdot\cos(u))\cdot\sin(v)\,,\;b\cdot\sin(u)\right) \quad , \tag{14.13}$$

hvor $u\in[-\pi,\pi]$, $v\in[-\pi,\pi]$. Torussen er et eksempel på en såkaldt omdrejningsflade – se flere og mere generelle betragtninger om omdrejningsflader nedenfor – og vi kan beregne krumningerne i ethvert punkt $\boldsymbol{r}(u,v)$ på $\mathcal{T}_{a,b}$ således:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (-b\cdot\sin(u)\cdot\cos(v),-b\cdot\sin(u)\cdot\sin(v),b\cdot\cos(v))\\ \boldsymbol{r}'_v(u,v) &= (-(a+b\cdot\cos(u))\cdot\sin(v),(a+b\cdot\cos(u))\cdot\cos(v),0)\\ \boldsymbol{r}''_{uu}(u,v) &= (-b\cdot\cos(u)\cdot\cos(v),-b\cdot\cos(u)\cdot\sin(v)-b\cdot\sin(u))\\ \boldsymbol{r}''_{uv}(u,v) &= (b\cdot\sin(u)\cdot\sin(v),-b\cdot\sin(u)\cdot\cos(v),0)\\ \boldsymbol{r}''_{vv}(u,v) &= (-(a+b\cdot\cos(u))\cdot\cos(v),-(a+b\cdot\cos(u))\cdot\sin(v),0)\\ \boldsymbol{N}(u,v) &= (-\cos(u)\cdot\cos(v),-\cos(u)\cdot\sin(v),-\sin(u)) \quad ,\end{aligned} \tag{14.14}$$

sådan at vi derefter har:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I(u,v) &= \begin{bmatrix} b^2 & 0\\ 0 & (a+b\cdot\cos(u))^2\end{bmatrix}\\ \mathcal{F}_{II}(u,v) &= \begin{bmatrix} b & 0\\ 0 & (a+b\cdot\cos(u))\cdot\cos(u)\end{bmatrix}\\ \mathcal{W}(u,v) &= \mathcal{F}_I^{-1}(u,v)\cdot\mathcal{F}_{II}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0\\ 0 & \frac{\cos(u)}{a+b\cdot\cos(u)}\end{bmatrix}\\ K(u,v) &= \frac{\cos(u)}{b\cdot(a+b\cdot\cos(u))}\\ H(u,v) &= \frac{a+2\cdot b\cdot\cos(u)}{2\cdot b\cdot(a+b\cdot\cos(u))} \quad .\end{aligned} \tag{14.15}$$

OPGAVE 14.13

I forlængelse af eksempel 14.12 betragter vi her den torus $\mathcal{T}_{2,1}$, der har $a = 2$ og $b = 1$.

1. Plot den torus.
2. Bestem de elliptiske punkter på $\mathcal{T}_{2,1}$ – hvilke punkter svarer de til i parameterområdet $\mathcal{U} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$?
3. Bestem de hyperbolske punkter på $\mathcal{T}_{2,1}$ – hvilke punkter svarer de til i parameterområdet $\mathcal{U} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$?
4. Bestem de parabolske punkter på $\mathcal{T}_{2,1}$ – hvilke punkter svarer de til i parameterområdet $\mathcal{U} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$?
5. Findes der navlepunkter på $\mathcal{T}_{2,1}$?

OPGAVE 14.14

Igen i forlængelse af eksempel 14.12 med torussen $\mathcal{T}_{a,b}$: Lad (u_0, v_0) være et punkt i $\mathcal{U}$, lad $p = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$, og lad $\boldsymbol{\gamma}(t)$ og $\boldsymbol{\lambda}(w)$ betegne følgende kurver igennem punktet p på $\mathcal{T}_{a,b}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(t) &= \boldsymbol{r}(t + u_0, v_0) \quad , \quad t + u_0 \in [-\pi, \pi] \\ \boldsymbol{\lambda}(w) &= \boldsymbol{r}(u_0, w + v_0) \quad , \quad w + v_0 \in [-\pi, \pi] \quad . \end{aligned} \tag{14.16}$$

Så er $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\lambda}(0) = p$.

