Kapitel 7

Geometrisk dynamik i 3D

Som antydet i forrige kapitel 6 kan enhver $2 \times 2-$deformationsmatrix $\mathbf{K}$ essentielt skrives som et produkt af en symmetrisk matrix og en rotationsmatrix (som definerer et medfølgende hængsel).

Det samme gælder for $3 \times 3-$deformationsmatricer. Vi begynder dette kapitel med at formulere præcis hvad det resultat går ud på. Det er indholdet af følgende sætning om polær dekomposition:

Sætning 7.1 Enhver regulær matrix $\mathbf{K}$ kan skrives som et produkt

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \tag{7.1}$$

hvor $\mathbf{R}$ er en rotationsmatrix, $\mathbf{S}$ er en symmetrisk matrix med positive egenværdier, og $\widehat{\mathbf{F}}$ er flipmatricen (der som bekendt afhænger af om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ).

Rotationsmatricen $\mathbf{R}$ og den symmetriske matrix $\mathbf{S}$ kan selv faktoriseres og dekomponeres på følgende måde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^* \\ \mathbf{S} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad , \end{aligned} \tag{7.2}$$

hvor $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, og $\mathbf{\Sigma}$ er de velkendte matricer fra SVD faktoriseringen af $\mathbf{K}$, se nedenfor.

Læg mærke til at den sætning specielt betyder, at hvis $\mathbf{K}$ har positiv determinant (altså $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$) og hvis $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}$ (altså $\sigma 1 = \sigma_2 = 1$), så er $\mathbf{S} = \mathbf{E}$ og dermed $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, dvs. $\mathbf{K}$ er selv en rotationsmatrix.

Bevis. Det er let at bevise Sætning 7.1 når vi har SVD faktoriseringen af $\mathbf{K}$ til rådighed.

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \tag{7.3}$$

Vi skriver simpelthen SVD faktoriseringen således - ved at indsætte en ekstra (enheds-)faktor $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}$ strategisk mellem $\mathbf{U}$ og $\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\
&= \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\
&= (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*) \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*) \cdot \widehat{\mathbf{F}} \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad ,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

hvor $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$ er et produkt af to rotationsmatricer og derfor selv en rotationsmatrix (hvorfor det?) Vi mangler blot at vise, at $\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$ er en symmetrisk matrix. Men det følger af at:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^* &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*)^* \\
&= \mathbf{V}^{**} \cdot \mathbf{\Sigma}^* \cdot \mathbf{V}^* \\
&= \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \\
&= \mathbf{S} \quad ,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

hvor vi har benyttet, at der klart gælder $\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{\Sigma}$ og $\mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$. □

OPGAVE 7.2

Bestem polære dekompositioner for hver af følgende deformationsmatricer (nummereringen stammer fra den tidligere opgave 4.19, som handlede om SVD faktoriseringen af disse matricer):

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

7.1 Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder

Vi vil nu se på hvad ovenstående polære dekomposition betyder for en generel tidsafhængig deformation og bevægelse af et tetraeder i rummet - på samme måde som vi diskuterede dette for samtidig bevægelse og deformation af trekanter i planen i forrige kapitel.

Et (fod)punkt p for et tetraeder bevæger sig altså nu i rummet og har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det gode gamle fast valgte koordinatsystem $\{O,x,y,z\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{7.7}$$

hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet - sædvanligvis, når ikke andet er nævnt, vil vi bruge $I = \mathbb{R}$.

|||| OPGAVE 7.3

Bestem en tidsparametrisering $p(t)$, $t \in I$, af den cirkel $\mathcal{C}$ i rummet, som har centrum i $(1,0,0)$, radius 3, og som ligger i den plan igennem centret som står vinkelret på vektoren $(1,1,1)$. Vælg I sådan at cirklen gennemløbes netop én gang.

|||| Eksempel 7.4

Et eksempel er vist med fodpunkts-kurven i figur 7.1. Den viste (animerede) bevægelse er simpelthen givet ved:

$$p(t) = (-1+3t, -2+3t, 0) \quad , \quad \text{hvor} \quad t \in [0,1] \quad . \tag{7.8}$$

I den samme figur er vist en ikke-triviel animeret deformation af et tetraeder. Læg mærke til, at det er selve tetraederdeformationen der stadig er det interessante - ikke selve fodpunkts-bevægelsen. (Det forhold vil ændre sig dramatisk i næste kapitel, hvor vi vil koble deformationen til fodpunktsbevægelsen og *styre* deformationen af tetraederet blandt andet ved hjælp af banekurven for fodpunkts-bevægelsen.)

Den viste deformation af tetraederet er givet ved følgende fuldstændige specifikation af det markerede treben:

$$\begin{aligned}
\boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)) \\
&= \mathbf{K}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad \text{hvor } t \in [0,1] \text{ og} \\
p(t) &= (-1+3t, -2+3t, 0) \quad , \quad \text{og kantvektorerne er givet ved}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$[\mathbf{a}^*(t)\, \mathbf{b}^*(t)\, \mathbf{c}^*(t)] = \mathbf{K}(t) \quad ,$$

hvor

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{\Sigma}(t)\cdot\mathbf{V}^*(t)$$

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(t/2) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.10}$$

og

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_z(2\pi t)\cdot\mathbf{R}_y(2\pi t)\cdot\mathbf{R}_x(2\pi t)$$

$$\mathbf{V}^*(t) = \mathbf{R}_z(-\pi t)\cdot\mathbf{R}_y(-\pi t)\cdot\mathbf{R}_x(-\pi t) \quad . \tag{7.11}$$

Det fremgår (også af animationen), at selv om deformationsmatricen har et rimeligt simpelt udtryk, så er bevægelsen langt fra simpel. Det skyldes udelukkende de involverede rotationer. Selve strækningen og kompressionen af tetraederet fra start til slut er bestemt af $\sigma_i(t)-$værdierne i $\mathbf{\Sigma}(t)$ og de kan jo direkte aflæses, sådan at vi for eksempel umiddelbart kan løse følgende typiske opgaver:

OPGAVE 7.5

Bestem til ethvert tidspunkt $t \in [0,1]$ volumenet $\mathrm{Vol}(\boxtimes(t))$ af det tetraeder som er defineret i (7.9).

OPGAVE 7.6

Hvis vi benytter standard-prissætningen for tetraedre på fabrikken M_P, hvor meget koster det så at få lavet følgende stak bestående af 1000 tetraedre, som er produceret efter forskriften fra eksempel 7.4, se ligning (7.9): $\boxtimes(t_i)$, $t_i = i/1000$, $i = 1,2,3,...,1000$.

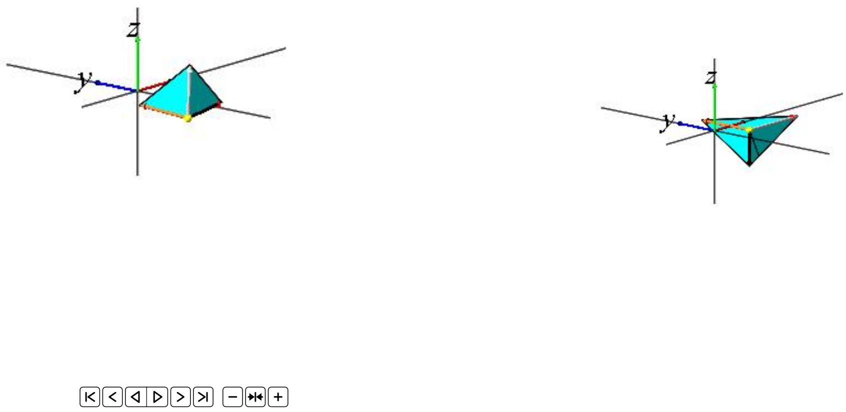
Hvis vi ikke roterer, det vil sige hvis vi kun benytter $\mathbf{S}(t)$-delen af den polære dekomposition for $\mathbf{K}(t)$, så får vi den deformation af tetraederet som er vist i figur 7.2.

Det er stadigvæk rotationerne i rummet og altså rotationsdelen $\mathbf{R}(t)$ af de polære dekompositioner, det er sværest at forstå - så dem vil vi dyrke lidt nærmere i det følgende.

7.2 Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix

For at forstå hvordan rotationer og rotationsmatricer $\mathbf{R}(t)$ udvikler sig og virker i rummet, er det nødvendigt at undersøge og finde simple udtryk for deres tids-afledede $\mathbf{R}'(t)$. Hvis den tidsafhængige $3\times 3-$rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er givet ved sine element-funktioner således:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.12}$$



Figur 7.1: Deformation af tetraeder med $\mathbf{K}(t)$ som specificeret i eksempel 7.4, se de definerende ligninger (7.9). Animeret.

så er $\mathbf{R}'(t)$ defineret ved de $t-$afledede af de enkelte element-funktioner $r_{ij}(t)$ sådan her:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{7.13}$$

Da vi antager, at $\mathbf{R}(t)$ er rotationsmatricer for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$, så gælder der per definition 4.5, dels at $\det(\mathbf{R}(t)) = 1$ for alle t og dels at

$$\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) \quad . \tag{7.14}$$

Så gælder derfor også for alle t at

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \mathbf{E} \quad . \tag{7.15}$$

Den ligning kan vi differentiere med hensyn til t og får så, da $\mathbf{E}$ er en konstant matrix:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)\right) = \mathbf{O} \quad , \quad \text{dvs.} \\ \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) = \mathbf{O} \quad . \end{gathered} \tag{7.16}$$

Figur 7.2: Deformation af basistetraederet med den symmetriske matrix $\mathbf{S}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

OPGAVE 7.7

Vis - eller giv et selvvalgt ikke-trivielt eksempel, der viser - at de to ligninger i ovenstående ligning (7.16) er ækvivalente, altså at man kan finde den afledede af et matrix-produkt med 'den sædvanlige produkt-metode', som kendes for funktioner: $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Vink: Kig eventuelt først på 2×2-matricer $\mathbf{A}(t)$.

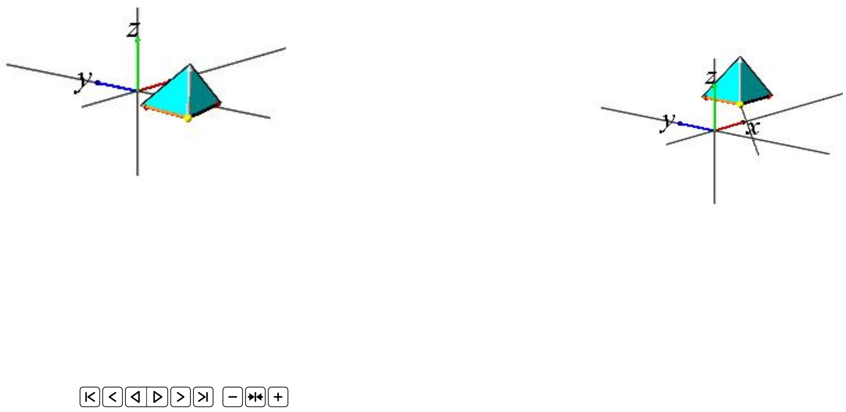
Det vil sige, at der for rotationsmatricerne $\mathbf{R}(t)$ altid gælder:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) &= -\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) \\ &= -\left(\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)\right)^* \quad . \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3 Skævsymmetriske matricer

Ligningen (7.17) ovenfor betyder, at matricen $\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)$ er *skævsymmetrisk* for enhver værdi af t i følgende forstand:

Definition 7.8 En matrix $\mathbf{A}$ er skævsymmetrisk hvis $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$.