1. Vis, at de to (koordinat-)kurver $\boldsymbol{\gamma}(t)$ og $\boldsymbol{\lambda}(w)$ skærer hinanden ortogonalt i p. Vink: Det betyder, at
$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \mathcal{F}_I \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] = 0 \quad . \tag{14.17}$$
2. Benyt sætning 14.11 til at eftervise formlen for $H(u, v)$ i eksempel 14.12. Vink: Det er ikke overraskende; de to vektorer $(1, 0)$ og $(0, 1)$ er i dette tilfælde ortogonale egenvektorer for $\mathcal{W}(u_0, v_0)$ for alle $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, således at summen af de tilhørende normalkrumninger direkte er $\kappa_1(u_0, v_0) + \kappa_2(u_0, v_0)$.

OPGAVE 14.15

Vi benytter igen $\mathcal{T}_{a,b}$ fra eksempel 14.12 og vælger et punkt $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ så $p = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Men nu lader vi $\boldsymbol{\gamma}(t)$ betegne følgende kurve igennem punktet p:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(u_0 + t\,,\; v_0 + t) \quad , \tag{14.18}$$

hvor vi antager, at $u_0 + t \in [-\pi, \pi]$ og $v_0 + t \in [-\pi, \pi]$. Så er $\boldsymbol{\gamma}(0) = p$.

1. Bestem en parameterfremstilling for en anden kurve $\boldsymbol{\lambda}(w)$, som skærer den givne kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ortogonalt i punktet p sådan at $p = \boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\lambda}(0)$.
2. Bestem normalkrumningen af $\boldsymbol{\gamma}(t)$ i p.
3. Bestem normalkrumningen af $\boldsymbol{\lambda}(w)$ i p.
4. Vis, at summen af de to normalkrumninger netop er $2 \cdot H(u_0, v_0)$ hvor H er middelkrumningsfunktionen for $\mathcal{T}_{2,1}$ som angivet i eksempel 14.12.

Alle torusser, kugleflader og cylinderflader er simple eksempler på omdrejningsflader:

Definition 14.16 En omdrejningsflade med z-aksen som ondrejningsakse konstrueres således: Først vælges en profilkurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ som ligger helt i (x,z)-planen uden at skære z-aksen:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\alpha(t)\,,\, 0\,,\, \beta(t)) \quad , \quad t \in [a,b] \quad , \tag{14.19}$$

hvor $\alpha(t) > 0$ og $\beta(t)$ betegner to differentiable funktioner af t. Den tilhørende omdrejningsflade fremkommer dernæst ved rotation af profilkurven om z-aksen og kan derfor parametriseres således:

$$\boldsymbol{r}(t,v) = (\alpha(t)\cdot\cos(v)\,,\, \alpha(t)\cdot\sin(v)\,,\, \beta(t)) \quad , \quad t \in [a,b] \quad , \quad v \in [-\pi,\pi] \quad . \tag{14.20}$$

OPGAVE 14.17

En graf-flade $\boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,f(u,v))$, $(u,v) \in \mathcal{U}$, er typisk *ikke* en omdrejningsflade med z-aksen som omdrejningsakse. Hvilke betingelser skal en graf-flade nødvendigvis opfylde for at være en omdrejningsflade?

OPGAVE 14.18

Find en parameterfremstilling for profilkurven for en generel torus $\mathcal{T}_{a,b}$, for en kugleflade med radius R, og for en cylinderflade med cirkulært tværsnit med radius R.

Sætning 14.19 En omdrejningsflade med parameterfremstillingen (14.20) har følgende krumningsfunktioner:

$$\begin{aligned}
K(t,v) &= \frac{\beta'(t)\cdot(\beta''(t)\cdot\alpha'(t) - \alpha''(t)\cdot\beta'(t))}{\alpha(t)\cdot\left(\,(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2\,\right)^2} \\
H(t,v) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha'(t)\beta''(t) - \alpha''(t)\beta'(t)}{(\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2)^{3/2}} + \frac{\beta'(t)\;(\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2)}{\alpha(t)\;(\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2)^{3/2}}\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{14.21}$$

Bevis. Disse – lidt komplicerede – formler fås ved direkte beregning af $\mathcal{F}_I(t,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(t,v)$ for omdrejningsfladen og dernæst benytte (14.4) direkte. □

Formlerne (14.21) simplificeres væsentligt hvis profilkurven er *buelængde-parametriseret*:

Følge-Sætning 14.20 Hvis profilkurven $\gamma(s) = (\alpha(s)\,,\,0\,,\,\beta(s))$, $s \in [c,d])$ er buelængde-parametriseret således at $(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2 = 1$ for alle s, så kan Gauss-krumningen og middelkrumningen for omdrejningsfladen skrives meget simplere således:

$$\begin{aligned} K(s,v) &= -\frac{\alpha''(s)}{\alpha(s)} \\ H(s,v) &= \frac{-\beta'(s) + \alpha(s)\cdot(\beta'(s)\cdot\alpha''(s) - \beta''(s)\cdot\alpha'(s))}{2\cdot\alpha(s)} \quad . \end{aligned} \tag{14.22}$$

Bevis. Fra $(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2 = 1$ fås ved differentiation:

$$2\cdot(\alpha'(s)\cdot\alpha''(s) + \beta'(s)\cdot\beta''(s)) = 0 \quad , \tag{14.23}$$

sådan at

$$\begin{aligned} K(s,v) &= \frac{\beta'(s)\cdot(\beta''(s)\cdot\alpha'(s) - \alpha''(s)\cdot\beta'(s))}{\alpha(s)\cdot(\,(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2\,)^2} \\ &= \frac{\beta'(s)\cdot(\beta''(s)\cdot\alpha'(s) - \alpha''(s)\cdot\beta'(s))}{\alpha(s)} \\ &= \frac{\beta'(s)\cdot\beta''(s)\cdot\alpha'(s) - \alpha''(s)\cdot\beta'(s)\cdot\beta'(s)}{\alpha(s)} \\ &= \frac{-\alpha'(s)\cdot\alpha''(s)\cdot\alpha'(s) - \alpha''(s)\cdot\beta'(s)\cdot\beta'(s)}{\alpha(s)} \\ &= \frac{-(\alpha'(s))^2\cdot\alpha''(s) - \alpha''(s)\cdot(\beta'(s))^2}{\alpha(s)} \\ &= \frac{-\alpha''(s)\cdot\left((\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2\right)}{\alpha(s)} \\ &= \frac{-\alpha''(s)}{\alpha(s)} \quad . \end{aligned} \tag{14.24}$$

Den simplificerede formel for $H(s,v)$ fås tilsvarende fra (14.21) ved brug af (14.23). □

14.2 Omparametrisering

Det følger af ovenstående direkte geometriske konstruktioner af H og K – og κ_1 og κ_2 – at de er uafhængige af den parametrisering, vi benytter til at beskrive en given flade. Hvis vi parametriserer den samme flade med en anden parametrisering, så vil krumningerne i et givet punkt på fladen have samme værdi uafhængig af parametriseringen – pånær *fortegnene* af H, κ_1 og κ_2, som afhænger af retningen af $\mathbf{N}$, som bemærket ovenfor.

Dermed er krumningerne ægte geometriske størrelser, der kun afhænger af fladens geometri. Det er helt afgørende, for det betyder, at vi selv kan vælge hvilken parametrisering og hvilket koordinatsystem vi vil bruge til at beregne krumningerne for fladen og dermed også til intuitivt at motivere at de to funktioner virkelig har noget med krumning at gøre!