Figur 7.3: Rotation med rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

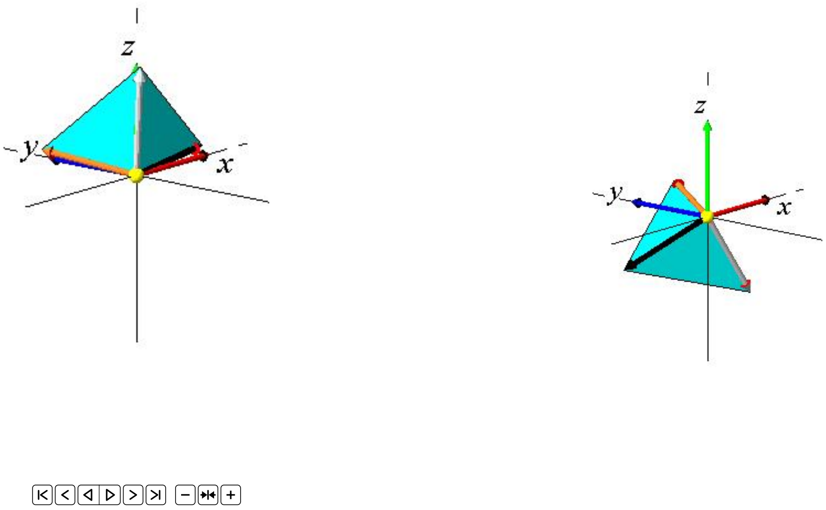
OPGAVE 7.9

Vis, at en given $3 \times 3-$matrix $\boldsymbol{\Omega}$ er skævsymmetrisk hvis og kun hvis der findes 3 tal α, β, og γ, således at

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.18}$$

7.3.1 Akse-vektorer og akse-matricer

Skævsymmetriske $3 \times 3-$matricer er altså – efter opgave 7.9 – ret simple i den forstand, at de kan beskrives ved tre elementer. Og tre elementer er jo netop også tilstrækkelige og nødvendige til beskrivelse af en vektor i rummet. Følgende sætning er derfor ikke så overraskende (vi vil igen formulere sætningen med $\boldsymbol{\Omega}$, fordi vi især skal bruge sætningen for de skævsymmetriske matricer $\boldsymbol{\Omega}(t)$, som vi fandt ovenfor i forbindelse med undersøgelsen af tidsafhængige rotationer $\mathbf{R}(t)$) :



Figur 7.4: Rotationen af tetraederet i 7.3 med fast fodpunkt i Origo. Animeret.

Sætning 7.10 Lad $\mathbf{\Omega}$ være en vilkårlig given skævsymmetrisk $3\times 3-$matrix. Så findes der en entydigt bestemt vektor $\boldsymbol{\omega}$, således at

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{v}^* = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \tag{7.19}$$

og den vektor $\boldsymbol{\omega}$ er simpelthen givet ved de tre elementer fra $\mathbf{\Omega}$ som er markeret i opgave 7.9 ovenfor:

$$\boldsymbol{\omega} = (\alpha,\beta,\gamma) = (\Omega_{32},\Omega_{13},\Omega_{21}) \quad . \tag{7.20}$$

Bevis. Vi skal bare vise, at den påståede vektor $\boldsymbol{\omega}$ har den ønskede egenskab og at det er den eneste vektor med den egenskab. Men det følger af de direkte udregninger:

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})^* = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.22}$$

Altså samme resultat for alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Det vil sige, at den anviste vektor $\boldsymbol{\omega}$ faktisk opfylder (7.19). Vi mangler så kun at vise, at det er den eneste vektor der kan bruges. Hvis $\boldsymbol{\eta}$ er en anden vektor med den samme egenskab som $\boldsymbol{\omega}$, altså at den også opfylder (7.19), så er specielt også

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v})^* &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* = \mathbf{0}^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \quad \text{dvs.} \\ (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \end{aligned} \tag{7.23}$$

og *det* er kun muligt for $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ (hvorfor det?), så $\boldsymbol{\eta}$ kan ikke være *en anden* vektor end $\boldsymbol{\omega}$, og det var det, vi skulle vise. □

Definition 7.11 Hvis $\boldsymbol{\Omega}$ er en vilkårlig givet skævsymmetrisk $3 \times 3-$matrix med de 9 elementer Ω_{ij}, så kalder vi

$$\boldsymbol{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$$

den til $\boldsymbol{\Omega}$ associerede akse-vektor.

Den omvendte sætning gælder også:

Sætning 7.12 Lad $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ være en vilkårlig givet vektor i rummet. Så findes der en entydigt bestemt skævsymmetrisk matrix $\boldsymbol{\Omega}$, således at

$$(\omega \times \mathbf{v})^* = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}^* \quad \text{for alle vektorer} \quad \mathbf{v} \quad , \tag{7.24}$$

og den matrix $\boldsymbol{\Omega}$ er givet ved de tre elementer fra $\boldsymbol{\omega}$ således

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.25}$$

Bevis. Ligesom for sætning 7.10. □

Definition 7.13 Hvis $\boldsymbol{\omega}$ er en vilkårlig given vektor med koordinaterne $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, så kalder vi

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

den til $\boldsymbol{\omega}$ associerede akse-matrix.

OPGAVE 7.14

En skævsymmetrisk matrix $\mathbf{\Omega}$ har følgende kendte elementer:

$$\Omega_{12} = 3 \quad , \quad \Omega_{13} = -4 \quad , \quad \Omega_{23} = 1 \quad . \tag{7.26}$$

Bestem den til $\mathbf{\Omega}$ associerede aksevektor.

OPGAVE 7.15

En given vektor $\boldsymbol{\omega}$ har egenskaberne:

$$\boldsymbol{\omega} \times (1,1,0) = (-3,3,-1) \quad , \quad \boldsymbol{\omega} \times (0,1,1) = (-1,-1,1) \quad . \tag{7.27}$$

Bestem den til $\boldsymbol{\omega}$ associerede aksematrix.

7.4 Tidsafhængige rotationsmatricer

Som allerede udviklet ovenfor får vi skævsymmetriske matricer serveret en masse ved til ethvert tidspunkt at danne en ganske bestemt produktmatrix ud fra en given tidsafhængig rotationsmatrix

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad , \tag{7.28}$$

Lad os begynde med de simpleste rotationer, koordinat-akse-rotationerne, som vi først stiftede bekendtskab med i 4.18.

OPGAVE 7.16

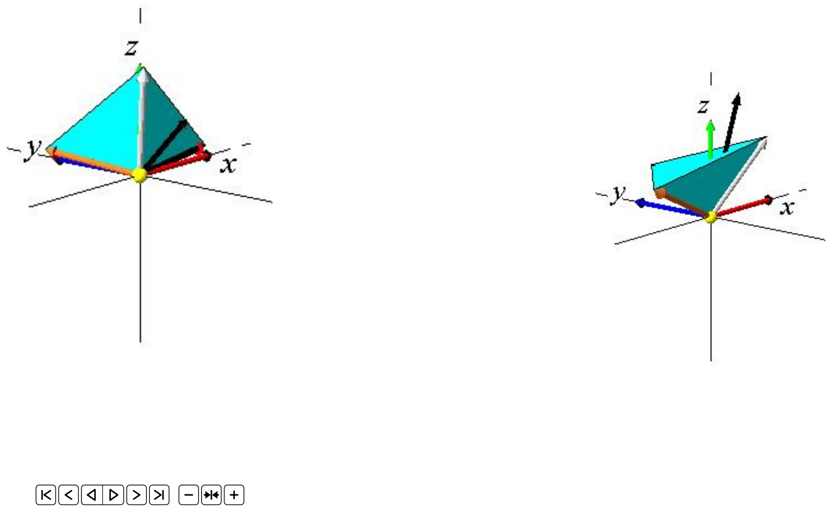
Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$ som defineret i 4.18. (Bemærk, at vi har udskiftet den uafhængige variable w med tiden t.) Dvs.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.29}$$

Bestem for enhver værdi af t den skævsymmetriske matrix $\mathbf{\Omega}(t)$ efter forskriften 7.28, og bestem dernæst den til $\mathbf{\Omega}(t)$ associerede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$ for ethvert tidspunkt t.

OPGAVE 7.17

Samme opgave som ovenfor, men nu for de to andre elementar-rotationer, henholdsvis $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(t)$ og $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t)$.



Figur 7.5: Rotationen af tetraederet i 7.3 med tilhørende antydet akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Animeret.

OPGAVE 7.18

Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t))$, hvor $\theta(t)$ er en givet funktion af t, altså

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.30}$$

Bestem $\boldsymbol{\Omega}(t)$ og den associerede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Vink: Det kan være en god idé først at bestemme $\boldsymbol{\omega}(t)$ for et specielt, konkret, valg af vinkelfunktion $\theta(t)$, for eksempel $\theta(t) = 7t$.

OPGAVE 7.19

Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(t)$. Bestem $\boldsymbol{\Omega}(t)$ og den associerede aksevektor-funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$.

7.4.1 Rotationer med given akse-vektor-funktion

Hvis vi har fået givet en vektorfunktion $\boldsymbol{\omega}(t)$, kan vi så finde en rotation $\mathbf{R}(t)$ der har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som aksevektor til ethvert tidspunkt t ? Det er ikke svært, vi skal jo 'bare' finde $\mathbf{R}(t)$, således at

$$\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \quad , \tag{7.31}$$

hvor $\mathbf{\Omega}(t)$ er den aksematrix, der til tidspunktet t har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som associeret aksevektor. Ligningen er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo stadig har at $\mathbf{R}^{*}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$:

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \quad . \tag{7.32}$$

Det vil sige, vi skal bestemme $\mathbf{R}(t)$ sådan at følgende ligning er opfyldt:

$$\mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} ,$$

hvor vi har brugt definition 7.13 og indsat de kendte koordinatfunktioner for $\boldsymbol{\omega}(t)$ i aksematricen.

Det vil sige, at hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ skal opfylde det samme differentialligningssystem bestående af 3 koblede lineære ligninger med 3 ubekendte funktioner:

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) \\ r'_{21}(t) \\ r'_{31}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}(t) \\ r_{21}(t) \\ r_{31}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r'_{12}(t) \\ r'_{22}(t) \\ r'_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12}(t) \\ r_{22}(t) \\ r_{32}(t) \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

$$\begin{bmatrix} r'_{13}(t) \\ r'_{23}(t) \\ r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13}(t) \\ r_{23}(t) \\ r_{33}(t) \end{bmatrix} \quad .$$

Hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ tilfredsstiller altså *et og samme* differentialligningssystem, dvs. de har *fælles* systemmatrix $\mathbf{\Omega}(t)$.

Hvis vi derfor kalder de tilsvarende vektorer - svarende til koordinatsøjlerne i $\mathbf{R}(t)$ - henholdsvis $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$, således at

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^{*}(t) & \mathbf{f}^{*}(t) & \mathbf{g}^{*}(t) \end{array} \right] \quad , \tag{7.34}$$

så er (7.33) ækvivalent med:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t)\,\mathbf{e}^*(t)\\ \mathbf{f}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t)\,\mathbf{f}^*(t)\\ \mathbf{g}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t)\,\mathbf{g}^*(t) \quad ,\end{aligned} \tag{7.35}$$

Hvis vi skriver de 3 ligninger på kompakt form, så får vi netop den ligning vi startede med, ligning (7.32):

$$\begin{gathered}\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{e}'^*(t) & \mathbf{f}'^*(t) & \mathbf{g}'^*(t)\end{array}\right] = \mathbf{\Omega}(t)\cdot\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t)\end{array}\right]\\ \mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t)\cdot\mathbf{R}(t) \quad ,\end{gathered} \tag{7.36}$$

så pengene passer!

Men ved at indføre vektorerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ kan vi skrive ligningerne i (7.35) ved hjælp af den til $\mathbf{\Omega}(t)$ associerede akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{e}(t)\\ \mathbf{f}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{f}(t)\\ \mathbf{g}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{g}(t)\end{aligned} \tag{7.37}$$

Der er altså flere forskellige måder at udtrykke differentialligningerne på, når vi skal finde $\mathbf{R}(t)$ med en given akse-vektor-funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Lad os se på et første simpelt eksempel:

|||| Eksempel 7.20

Lad $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og antag, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$. Vi vil finde den rotation $\mathbf{R}(t)$, som hører til rotations-akse-vektor-funktionen $\boldsymbol{\omega}(t)$, og som tilfredsstiller den givne begyndelsesbetingelse. Den første vektor-differentialligning i (7.37) kan vi skrive således:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}'(t) = (0,0,2)\times\mathbf{e}(t)\\ (e_1'(t),e_2'(t),e_3'(t)) = (0,0,2)\times(e_1(t),e_2(t),e_3(t))\\ (e_1'(t),e_2'(t),e_3'(t)) = (-2e_2(t),2e_1(t),0)\\ \begin{bmatrix} e_1'(t)\\ e_2'(t)\\ e_3'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\\ e_3(t)\end{bmatrix} \quad .\end{gathered} \tag{7.38}$$

Det system har løsningerne (den fuldstændige løsningsmængde):

$$\begin{aligned} e_3(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ e_2(t) &= -c_2 \cos(2t) + c_1 \sin(2t) \quad , \end{aligned} \tag{7.39}$$

hvor c_1, c_2, og c_3 er vilkårlige (arbitrære) konstanter. De konstanter fastlægges via begyndelsesbetingelserne til tiden $t = 0$, som for den første søjle-vektor $\mathbf{e}(0)$ i $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er følgende: $e_3(0) = 0$, så $c_3 = 0$; $e_1(0) = 1$, så $c_1 = 1$; den sidste betingelse, $e_2(0) = 0$ giver endelig $c_2 = 0$.