For mere direkte at indse, at krumningsfunktionerne er uafhængige af parametriseringen af den givne flade vil vi nu se på to forskellige parametriseringer af én og samme flade: $\boldsymbol{r}(u,v)$, hvor $(u,v) \in \mathcal{U}$, og $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$, hvor $(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Da vi antager, at $\boldsymbol{r}(u,v)$ og $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ rammer de samme punkter på fladen i rummet, så må der være en sammenhæng mellem parametrene, dvs. en afbildning fra $\widetilde{\mathcal{U}}$ ind i $\mathcal{U}$ som fortæller hvordan u afhænger af $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ og hvordan v afhænger af $(\widetilde{u},\widetilde{v})$. Vi antager, at vi har givet eller fundet den afhængighed (ved at løse de tilsvarende ligninger) og kan derefter udtrykke sammenhængen således: $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \boldsymbol{r}(u(\widetilde{u},\widetilde{v}),v(\widetilde{u},\widetilde{v}))$.

Vi kan nu beregne og sammenligne $\widetilde{\mathcal{F}_I}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ med $\mathcal{F}_I(u,v)$, og tilsvarende $\widetilde{\mathcal{F}_{II}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ med $\mathcal{F}_{II}(u,v)$. For eksempel får vi ved at differentiere igennem med kædereglen:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{r}}'_{\widetilde{u}} &= \boldsymbol{r}'_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} + \boldsymbol{r}'_v \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \\
\widetilde{\boldsymbol{r}}'_{\widetilde{v}} &= \boldsymbol{r}'_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v'}{\partial \widetilde{v}} \quad ,
\end{aligned}
\tag{14.25}
$$

som giver:

$$
\widetilde{E} = \widetilde{\boldsymbol{r}}'_{\widetilde{u}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{r}}'_{\widetilde{u}} = E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}}\right)^2 + 2F \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}}\right) + G \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}}\right)^2 \quad . \tag{14.26}
$$

Tilsvarende udtryk findes for $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, og $\widetilde{N}$. Ved at omskrive de fundne sammenhænge mellem udtrykkene til matrixform fås følgende (prøv det!):

$$
\begin{bmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J} \quad , \tag{14.27}
$$

hvor $*$ betyder transponering, og hvor $\mathbf{J}$ står for (Jacobi-)matricen med de partielle afledede af u og v som funktioner af $\widetilde{u}$ og $\widetilde{v}$:

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{bmatrix} \quad . \tag{14.28}
$$

Præcis den samme sammenhæng (transformationsformel) gælder for den anden fundamentalform-matrix:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J} \quad . \tag{14.29}$$

Men det betyder, at vi har:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}_I} &= \mathbf{J}^* \cdot \mathcal{F}_I \cdot \mathbf{J} \quad , \\ \widetilde{\mathcal{F}_{II}} &= \mathbf{J}^* \cdot \mathcal{F}_{II} \cdot \mathbf{J} \quad , \end{aligned} \tag{14.30}$$

og dermed:

$$\widetilde{\mathcal{F}_I}^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{F}_{II}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \left(\mathcal{F}_I^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II} \right) \cdot \mathbf{J} \quad . \tag{14.31}$$

OPGAVE 14.21

Hvordan indser vi (14.31) ud fra (14.30) ?

Eksempel 14.22

En regulær parametrisering af en flade er givet på formen:

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (\widetilde{u} + \widetilde{v}, \widetilde{u} - \widetilde{v}, \widetilde{u} \cdot \widetilde{v}) \quad , \quad (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{14.32}$$

En omparametrisering af fladen er dernæst givet ved:

$$\begin{aligned} u &= u(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = \widetilde{u} + \widetilde{v} \\ v &= v(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = \widetilde{u} - \widetilde{v} \quad , \end{aligned} \tag{14.33}$$

således at:

$$\widetilde{u} \cdot \widetilde{v} = \frac{1}{4} \left(u^2 - v^2 \right) \quad , \tag{14.34}$$

og dermed

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \left(u, \, v, \, \frac{1}{4} \left(u^2 - v^2 \right) \right) \quad , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{14.35}$$

De to forskellige parametriseringer af den samme flade i rummet er vist i figur 14.1. Jacobi-matricen for omparametriseringen er i dette eksempel