Løsningen for vektorfunktionen $\mathbf{e}(t)$ er derfor:

$$\mathbf{e}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0) \quad . \tag{7.40}$$

Tilsvarende kan den samme fuldstændige løsning fra (7.39) benyttes til bestemmelse af $\mathbf{f}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$. Det er kun begyndelsesbetingelserne, der er forskellige. Resultaterne er:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= (-\sin(2t), \cos(2t), 0) \\ \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1) \quad , \end{aligned} \tag{7.41}$$

således at den søgte rotation $\mathbf{R}(t)$ er:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.42}$$

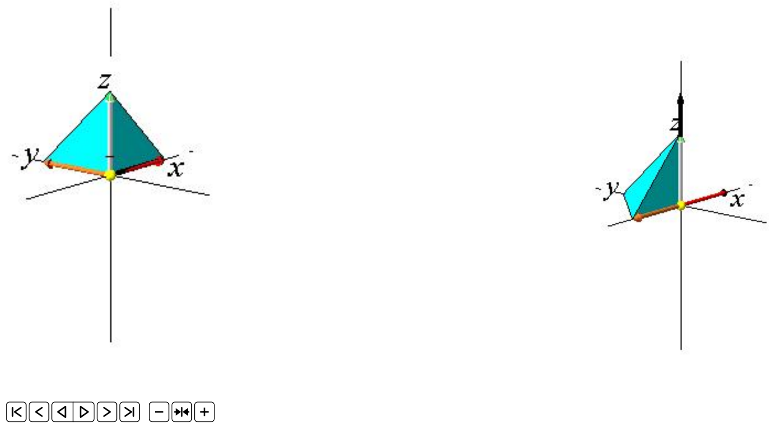
OPGAVE 7.21

Eftervis ved direkte udregning, at den fundne løsning i eksempel 7.20 ovenfor faktisk *er* en løsning, både til differentialligningssystemet $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$ og til begyndelsesværdi-kravet: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$.

OPGAVE 7.22

Bestem på samme måde som i eksempel 7.20 de rotationer $\mathbf{R}(t)$ som giver nedenstående akse-vektor-funktioner $\boldsymbol{\omega}(t)$, idet det igen antages, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (1, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t^2) \quad . \end{aligned} \tag{7.43}$$



Figur 7.6: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2\sin(t))$. Animeret.

Eksempel 7.23

Hvis vi lader $\boldsymbol{\omega} = (0,0,(\pi/2)\sin(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ fås ved løsning af differentialligningssystemerne ovenfor den rotation, som ses i figur 7.6. Akse-vektor-funktionen er også vist der. Løsningen er givet ved:

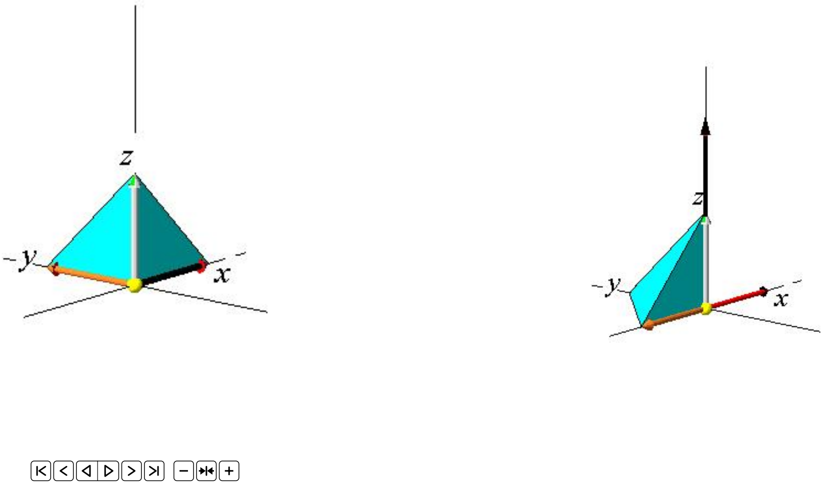
$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi\cos(t)/2) & -\cos(\pi\cos(t)/2) & 0 \\ \cos(\pi\cos(t)/2) & \sin(\pi\cos(t)/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{7.44}$$

OPGAVE 7.24

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.23, ligning (7.44), er korrekt.

Eksempel 7.25

Hvis vi lader $\boldsymbol{\omega} = (0,0,2\sin^2(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$, så får vi (ved numerisk løsning af differentialligningssystemerne ovenfor) den rotation, som er vist i figur 7.7.



Figur 7.7: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\boldsymbol{\omega}(t) = (0,0,2\sin^2(t))$. Animeret.

Eksempel 7.26

Rotations-akse-vektoren $\boldsymbol{\omega} = (\cos(t), \sin(t), 1)$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er benyttet i figur 7.8. Rotations-løsningen er:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} . \tag{7.45}$$

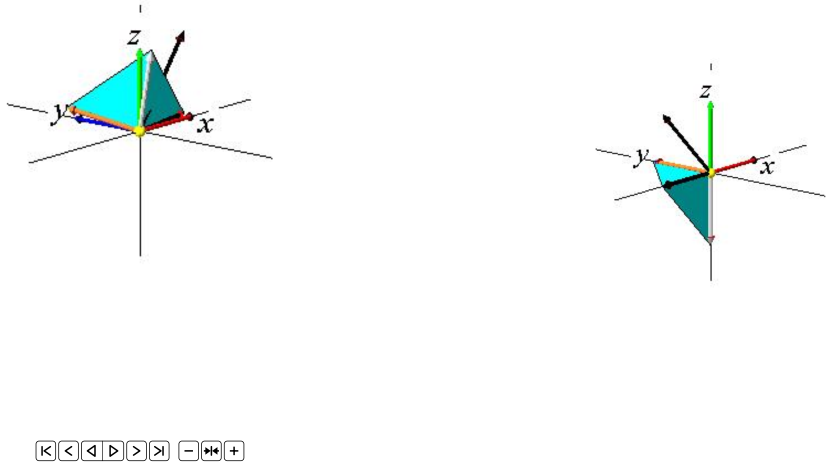
OPGAVE 7.27

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.26, ligning (7.45), er korrekt.

7.5 Outlook

Med de værktøjer, vi nu har kridtet banen op med, er vi parate til at undersøge, hvordan punkterne inde i et tetraeder $\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t))$ bevæger sig, når selve tetraederet fremkommer ved rotation af et basistetraeder med en rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, samtidig med at fodpunktet bevæges via en given forskrift $p(t)$.

For eksempel kan vi som en første naturlig opgave undersøge bevægelsen af et hjørnepunkt i tetraederet, for eksempel det hjørnepunkt $q(t)$, der er spidspunkt for $\mathbf{a}(t)$ når vi benytter $p(t)$ som



Figur 7.8: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\omega(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$. Animeret.

fodpunkt for $\mathbf{a}(t)$. Hvis vi kalder stedvektoren til $p(t)$ for $\mathbf{p}(t)$, så er stedvektoren til $q(t)$ givet ved:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{7.46}$$

Eksempel 7.28

Hvis vi betragter den konkrete rotation af basistetraederet, som stammer fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ i eksempel 7.4, dvs. den rotation, der er vist i figur 7.3, så er banekurven for $q(t)$ den kurve, der er vist i figur 7.9.

I et følgende kapitel vil vi blandt andet undersøge farten og retningen af bevægelsen af punktet $q(t)$, altså hastighedsvektoren for bevægelsen af punktet til ethvert tidspunkt t.

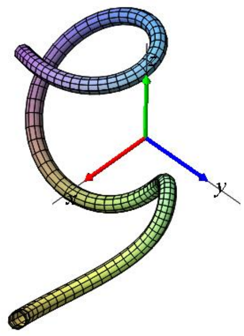
Bemærk, at farten og retningen af bevægelsen af fodpunktet $p(t)$ er direkte givet ved den tidsafledede af stedvektoren til $p(t)$:

$$\mathbf{p}'(t) = (p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t)) \quad , \tag{7.47}$$

og helt tilsvarende har vi fra 7.46

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad . \tag{7.48}$$

Da $\mathbf{a}(t)$ er fremkommet ved at gange $\mathbf{R}(t)$ på koordinatsøjlen for den første kantvektor i basistetraederet, altså for basisvektoren $\mathbf{i}$, så er koordinatsøjlen for $\mathbf{a}(t)$ præcis den første søjle i $\mathbf{R}(t)$.



Figur 7.9: Banekurve for hjørnepunkt i det roterede tetraeder i figur 7.3

Vektoren $\mathbf{a}(t)$ er altså (når vi betragter rotationer) den vektor, som vi har kaldt $\mathbf{e}(t)$ i ligning 7.34. Det vil sige, at

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{e}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \tag{7.49}$$

men så har vi jo fra ligning (7.37), at

$$\mathbf{q}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \tag{7.50}$$

hvor $\boldsymbol{\omega}(t)$ er den til rotationen $\mathbf{R}(t)$ associerede akse-vektor-funktion. Tilsvarende udtryk etableres lige så let for hastighederne af bevægelsen af de to resterende hjørnepunkter i tetraederet.

Kapitel 8

Styring langs krumme kurver

I dette kapitel vil vi som lovet se nærmere på, hvordan vi kan benytte fodpunktskurven $p(t)$ og fodpunktskurvens geometriske egenskaber, såsom krumning og torsion (der defineres nedenfor), til at kontrollere og styre bevægelserne af tetraedrene i rummet. Selve styringen af tetraederne beskrives først til allersidst – i afsnit 8.6.

8.1 Tids-parametriserede regulære kurver

Vi repeterer lidt fra kapitel 7: Et punkt p der bevæger sig i rummet har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem $\{O,x,y,z\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad , \tag{8.1}$$

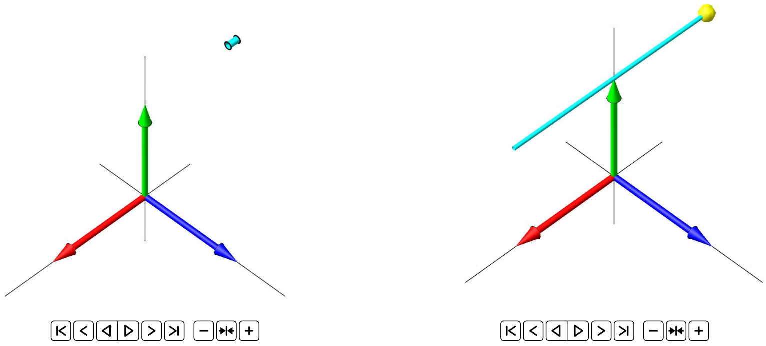
hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet, f.eks. $I = [a,b]$, og hvor $p_1(t)$, $p_2(t)$ og $p_3(t)$ er 3 funktioner af t. Vi vil typisk antage, at disse tre koordinatfunktioner er glatte funktioner, dvs. de kan differentieres et vilkårligt antal gange.

Stedvektoren fra O til punktet $p(t)$ betegnes naturligvis med vektor-notation som følger, idet koordinaterne for stedvektoren opløst efter basisvektorerne $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ netop er de samme som (x,y,z)-koordinaterne for $p(t)$. Derved får vi (sted)-vektor-funktionen $\mathbf{p}(t)$ til beskrivelse af bevægelsen langs kurven:

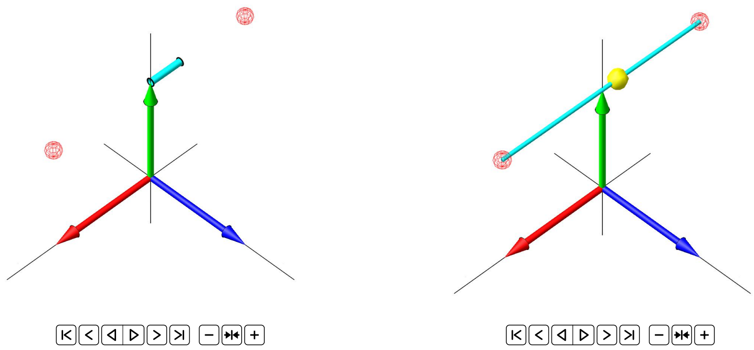
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \ , \ t \in I \quad . \tag{8.2}$$

OPGAVE 8.1

En cirkel $\mathcal{C}$ i (x,y)-planen er bestemt ved at cirklens radius er 3 og cirklens centrum ligger i punktet $(2,1,0)$. Bestem en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), 0)$ af cirklen med tilhørende tidsinterval I således at punktet $p(t)$ (dvs. spidspunktet af $\mathbf{p}(t)$) gennemløber cirklen netop én gang.



Figur 8.1: Simpel konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet. Animeret.



Figur 8.2: Singulær og selv-overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figur 8.1. Animeret.

Definition 8.2 En parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$, $t \in I$, af en kurve er en regulær parameterfremstilling hvis

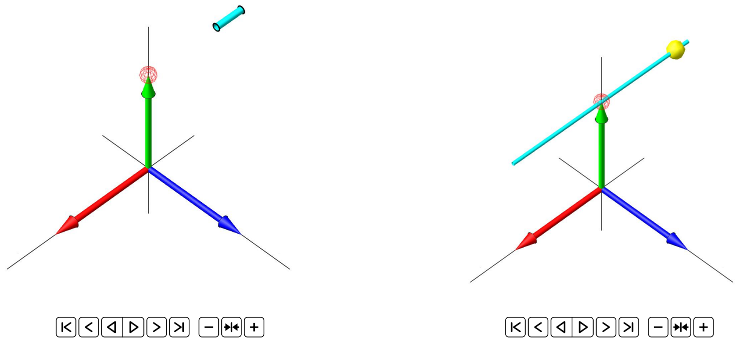
$$\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle } t \in I \quad . \tag{8.3}$$

Parameterfremstillingen er tilsvarende singulær for $t = t_0 \in I$ hvis $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$.

OPGAVE 8.3

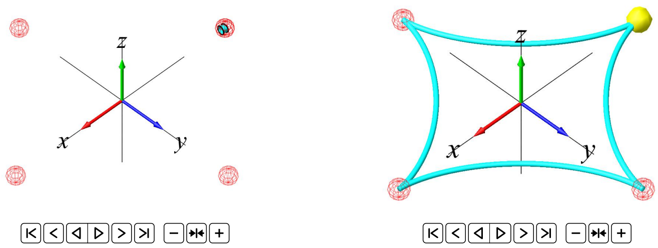
I figurerne 8.2 og 8.3 markerer de røde punkter singulære punkter for den anvendte og animerede parameterfremstilling. Konstruér singulære parameterfremstillinger af den viste rette linje, sådan at de singulære punkter for dine parameterfremstillinger optræder netop i de viste punkter.

En given kurve har uendelig mange meget forskellige parameterfremstillinger. Selv om en given kurve (f.eks. en ret linje) har en regulær parameterfremstilling, så behøver ikke alle parameterfremstillinger af den samme kurve at være regulære.



Figur 8.3: Singulær men *ikke* overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figurerne 8.1 og 8.2. Animeret.

Nogle kurver, som f.eks. asteroiden, $\mathbf{p}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$ som er vist i figur 8.4, har ikke nogen som helst parameterfremstilling, der er regulær overalt. Se f.eks. http://en.wikipedia.org/wiki/Astroid.



Figur 8.4: Konstruktion af – og bevægelse på – en asteroidekurve (i (x,y)-planen). Denne parametrisering har 4 singulære punkter. Enhver parametrisering har mindst disse 4 singulære punkter. Animeret.

8.2 Buelængde-parametriserede kurver

Med henblik på at gøre *analysen* af kurverne meget lettere vil vi nedenfor ofte antage, hvor det er muligt, at de kurver vi betragter, er parametriserede på en sådan måde, at farten er konstant 1, dvs. at hastighedsvektoren $\mathbf{p}'(t)$ har konstant længde 1. Den antagelse kan vi udtrykke på forskellige måder:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}'(t)\| &= 1 \\
\|(p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t))\| &= 1 \\
\sqrt{p_1'^2(t) + p_2'^2(t) + p_3'^2(t)} &= 1 \\
\sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)} &= 1 \\
\|(v_1(t), v_2(t), v_3(t))\| &= 1 \\
\|\mathbf{v}(t))\| &= 1 \quad ,
\end{aligned} \tag{8.4}$$

hvor vi også har indført og brugt betegnelsen $\mathbf{v}(t)$ for hastighedsvektoren ($\mathbf{v}$ for velocity) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$.

OPGAVE 8.4

Hvilke af følgende kurver, som er angivet ved stedvektor-funktionerne $\mathbf{p}(t)$, har konstant fart 1 ? Alle tidsintervaller er hele den reelle talakse $\mathbb{R}$.

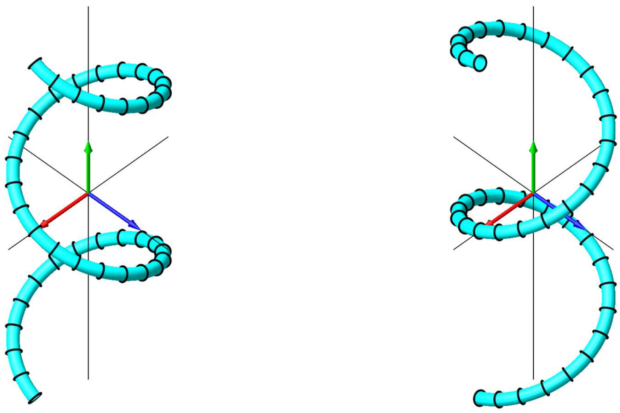
$$\begin{aligned}
i) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, 1, t) \\
ii) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, t, t^2) \\
iii) &\quad \mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3) \\
iv) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, \cos(t), \sin(t)) \\
v) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, 2\cos(t), 2\sin(t)) \\
vi) &\quad \mathbf{p}(t) = (1, \cos(2t), \sin(2t)) \\
vii) &\quad \mathbf{p}(t) = (t, \cos(t), \sin(t)) \\
viii) &\quad \mathbf{p}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right) \quad .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

OPGAVE 8.5

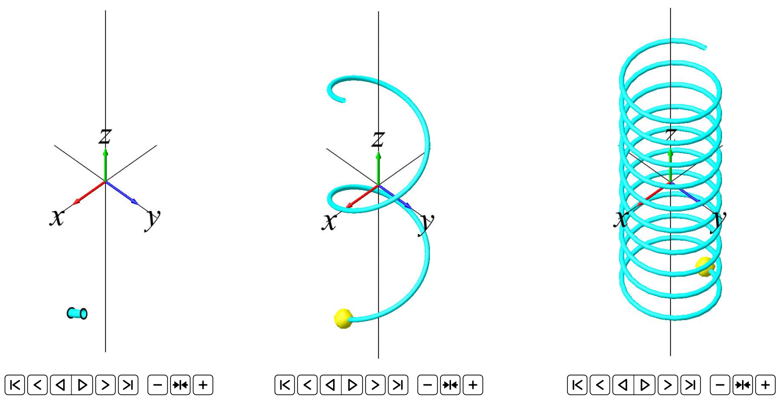
En kurve - en såkaldt helix eller vindellinje - er givet som følger, hvor a og b betegner to konstanter, der ikke begge er 0:

$$\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.6}$$

1. Tegn (eller plot) selv kurven for forskellige valg af a og b. Se eksempler i figurerne 8.5 og 8.6.
2. Forklar, hvorfor det er rimeligt, at den ene kurve i figur 8.5 kaldes højreskruet og den anden venstreskruet.
3. Undersøg hvilke værdier for a og b der giver højreskruning og hvilke der giver venstreskruning. Prøv evt. først med $(a,b) = (1,1)$, $(a,b) = (1,-1)$, $(a,b) = (-1,1)$, $(a,b) = (-1,-1)$.
4. Find for enhver værdi af a og b farten $\|\mathbf{p}'(t)\|$ af den tilhørende bevægelse langs kurven udtrykt ved a og b når bevægelsesforskriften er den ovenfor givne $\mathbf{p}(t)$.



Figur 8.5: En venstreskruet og en højreskruet helix.



Figur 8.6: Konstruktion af – og bevægelse på – vindellinjer. Vindellinjen til højre er venstreskruet med lille 'pitch' (dvs. den højde som punktet løftes ved én omgang) og forholdsvis høj konstant fart. Animeret.

8.2.1 Hvordan omparametriseres til buelængde?

Regulære kurver kan omparametriseres til buelængde-parametrisering:

Sætning 8.6 En given regulær kurve $\mathbf{p}(t)$, $t \in I = [a,b]$, med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle $t \in I$ omparametriseres ved hjælp af funktionen $S(t)$ som er givet ved:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{p}'(u)\|\, du \quad \text{for alle } t \in I = [a,b] \quad , \tag{8.7}$$

hvor $t_0 \in [a,b]$ er et fast valgt startpunkt (t_0 behøver ikke at være a) for integrationen.

Funktionen $S(t)$ er en voksende glat funktion på hele t-intervallet $[a,b]$, så der findes en omvendt funktion $T(s)$ som ligeledes er en voksende glat funktion på hele det tilsvarende s-interval $S(I) = [S(a), S(b)] = [\alpha, \beta]$.

Den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ har farten $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$.

Den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ er dermed buelængdeparametriseret fordi s måler præcis buelængden med fortegn af kurvestykket fra punktet $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}(T(0)) = \boldsymbol{\eta}(0)$ til punktet $\mathbf{p}(T(s)) = \boldsymbol{\eta}(s)$ på kurven. Fortegnet på s afgøres af om punktet $\boldsymbol{\eta}(s)$ ligger før (så er $s < 0$) eller efter (så er $s > 0$) startpunktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ på kurven.

Længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet $\mathbf{p}(T(s_1)) = \boldsymbol{\eta}(s_1)$ og punktet $\mathbf{p}(T(s_2)) = \boldsymbol{\eta}(s_2)$ er derfor $L = |s_2 - s_1|$. Dette gør det naturligvis igen rimeligt at sige, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ buelængde-parametriseret.

Bemærk, at funktionen $S(t)$ sagtens kan antage negative værdier i intervallet $t \in [a,b]$ – det forekommer jo netop i de tilfælde hvor $t_0 > a$ således at $S(t) < 0$ for alle $t < t_0$ ifølge definitionen af $S(t)$ i (8.7).

Bevis

Funktionen $S(t)$ er en voksende funktion: Det følger af, at $S'(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$ på hele t-intervallet $[a,b]$. Da $T(s)$ er defineret til at være den omvendte funktion af $S(t)$ har vi per den definition: $T(S(t)) = t$ for alle $t \in [a,b]$ og $S(T(s)) = s$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$. Specielt har vi derfor også (fra kædereglen eller direkte fra differentiationsreglen for omvendte funktioner):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(S(t)) &= 1 \\ S'(t) \cdot T'(s) &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Vi kan nu bruge det til at vise, at farten af $\boldsymbol{\eta}(s)$ er 1, altså at $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle $s \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\| &= \|\frac{d}{ds} \boldsymbol{\eta}(s)\| \\ &= \|\frac{d}{ds} \mathbf{p}(T(s))\| \\ &= |T'(s)| \cdot \|\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)_{|_{t=T(s)}}\| \\ &= |T'(s)| \cdot \|\mathbf{p}'(t)_{|_{t=T(s)}}\| \\ &= |T'(s) \cdot S'(t)| \\ &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Og heraf følger dernæst endelig, at længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet $\mathbf{p}(T(s_1)) =$

$\eta(s_1)$ og punktet $\mathbf{p}(T(s_2)) = \eta(s_2)$ er $L = |s_2 - s_1|$. Vi har nemlig:

$$\begin{aligned} L &= \left| \int_{s_1}^{s_2} \|\eta'(s)\| \, ds \right| \\ &= \left| \int_{s_1}^{s_2} 1 \, ds \right| \\ &= |s_2 - s_1| \quad . \end{aligned} \tag{8.10}$$

■

Sætning 8.6 kan tolkes således: Hvis det er muligt at køre på en vej uden at stoppe op (men med tilladte accelerationer og decelerationer), så er det også muligt at køre med konstant fart på den samme vej hele vejen fra den ene ende til den anden. Hvis farten er konstant 1 så kan man aflæse tiden på kilometertælleren og man kan aflæse det kørte antal kilometer på sit stopur. (Hvorfor og hvordan?)