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad . \tag{14.36}$$

Ved udregning af de fundamentalmatricerne får vi henholdsvis:

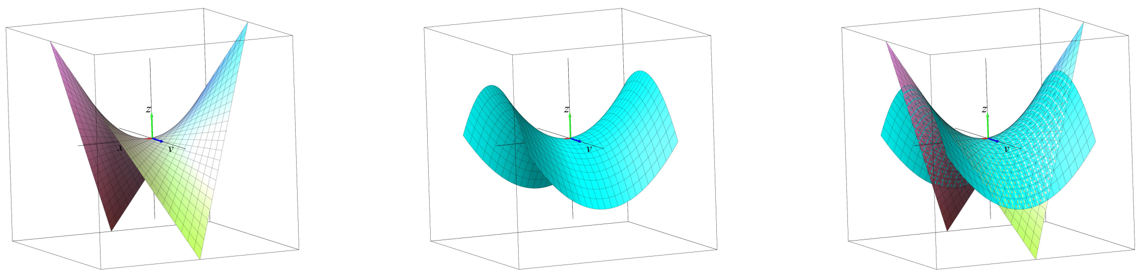
$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}_I}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) &= \begin{bmatrix} 2 + \widetilde{v}^2 & \widetilde{u} \cdot \widetilde{v} \\ \widetilde{u} \cdot \widetilde{v} & 2 + \widetilde{u}^2 \end{bmatrix} \\ \mathcal{F}_I(u, v) &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4} u^2 & -\frac{1}{4} \cdot u \cdot v \\ -\frac{1}{4} \cdot u \cdot v & 1 + \frac{1}{4} v^2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{14.37}$$

Ved dernæst at bruge (14.33) fås netop at ligningen fra (14.30) er opfyldt:

$$\widetilde{\mathcal{F}_I} = \mathbf{J}^* \cdot \mathcal{F}_I \cdot \mathbf{J} \quad . \tag{14.38}$$

Tilsvarende kan den anden ligning i (14.30) checkes i dette konkrete tilfælde:

$$\widetilde{\mathcal{F}_{II}} = \mathbf{J}^* \cdot \mathcal{F}_{II} \cdot \mathbf{J} \quad . \tag{14.39}$$



Figur 14.1: Samme flade parametriseret på to forskellige måder, se eksempel 14.22

OPGAVE 14.23

Hvilken parametrisering er brugt i delfigur 2 fra venstre i figur 14.1? Er det $\boldsymbol{r}(u,v)$ eller $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$?

14.2.1 Krumningerne er bevaret ved omparametrisering

OPGAVE 14.24

Tag determinanten på begge sider af (14.31) og vis dermed, at Gauss-krumningen er uafhængig af parametriseringen, $\widetilde{K}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = K(u,v)$. Og det var noget af det vi gerne ville vise!

OPGAVE 14.25

Vis på tilsvarende måde, at $\widetilde{H}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = H(u,v)$. Vink: Vis først, eller benyt, at $\text{Spor}\left(\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}\right) = \text{Spor}\left(\mathbf{B}\right)$ for alle matricer $\mathbf{B}$.

Dermed har vi vist det ønskede, nemlig at de to funktioner $K(u,v)$ og $H(u,v)$ er invariante ved omparametrisering.

14.3 Lokal krumnings-analyse

For en graf-flade-parametrisering er beregningerne af $K(u,v)$ og $H(u,v)$ særligt simple – se eksempel 13.12 hvorfra vi umiddelbart kan aflæse:

Eksempel 14.26

Vi ser på en generel graf-flade givet ved en parameterfremstilling:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u,v,f(u,v)) \quad , \quad u \in \mathbb{R}\,,\, v \in \mathbb{R} \quad , \tag{14.40}$$