Det er ikke muligt at køre på asteroiden uden at stoppe op mindst i de 4 singulære punkter, som er fremhævet i figur 8.4.

Eksempel 8.7

Vi ser på en simpel tidsparametriseret regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ og omparametriserer den på følgende måde:

$$\mathbf{p}(t) = (3t - 1\,,\ 3t - 2\,,\ 0)\ ,\ t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (3, 3, 0) \\ \|\mathbf{p}'(t)\| &= 3\sqrt{2} \\ S(t) &= \int_{t_0=0}^{t} 3\sqrt{2}\, du \quad , \quad \text{ved valg af integrationsstart i } t_0 = 0 \\ S(t) &= 3\sqrt{2}\, t \\ T(s) &= \frac{s}{3\sqrt{2}} \quad , \quad \text{den omvendte funktion} \quad , \end{aligned} \tag{8.11}$$

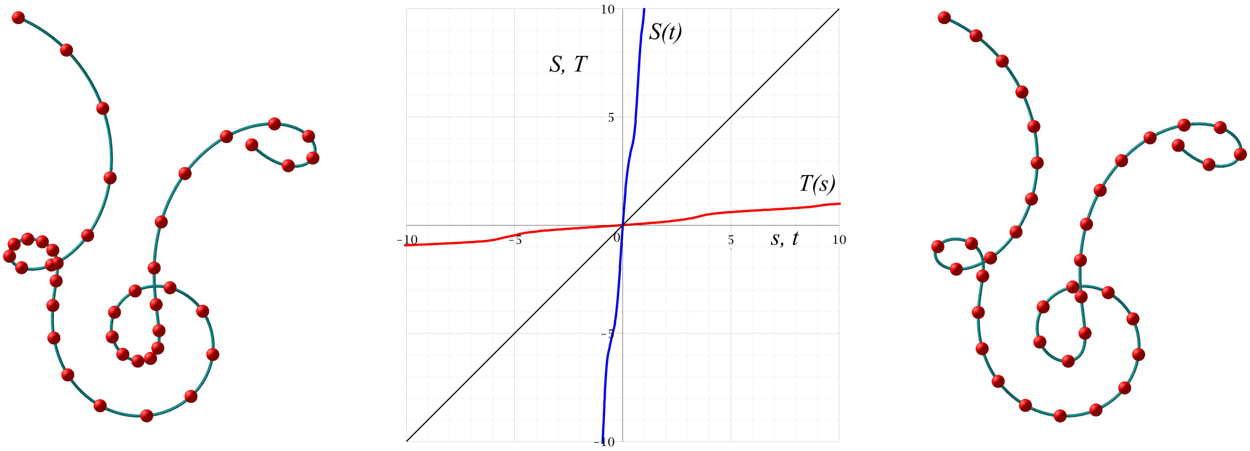
således at vi nu får den buelængde parametriserede kurve ved at indsætte $T(s)$ på t-pladsen i $\mathbf{p}(t)$:

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \mathbf{p}(T(s)) = (3T(s) - 1\,,\ 3T(s) - 2\,,\ 0)\ ,\ s \in [S(0), S(1)] = [0, 3\sqrt{2}] \\ \eta(s) &= \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1\,,\ \frac{s}{\sqrt{2}} - 2\,,\ 0 \right)\ ,\ s \in [0, 3\sqrt{2}] \quad . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Det kan være umuligt at finde både funktionen $S(t)$ og den omvendte funktion $T(s)$ udtrykt ved sædvanlige funktionstegn. Begge funktionerne kan dog approksimeres vilkårligt godt f.eks. med spline funktioner.

OPGAVE 8.8

Se Maple's kommando [Spline] via Maple pakken [> with(CurveFitting);]. Find ud af, hvordan [Spline] kommandoen kan benyttes til at finde vilkårligt gode approksimationer til begge funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ ud fra en passende valgt sekvens af punkter på grafen for $S(t)$.



Figur 8.7: En plan kurve $\mathbf{p}(t)$ med tids-parametriseret markering til venstre og buelængde-parametriseret markering $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ til højre. I midten: Funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ for kurven. Bemærk, at her er $T(0) = S(0)$ og derfor $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{p}(0)$.

OPGAVE 8.9

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende t-parametriserede kurve

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (t^3, 0, 0) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{8.13}$$

Vis, at den kurve *ikke* har positiv fart for alle t (parameterfremstillingen er altså ikke regulær), men at kurven (alligevel) kan omparametriseres til en enhedsfart-parametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s)) = (T(s)^3, 0, 0)$, som dermed er en regulær parametrisering.

OPGAVE 8.10

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende halv-cirkel med radius $a > 0$:

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (a\cos(t), a\sin(t), 0) \quad , \quad t \in [0, \pi] \quad . \tag{8.14}$$

1. Bestem $S(t)$ og den omvendte funktion $T(s)$ sådan at omparametriseringen $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$ giver en parametrisering af halvcirklen med enhedsfart.
2. Angiv et interval for parameteren s således at $\boldsymbol{\eta}(s)$ gennemløber præcis samme punktmængde som $\mathbf{p}(t)$, $t \in [0, \pi]$, netop én gang.

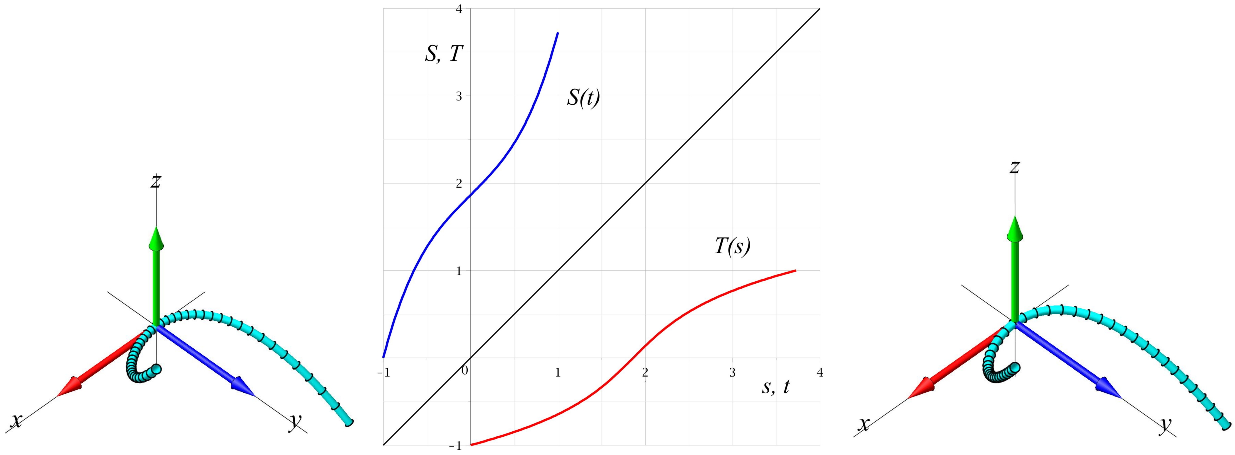
OPGAVE 8.11

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende kurve:

$$\mathbf{p}(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}) \quad , \quad t \in]-1,1[\quad . \tag{8.15}$$

Tegn (plot) kurven, og vis, at den faktisk allerede er enhedsfart-parametriseret.

Som allerede antydet: Når en kurve er enhedsfart-parametriseret vil vi ofte bruge notationen s for parameteren og betegnelsen $\boldsymbol{\eta}(s)$ for kurven med den parametrisering - eller bemærke eksplicit, om parametriseringen har enhedsfart eller ej.



Figur 8.8: Til venstre: Den t-parametriserede kurve $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [-1,1]$. I midten: Funktionerne $S(t)$ og $T(s)$ for kurven. Til Højre: Den s-parametriserede kurve. Sammenlign også med den plane kurve i figur 8.7 hvor forskellen mellem t-parametrisering og s-parametrisering er endnu tydeligere.

8.3 Krumning og torsion

I dette og de følgende afsnit vil vi definere krumning og torsion for regulære rumkurver.

Vi vil i begyndelsen antage, at rumkurven allerede *er* givet på buelængde-parametriseret form (og derefter – i afsnit 8.4 – bruge de fundne resultater til at vise hvordan krumning og torsion kan udtrykkes for en vilkårlig *tids-parametriseret version* af den samme kurve):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad s \in [\alpha, \beta] \quad . \tag{8.16}$$

Vi ønsker naturligt nok, at krumningen er en funktion af s, der fortæller hvor meget kurven bøjer i og omkring stedet $\boldsymbol{\eta}(s)$ og at torsionen er en funktion af s, der fortæller hvor meget kurven spiralerer i og omkring stedet $\boldsymbol{\eta}(s)$. Vi skal altså helst definere krumning sådan at en lille cirkel (med lille radius) har stor krumning og en stor cirkel (med stor radius) har lille krumning. Og vi skal definere torsionen sådan at de tidligere viste helix-vindellinjer har en torsion der på tilsvarende måde kan beskrive størrelsen af deres spiralering (snoning) samt fortælle, om de er højre- eller venstre-snoede.

Hermed har vi så allerede to naturlige spørgsmål:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?

2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det finder vi ud af nedenfor.

Hvis kurven ikke er givet på buelængde-parametriseret form, men måske kun råt som en regulær tids-parametriseret rumkurve $\mathbf{p}(t)$, så er der to muligheder for at bestemme kurvens krumning og torsion på ethvert sted $\mathbf{p}(t)$: Enten omparametriseres kurven til en buelængdeparametriseret form – og så kan formlerne fra dette og de efterfølgende fire afsnit benyttes – eller også bruges formlerne fra afsnit 8.4 direkte ved at regne på $\mathbf{p}(t)$ og de t-afledede af $\mathbf{p}(t)$. Det er nemlig ikke nødvendigt at omparametrisere først! Grunden til at vi indfører krumning og torsion ved hjælp af den buelængde-parametriserede version af kurven er dels, at det er meget lettere og dels, at den strategi (stort set) allerede viser, at de to funktioner kun afhænger af den regulære kurve selv – betragtet som en organiseret punktmængde i rummet – og ikke af hvilken parametrisering, der benyttes.

8.3.1 Krumning

Definition 8.12 For en given buelængde-parametriseret kurve $\eta(s)$ definerer vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \eta'(s) \quad \text{dette er enheds-tangentvektoren til kurven} \\ \kappa(s) &= \|\eta''(s)\| \quad \text{dette er definitionen på krumning: længden af accelerationsvektoren} \quad . \end{aligned} \tag{8.17}$$

Krumningen af kurven på stedet $\eta(s)$ defineres altså som længden af accelerationsvektoren når kurven er buelængde-parametriseret.

Hvis $\kappa(s) > 0$ kan vi definere en ny enheds-vektor $\mathbf{f}(s)$ ved hjælp af accelerationsvektoren $\eta''(s)$ således:

$$\mathbf{f}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\eta''(s) \quad , \quad \text{for} \quad \kappa(s) > 0 \quad , \tag{8.18}$$

og dermed endelig en tredje enhedsvektor $\mathbf{g}(s)$ ved hjælp af krydsproduktet af $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$:

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(\mathbf{s}) \times \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad , \quad \text{for} \quad \kappa(s) > 0 \quad . \tag{8.19}$$

Sætning 8.13 De tre vektorer som udover krumningen $\kappa(s)$ er defineret ovenfor (for $\kappa(s) > 0$) består af tre ortogonale enhedsvektorer, $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$.

De udgør derfor for ethvert s langs kurven en ny basis for vektorer i rummet – enhver vektor i rummet kan opløses på entydig måde efter vektorerne $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$. Vi kalder den nye basis Frenet–Serret basen for $\boldsymbol{\eta}(s)$ og betegner den sådan: $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$.

Bemærk, at Frenet–Serret basen afhænger af s og derfor typisk vil ændre sig afhængig af hvor på kurven vi befinder os. Det er illustreret med animationen i figur 8.12 (et godt stykke fremme i teksten).

OPGAVE 8.14

Bestem krumningen $\kappa(s)$ (for enhver værdi af s) for den allerede enhedsfart-parametriserede kurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (3\cos(s/3), 3\sin(s/3), 0) \quad , \quad s \in [0, 6\pi] \quad . \tag{8.20}$$

Bestem tilsvarende for enhver værdi af s de tre Frenet–Serret vektorer $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$. Vis, at de tre fundne vektorer i Frenet–Serret basen er ortogonale enhedsvektorer.