Vi antager igen, at f er en funktion med $f'_u(0,0) = 0$ og $f'_v(0,0) = 0$ således at $(0,0)$ er et stationært punkt for f. Så er

$$\mathcal{W}(0,0) = \mathcal{F}_I^{-1}(0,0) \cdot \mathcal{F}_{II}(0,0) = \begin{bmatrix} f''_{uu}(0,0) & f''_{uv}(0,0) \\ f''_{uv}(0,0) & f''_{vv}(0,0) \end{bmatrix} \quad , \tag{14.41}$$

og dermed

$$\begin{aligned} K(0,0) &= \mathrm{Det}(\mathcal{W}(0,0)) = f''_{uu}(0,0) \cdot f''_{vv}(0,0) - (f''_{uv}(0,0))^2 \\ H(0,0) &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Spor}(\mathcal{W}(0,0)) = \frac{1}{2} \cdot (f''_{uu}(0,0) + f''_{vv}(0,0)) \end{aligned} \tag{14.42}$$

Hvis vi introducerer r, s and t som $r = f''_{uu}(0,0)$, $s = f''_{uv}(0,0)$, og $t = f''_{vv}(0,0)$, så får vi Gauss- og middelkrumningen i punktet p udtrykt på den klassiske form:

$$\begin{aligned} K(0,0) &= r \cdot t - s^2 \\ H(0,0) &= \frac{1}{2}(r+t) \quad . \end{aligned} \tag{14.43}$$

OPGAVE 14.27

I opgave 12.1 spørgsmål 5 optræder konstanterne a, b, og c. Hvad er relationen mellem dem og r, t, og s som indført ovenfor? Vis, at $K(0,0) > 0$ svarer til, at graf-fladen i den opgave ikke har skæring med sin tangentplan i punktet $(0,0,0)$ udenfor dette punkt selv.

Litteratur

[Bj1] F. Fabricius Bjerre, *Geometri I: Analytisk Geometri, Lineær algebra*, Polyteknisk Forlag, 1981.

[Bj2] F. Fabricius Bjerre, *Geometri II: Differentialgeometri, Kinematisk geometri*, Polyteknisk Forlag, 1981.

[BP] W. Boehm and H. Prautzsch, *Geometric Concepts for Geometric Design*, A. K. Peters Ltd. 1994.

[Br] K. Brakke, *The Surface Evolver*, http://www.susqu.edu/brakke/

[BBI] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **33** (2001).

[DBT] A. Derouet-Jourdan, F. Bertails-Descoubes, and J. Thollot. *Floating tangents for approximating spatial curves with G^1 piecewise helices*. Comput. Aided Geom. Design, 30(5):490–520, 2013.

[Fow] G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 7. ed., Cengage Learning, 2004.

[GS] O. Gonzales and A. M. Stuart, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University press, 2008.

[VLH] V. Lundsgaard Hansen, *Jeg er den største*, Normat 2, 1998, 71–75.

[H] Andrew J. Hanson, *A Visualizing Quaternions*, Elsevier, 2006.

[KCP] P. Klit, K. Casper, and N. L. Pedersen, *Machine Elements, Analysis and Design*, DTU Mechanical Engineering, 2007.

[Mac] MacTutor History of Mathematics, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/

[Maple] Maple's hjemmeside http://www.maplesoft.com/

[ND] B. Noble and J. W. Daniel, *Applied Linear Algebra*, 3. ed. Prentice Hall, 1988.

[ON] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, 2. ed. Academic Press, 2006.

[Po] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007.

[P] A. Pressley, Elementary Differential Geometry, Springer, 2010.

[Sal] D. Salomon, *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, 2006.

[St2] K. Stephenson, *Introduction to Circle Packing*, Cambridge University Press, 2005.

[S] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra, 4. ed.*, Wellesley–Cambridge Press, 2009.

[MW] Eric Weisstein's Matematik Encyklopædi, http://mathworld.wolfram.com/

[W] R. Woodbury, *Elements of Parametric Design*, Routledge, Taylor & Francis, 2010.

Indeks

DTU COMPUTE
BYGNING 303B, 2800 KGS. LYNGBY.
E-mail adresse: stema@dtu.dk