OPGAVE 8.15

Bestem krumningsfunktionen $\kappa(t)$, dvs. krumningen som funktion af t, for den kurve, der har t-parametriseringen

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad , \tag{8.21}$$

hvor $t \in]-1, 1[$. Vink: Se og brug resultatet fra opgave 8.11.

Begrundelsen, beviset, for sætning 8.13 kan ses således:

Bevis

Vektoren $\mathbf{e}(s) = \boldsymbol{\eta}'(s)$ er en enhedsvektor fordi den er hastighedsvektoren for den buelængdeparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$. Vektoren $\mathbf{f}(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)/\kappa(s)$ er en enhedsvektor fordi $\kappa(s)$ netop er længden af $\boldsymbol{\eta}''(s)$. Vektorerne $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ er ortogonale fordi

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{f}(s) &= \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}'(s) \\
&= \left(\frac{1}{2\,\kappa(s)}\right) \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s)) \\
&= \left(\frac{1}{2\,\kappa(s)}\right) \frac{d}{ds} (1)
\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$= 0 \quad .$$

Da $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ således er ortogonale enhedsvektorer, så er krydsproduktet $\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s)$ ligeledes en enhedsvektor, der står vinkelret på hver af de to vektorer $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$.

■

Eksempel 8.16

Vi lader $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne følgende kurve - en cirkel med radius $a > 0$ i $(x,y)-$planen - som er parametriseret med enhedsfart:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a), 0) \quad . \tag{8.23}$$

Så har vi følgende ingredienser til bestemmelse af krumningen og til konstruktion af Frenet–Serret basis:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\
\boldsymbol{\eta}''(s) &= (-\frac{1}{a}\cos(s/a), -\frac{1}{a}\sin(s/a), 0) \\
\kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| = \frac{1}{a} \\
\mathbf{f}(s) &= \frac{\boldsymbol{\eta}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\
\mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0,0,1) \quad .
\end{aligned} \tag{8.24}$$

8.3.2 Torsion

Den ovenfor indførte krumning $\kappa(s)$ er øjensynlig den faktor vi skal gange på $\mathbf{f}(s)$ for at få $\mathbf{e}'(s)$ (husk på, at $\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)$):

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{f}(s) \quad . \tag{8.25}$$

Torsionen $\tau(s)$ optræder på samme måde (pånær fortegnet!):

Definition 8.17 Lad $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne en buelængdeparametriseret kurve med $\kappa(s) > 0$ og Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$.

Så definerer vi torsionen $\tau(s)$ for kurven således:

$$\mathbf{g}'(s) = -\tau(s)\,\mathbf{f}(s) \quad . \tag{8.26}$$

Det er nok ikke på forhånd klart, at $\mathbf{g}'(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ altid er proportionale (hvad de jo skal være for at ovenstående definition 8.17 giver mening). Her er et lille argument for det:

Bevis

Vi skal indse, at $\mathbf{g}'(s)$ er parallel med $\mathbf{f}(s)$. Men det følger af, at $\mathbf{g}'(s)$ står vinkelret på enhedsvektoren $\mathbf{g}(s)$ (hvorfor det?) og at $\mathbf{g}'(s)$ også står vinkelret på $\mathbf{e}(s)$, hvilket følger af:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(s) &= \frac{d}{ds}(\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}(s)) \\ &= \left(\frac{d}{ds}\mathbf{e}(s)\right)\times\mathbf{f}(s)+\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{0}+\mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{e}(s)\times\mathbf{f}'(s) \\ &\perp \mathbf{e}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.27}$$

Da $\mathbf{g}'(s)$ står vinkelret på både $\mathbf{g}(s)$ og $\mathbf{e}(s)$, så må $\mathbf{g}'(s)$ være proportional med $\mathbf{f}(s)$. Og proportionalitetsfaktoren, torsionen, er derfor veldefineret i definition 8.17. Bemærk, at vi *har* brugt, at $\kappa(s) > 0$.

■

OPGAVE 8.18

Lad $\eta(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ betegne en enhedscirkel i (x, y)-planen. Hvad er torsionen for den kurve?

Da vi ved, at Frenet–Serret vektorerne $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$, udgør en basis for alle vektorer i rummet, så kan vi også udtrykke den afledede af $\mathbf{f}(s)$ som en kombination af de tre vektorer:

Sætning 8.19 Lad $\eta(s)$ være en buelængdeparametriseret kurve med krumning $\kappa(s) > 0$, torsion $\tau(s)$, og Frenet–Serret vektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$. Så gælder:

$$\mathbf{f}'(s) = -\kappa(s)\,\mathbf{e}(s) + \tau(s)\,\mathbf{g}(s) \quad . \tag{8.28}$$

Vi får altså ikke nye oplysninger ved at differentiere $\mathbf{f}(s)$.

OPGAVE 8.20

Lad $\eta(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$ betegne en vindellinje i rummet.

1. Hvad er krumning og torsion for den kurve?
2. Bestem Frenet–Serret basis for kurven for ethvert s.
3. Eftervis, at ligning (8.28) er opfyldt i dette tilfælde.

OPGAVE 8.21

Vis ligningen (8.28) og dermed sætning 8.19 helt generelt.

8.3.3 Opsamling for buelængde-parametriserede kurver

Vi samler definitioner og resultater om krumning, torsion, og Frenet–Serret basis for buelængde-parametriserede kurver i følgende sætning. Hvis en given kurve *ikke* er buelængde-parametriseret, så gå straks til den tilsvarende mere generelle sætning for tids-parametriserede kurver i afsnit 8.4, sætning 8.25.

Sætning 8.22 En kurve med parameterfremstillingen $\boldsymbol{\eta}(s)$ og *enhedsfart* $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$ for alle s, har krumning $\kappa(s)$, torsion $\tau(s)$, og Frenet–Serret vektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ givet ved følgende udtryk (vi antager, at krumningen er strengt positiv for alle s, $\kappa(s) > 0$):

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| \\ \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)}\left(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \quad , \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{\eta}''(s) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.30}$$

De tre Frenet–Serret vektorfunktioner tilfredsstiller følgende ligninger, hvor $\kappa(s) > 0$ betegner kurvens krumning, og $\tau(s)$ betegner kurvens torsion.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= \qquad\quad \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= \qquad -\tau(s)\mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.31}$$

Bevis

Bemærk, at med de givne definitioner af $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{g}(s)$, og $\kappa(s)$ er det faktisk kun det eksplicitte udtryk for torsionen $\tau(s)$, vi mangler at vise.
Ligningen

$$\left(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) = \kappa^2(s)\tau(s) \tag{8.32}$$

fås af følgende ingredienser:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \boldsymbol{\eta}'''(s) &= \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)\mathbf{f}'(s) = \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)\left(-\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s)\right) \\ \boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{f}(s) = \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 0 \quad , \quad \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{g}(s) = 1 \quad . \end{aligned} \tag{8.33}$$

Bemærk rumproduktet i udtrykket for torsionen:

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)}\left(\boldsymbol{\eta}'(s)\times\boldsymbol{\eta}''(s)\right)\cdot\boldsymbol{\eta}'''(s) \\ &= \frac{1}{\kappa^2(s)}\mathrm{Rum}\left(\boldsymbol{\eta}'(s),\boldsymbol{\eta}''(s),\boldsymbol{\eta}'''(s)\right) \quad .\end{aligned} \tag{8.34}$$

OPGAVE 8.23

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Konstanten a antages at være forskellig fra 0, men b kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, og opgave 8.30.

1. Bestem en enhedsfart parametrisering $\boldsymbol{\eta}(s)$ af kurven og brug dén i de følgende to delopgaver.
2. Bestem Frenet–Serret basisvektorfunktionerne $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ for kurven.
3. Bestem kurvens krumning $\kappa(s)$ og torsion $\tau(s)$ for enhver værdi af a og enhver værdi af b.

Dermed har vi nu besvaret de to (nu elementære) spørgsmål fra tidligere:

De to naturlige spørgsmål var:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?
2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det har vi nu fundet ud af!

8.3.4 Den lokale kurve-form

Hvilken indflydelse har krumning og torsion på en kurves forløb i rummet? Hvordan inspicerer vi en given kurve omkring et givet punkt med henblik på at 'se' hvor meget krumning og torsion kurven 'har' i punktet? Det kan vi på følgende måde ved udnyttelse af buelængdeparametrisering og Frenet–Serret basis:

Vi lader $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne en buelængdeparametriseret kurve med positiv krumning. Ved at Taylor-udvikle kurvens koordinatfunktioner med udviklingspunktet $s = 0$ til tredje orden får vi følgende, hvor $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ betegner en epsilon-vektor-funktion med egenskaben $\boldsymbol{\varepsilon}(s) \to \mathbf{0}$ for $s \to 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(s) &= s\,\boldsymbol{\eta}'(0) + \frac{s^2}{2}\,\boldsymbol{\eta}''(0) + \frac{s^3}{6}\,\boldsymbol{\eta}'''(0) + s^3\boldsymbol{\varepsilon}(s) \\ &= \left(s - \kappa^2(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{e}(0) + \left(\kappa(0)\frac{s^2}{2} + \kappa'(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{f}(0) + \left(\kappa(0)\,\tau(0)\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{g}(0) + s^3\boldsymbol{\varepsilon}(s) \quad . \end{aligned} \tag{8.35}$$

OPGAVE 8.24

Hvad er $\boldsymbol{\eta}'''(s)$ udtrykt ved Frenet–Serret basis samt $\kappa(s)$, $\kappa'(s)$ og $\tau(s)$? Og hvordan er det udtryk benyttet i ovenstående? Vink: Se ligningerne i (8.33).

I Frenet–Serret basen $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$ kan kurven nu lokalt udtrykkes ved de approksimerende koordinatfunktioner, hvor vi kun benytter de lavest forekommende potenser af s for hver koordinatfunktion fra Taylor-udviklingen i (8.35):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (\widehat{x}(s), \widehat{y}(s), \widehat{z}(s)) = \left(s\,,\;\left(\frac{\kappa(0)}{2}\right)s^2\,,\;\left(\frac{\kappa(0)\,\tau(0)}{6}\right)s^3\right) \tag{8.36}$$

Vi isolerer og eliminerer dernæst s af ovenstående ligning og får de simple koordinatrelationer:

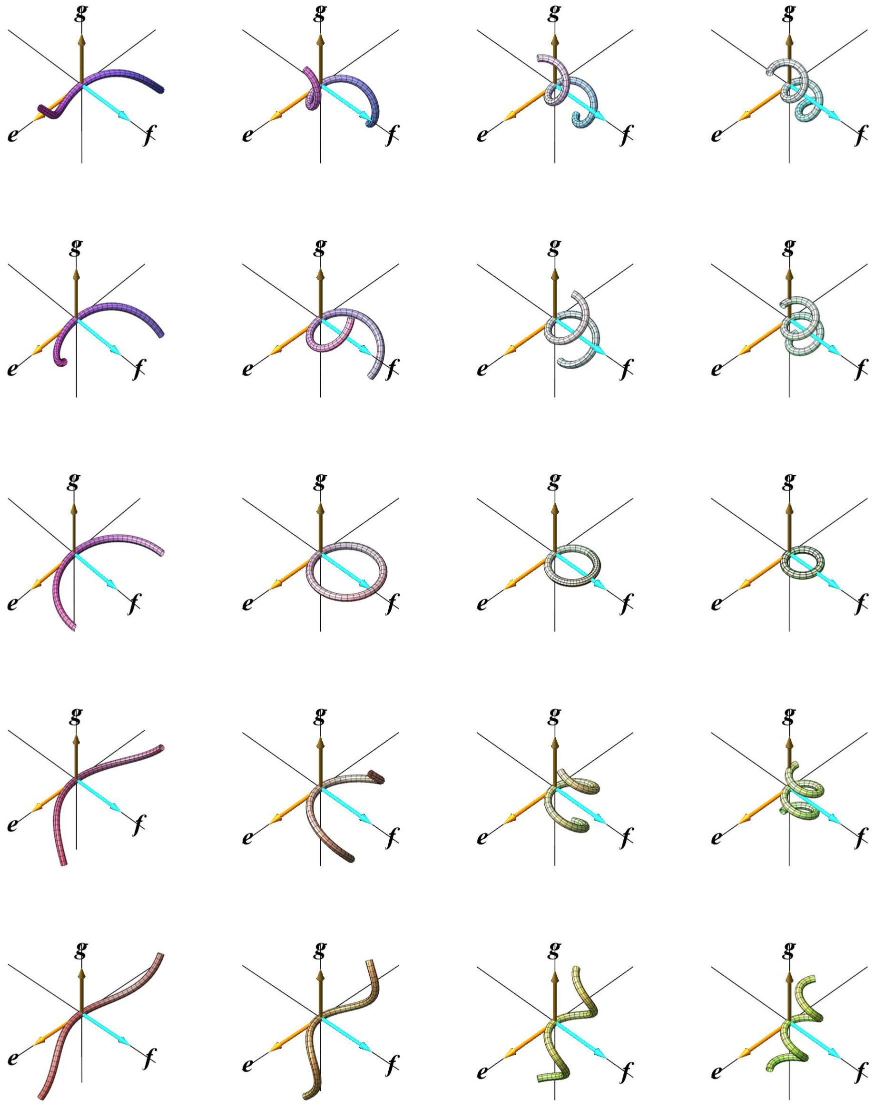
$$\begin{aligned} \widehat{y} &= \left(\frac{1}{2}\cdot\kappa(0)\right)\cdot\widehat{x}^2 \\ \widehat{y}^3 &= \left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\kappa(0)}{\tau^2(0)}\right)\cdot\widehat{z}^2 \\ \widehat{z} &= \left(\frac{1}{6}\cdot\kappa(0)\cdot\tau(0)\right)\cdot\widehat{x}^3 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Specielt får vi altså heraf, at enhver kurve, der plottes i sin egen Frenet–Serret basis projiceres approksimativt på en parabel i $(\widehat{x}, \widehat{y})$-planen og på en tredjegradskurve i $(\widehat{x}, \widehat{z})$-planen.

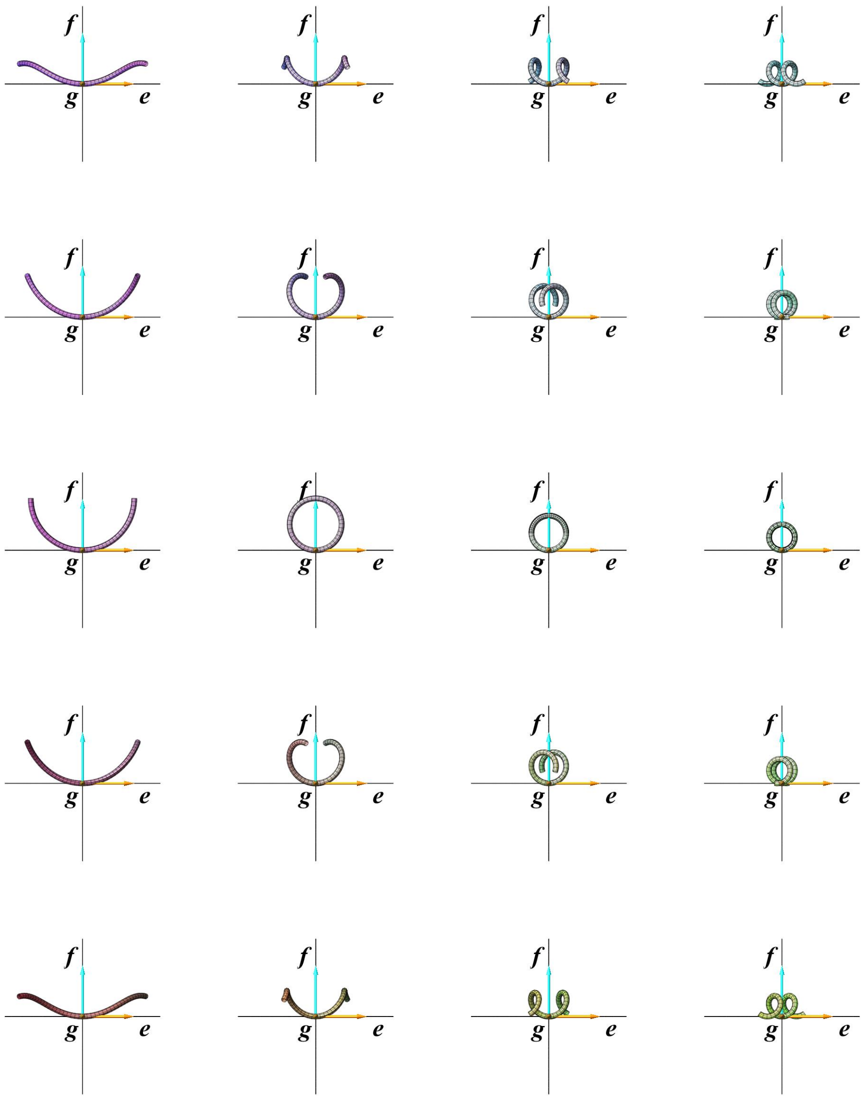
Parablens koefficient på $\widehat{x}^2$ er $\kappa(0)/2$, så krumningen af kurven $\boldsymbol{\eta}(s)$ i punktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ kan således aflæses af parablen. Tredjegradskurvens koefficient på $\widehat{x}^3$ er $\kappa(0)\cdot\tau(0)/6$, så torsionen af kurven $\boldsymbol{\eta}(s)$ i punktet $\boldsymbol{\eta}(0)$ kan dermed også aflæses af tredjegradskurven - når vi kender krumningen $\kappa(0)$.

Hvis buelængdeparametriseringen $\boldsymbol{\eta}(s)$ er givet og der ønskes en lokal undersøgelse som ovenfor men i det punkt der svarer til $s = s_0$, hvordan ser udtrykkene i ligningerne (8.35), (8.36), og (8.37) så ud?

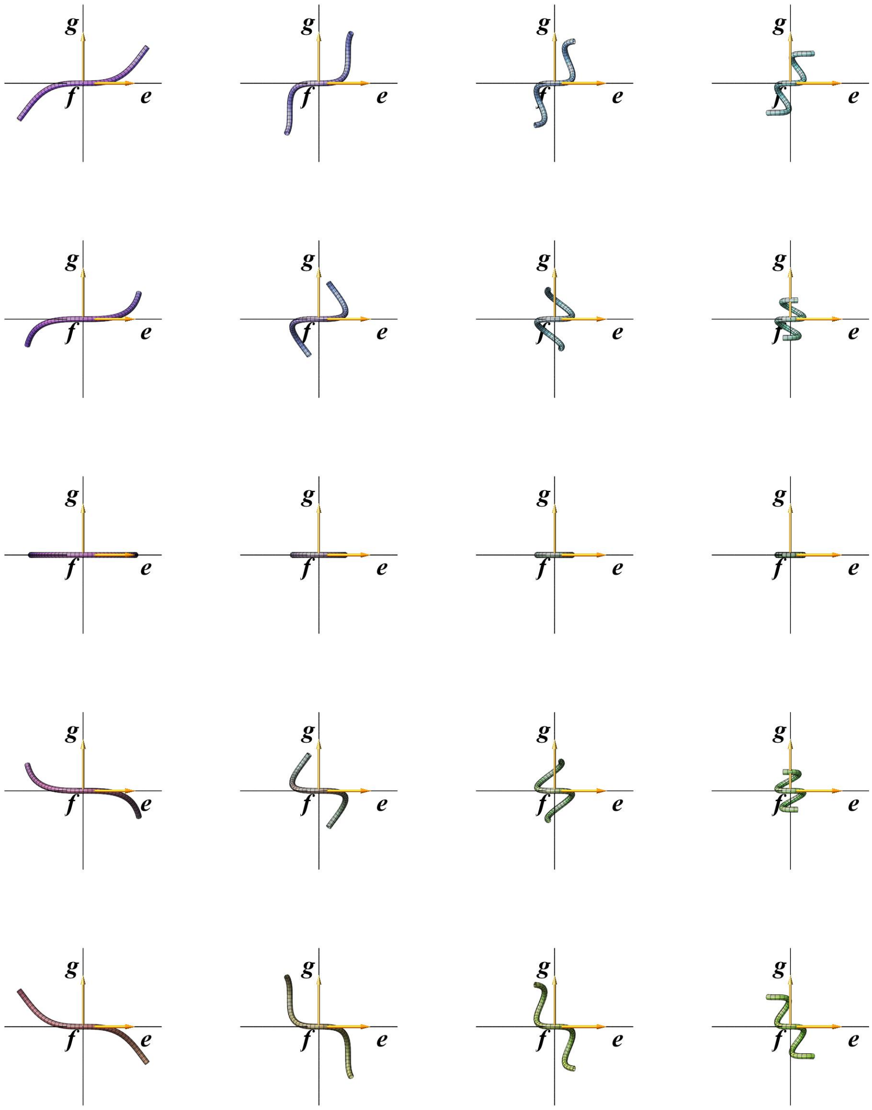
Den lokale inspektion af krumning og torsion i Frenet–Serret basen for punkter på vindellinjer med forskellige værdier af krumning og torsion er illustreret i figurerne 8.9, 8.10 og 8.11 samt eksempel 8.27 nedenfor. Se også en tilsvarende matrix med vindellinjerne i det almindelige koordinatsystem i figur 8.16 og den tilhørende inspektionsopgave 8.31.



Figur 8.9: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis.



Figur 8.10: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs **g**-aksen, således at den halve krumning $\kappa(0)/2$ hermed kan 'aflæses' som koefficienten på $\widehat{x}^2$ i det approksimerende andengradspolynomium i punktet $\mathbf{p}(0)$.



Figur 8.11: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs **f**-aksen, således at $\kappa(0) \cdot \tau(0)/2$ hermed kan 'aflæses' som koeffficienten på $\hat{x}^3$ i det approksimerende tredjegradspolynomium i punktet $\mathbf{p}(0)$.

8.4 Krumning og torsion for tids-parametriserede kurver

Som allerede antydet ovenfor kan det være en besværlig sag at finde en enhedsfart-parametrisering, en s-parametrisering, af en given kurve ud fra en given t-parametrisering af kurven. Heldigvis kan vi alligevel forholdsvis enkelt beregne Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ og krumningen $\kappa(t)$, og torsionen $\tau(t)$ i et vilkårligt punkt $\mathbf{p}(t)$ på kurven *som funktioner af den givne tids-parameter* t.

Det er samlet i følgende helt generelle sætning:

8.4.1 Krumning, torsion og Frenet–Serret basis for tidsparametriserede kurver

Sætning 8.25 En regulær kurve med parameterfremstillingen $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t har krumning, torsion, og Frenet–Serret vektorer givet ved følgende udtryk, hvor $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$ betegner farten af den tilhørende bevægelse:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|}{v^3(t)}$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \tag{8.38}$$

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \tag{8.39}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \quad .$$

Bemærk, at $\mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ beregnes lettest før $\mathbf{f}(t)$. Frenet–Serret vektorfunktionerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ tilfredsstiller nu følgende ligninger, hvor $\kappa(t)$ betegner kurvens krumning, $\tau(t)$ betegner kurvens torsion, og $v(t)$ farten af bevægelsen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \phantom{-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) +} v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= \phantom{-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t)} - v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.40}$$

Bemærk igen hvordan rumproduktet af de tre første afledede af $\mathbf{p}(t)$ optræder i udtrykket for torsionen i ligning (8.38), jvf. (8.34).

Beviset for denne generelle sætning for tids-parametriserede kurver bygger direkte på de tidligere fundne udtryk for buelængde-parametriserede kurver i sætning 8.22:

Bevis. Da den givne kurve $\mathbf{p}(t)$ er antaget at være regulær, så kan vi *buelængdeparametrisere* kurven, jvf. afsnit 8.2.1, sætning 8.6:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s)) \quad . \tag{8.41}$$

Bemærk, at vi kan – og vil – bruge denne buelængde-omparametrisering af kurven i dette bevis uden faktisk at *beregne* eller *kende* det konkrete funktions-udtryk for $T(s)$ (eller det konkrete funktionsudtryk for $S(t)$). Det er kun *eksistensen* af disse funktioner vi benytter i beviset – ikke deres konkrete udtryk. Sætningen, som vi beviser her, kan altså derefter frit benyttes uden at vi kender disse funktioner eksplicit.

Da $\boldsymbol{\eta}(s)$ er buelængdeparametriseret gælder alle resultaterne i sætning 8.6 som vi nu blot skal fortolke til kurvens tids-parametriserede version. Det gøres direkte ved at beregne de første tre s-afledede af $\boldsymbol{\eta}(s)$ og udtrykke dem som T-afledede af $\mathbf{p}(T(s))$ via kædereglen:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)\right)\cdot\left(\frac{d}{ds}T(s)\right) = \mathbf{p}'(t)\cdot\frac{1}{v(t)} \quad , \tag{8.42}$$

hvor vi har benyttet at $T(s) = t$ og $T'(s) = 1/S'(t) = 1/\|\mathbf{p}'(t)\| = 1/v(t)$. Derefter er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= \left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}'(t)\cdot\frac{1}{v(t)}\right)\right)\cdot\frac{1}{v(t)} \\ &= \mathbf{p}''(t)\cdot\frac{1}{v^2(t)} - \left(\mathbf{p}'(t)\cdot\frac{v'(t)}{v^3(t)}\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.43}$$

Da $\boldsymbol{\eta}''(s)$ er ortogonal på $\boldsymbol{\eta}'(s)$, så er $\boldsymbol{\eta}''(s)$ også ortogonal på $\mathbf{p}'(t)$ sådan at $\boldsymbol{\eta}''(s)$ og $\mathbf{p}'(t)/v(t)$ udspænder et rektangel med arealet:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\times\left(\frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}\right)\| \\ &= \frac{\|\mathbf{p}''(t)\times\mathbf{p}'(t)\|}{v^3(t)} \quad , \end{aligned} \tag{8.44}$$

idet $\mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}'(t) = \mathbf{0}$. Dermed følger nu udtrykket for krumningen af kurven:

$$\kappa(t) = \kappa(T(s)) = \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| = \frac{\|\mathbf{p}''(t)\times\mathbf{p}'(t)\|}{v^3(t)} \quad . \tag{8.45}$$

For at vise udtrykket for torsionen benytter vi (igen):

$$\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{v^3(t)} \tag{8.46}$$

og observerer, at denne vektor er ortogonal på både $\mathbf{p}'(t)$ og $\mathbf{p}''(t)$ således at kun de elementer i $\boldsymbol{\eta}'''(s)$, som ikke er kombinationer af disse to vektorer, kan bidrage til rumproduktet $(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s)$. Men vi har jo netop at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}'''(s) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}''(t) \cdot \frac{1}{v^2(t)} - \left(\mathbf{p}'(t) \cdot \frac{v'(t)}{v^3(t)}\right)\right) \cdot \frac{1}{v(t)} \\ &= \mathbf{p}'''(t) \cdot \frac{1}{v^3(t)} + (*_1) \cdot \mathbf{p}''(t) + (*_2) \cdot \mathbf{p}'(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.47}$$

hvor vi ikke behøver at kende faktorerne $(*_i)$, således at

$$(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) = (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) \cdot \frac{1}{v^6(t)} \quad . \tag{8.48}$$

Dermed har vi også vist udtrykket for torsionen:

$$\begin{aligned} \tau(t) = \tau(T(s)) &= \frac{1}{\kappa^2(t)} \cdot (\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \\ &= \frac{1}{\kappa^2(t) \cdot v^6(t)} \cdot (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) \\ &= \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad . \end{aligned} \tag{8.49}$$

Formlerne for Frenet–Serret basis vektorerne fås ligeledes:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(T(s)) = \boldsymbol{\eta}'(s) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)\right) \cdot \left(\frac{1}{v(t)}\right) = \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)} \quad , \tag{8.50}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(T(s)) &= \frac{1}{\kappa(s)} \cdot (\mathbf{e}(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \\ &= \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \left(\left(\frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}\right) \times \boldsymbol{\eta}''(s)\right) \\ &= \frac{1}{\kappa(t) \cdot v^3(t)} \cdot (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \\ &= \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad , \end{aligned} \tag{8.51}$$

og dermed, da Frenet–Serret basen er ortogonal, positivt orienteret og består af enhedsvektorer:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad . \tag{8.52}$$

De t-afledede af Frenet–Serret basens vektorer fås igen ved simpel anvendelse af kædereglen. For eksempel:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}(S(t))\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds}\mathbf{e}(s)\right)\cdot\frac{dS(t)}{dt} \\ &= \kappa(S(t))\cdot\mathbf{f}(S(t))\cdot v(t) \\ &= v(t)\cdot\kappa(t)\cdot\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.53}$$

□

OPGAVE 8.26

Vis, at ovenstående udtryk i sætning 8.25 lige præcis reducerer til dem vi fandt i sætning 8.22 når kurven $\mathbf{p}(t)$ er parametriseret med enhedsfart $v(t) = 1$ for alle t.

Eksempel 8.27

Vi betragter den plane kurve, en parabel, der er givet som grafen for denne funktion: $y = x^2$ i $(x,y)-$planen. Kurven kan vi opfatte som en parametriseret rumkurve på følgende måde:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (t,t^2,0), \tag{8.54}$$

hvoraf vi får følgende ingredienser til beregning af Frenet-Serret elementerne for kurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (1,2t,0) \neq (0,0,0) \quad \text{for alle } t \\ v(t) &= \sqrt{1+4t^2} \\ \mathbf{p}''(t) &= (0,2,0) \\ \mathbf{p}'''(t) &= (0,0,0) \\ \mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t) &= (0,0,2) \\ \|\mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t)\| &= 2 \\ (\mathbf{p}'(t)\times\mathbf{p}''(t))\cdot\mathbf{p}'''(t) &= 0 \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.55}$$

Specielt er altså $\kappa(0) = 2$ i overensstemmelse med, at Taylorudviklingen af kurven i Frenet–Serret basen i kurvens toppunkt netop skal give parablen $\widehat{y} = (\kappa(0)/2)\cdot\widehat{x}^2$, jvf. (8.37).

OPGAVE 8.28

Bestem Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\}_{FS}$ for parablen i eksemplet 8.27 ovenfor.

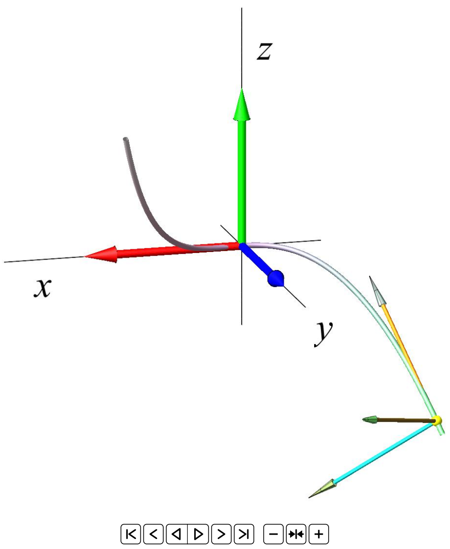
Eksempel 8.29

Mere generelt, grafen for en funktion $y = f(x)$ i $(x,y)-$planen kan parametriseres:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (t, f(t), 0), \tag{8.56}$$

hvoraf udledes, som i eksempel 8.27:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|f''(t)|}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.57}$$



Figur 8.12: Animation af Frenet–Serret basis langs kurven $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$.

OPGAVE 8.30

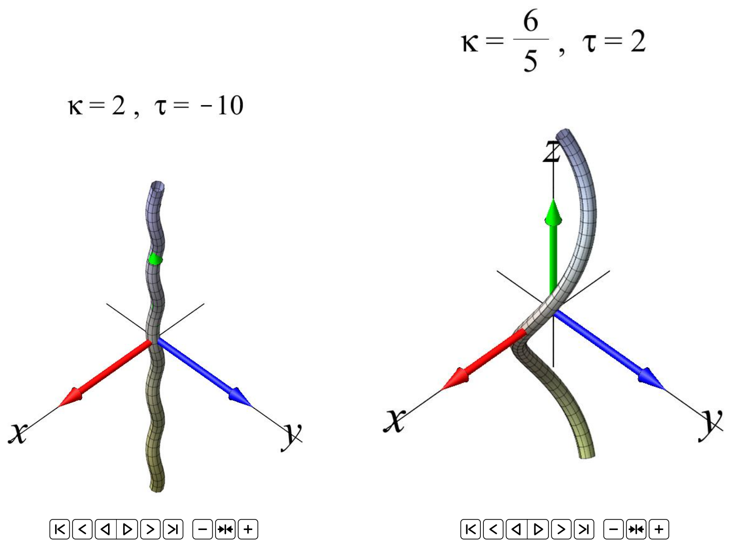
En generel vindellinje er som bekendt givet ved parameterfremstillingen:

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{8.58}$$

hvor $a \neq 0$. Bestem *direkte* ved hjælp af Sætning 8.25 krumningen, torsionen, og Frenet–Serret vektor-funktionerne for denne vindellinje. Sammenlign med resultatet fra opgave 8.23.

OPGAVE 8.31

I figurerne 8.16, 8.9, 8.10 og 8.11 ses tabeller med billeder af vindellinjer. De har alle samme længde (to af de viste cirkler overlejrer til en vis grad sig selv). Krumningerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med 1 til og med 4. Torsionerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med -2 til og med 2. Marker på én af figurerne hvilke vindellinjer der har hvilke kombinationer af krumning og torsion. Se evt. figur 8.13 som viser animationer dels igennem torsioner med fast krumning og dels igennem krumninger med fast torsion.



Figur 8.13: Animation af vindellinje med konstant længde, men med variabel torsion og krumning, henholdsvis.

8.4.2 Approksimerende vindellinjer

I lighed med Taylor approksimationen i afsnit 8.3.4 som gav approksimerende parabler og tredjegradskurver i Frenet–Serret basens koordinatplaner, vil vi her se hvordan vi også kan approksimere en vilkårlig kurve med vindellinjer i ethvert punkt på kurven.

Sætning 8.32 Givet en tidsparametriseret regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ med positiv krumning $\kappa(0)$ og torsion $\tau(0)$ i punktet $\mathbf{p}(0)$. Så findes der præcis én vindellinje $\mathcal{V}$ som både går igennem punktet $\mathbf{p}(0)$, har samme tangent $\mathbf{p}'(0)$ som kurven og samme krumning $\kappa(0)$ og torsion $\tau(0)$ som kurven i punktet.

Den vindellinje vil vi selvfølgelig kalde den approksimerende vindellinje til kurven i punktet.

Når vi har kurvens Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$ til rådighed i det udvalgte kurvepunkt $\mathbf{p}(0)$ er det ikke svært at konstruere den søgte vindellinje.

Standard-vindellinjen er givet ved $\mathbf{r}(u) = (a\cos(ku), a\sin(ku), bku)$, hvor $a > 0$, b, og $k > 0$ er konstanter, der bestemmer dels vindellinjens krumning og torsion og dels farten af parameterfremstillingen. Vindellinjen har jo sin helt egen Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS(\mathbf{r})}$ i det punkt, der svarer til $u = 0$.

Vi bestemmer først konstanterne a, b, og k for vindellinjen, sådan at den har konstant fart $v(0) = \|\mathbf{p}'(0)\|$, (konstant) krumning $\kappa(0)$ og (konstant) torsion $\tau(0)$. Dvs. vi bestemmer a, b, og k således at:

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau(0) &= \frac{b}{a^2+b^2} \\ \|\mathbf{p}'(0)\| = v(0) &= k\sqrt{a^2+b^2} \quad . \end{aligned} \tag{8.59}$$

Heraf finder vi $a > 0$, b, og $k > 0$:

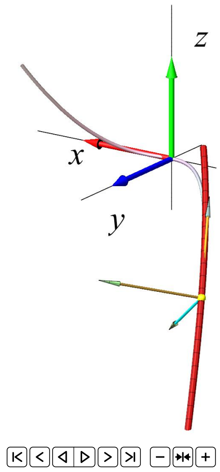
$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \cdot v(0) \\ a &= \frac{\kappa(0)}{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \\ b &= \frac{\tau(0)}{\kappa^2(0)+\tau^2(0)} \quad . \end{aligned} \tag{8.60}$$

Bemærk specielt, at b har samme fortegn som $\tau(0)$ således at kurven og den approksimerende vindellinje har samme type torsion, i.e. de er begge venstre-skruede eller begge højre-skruede.

OPGAVE 8.33

Vis ved indsættelse, at ovenstående værdier løser ligningerne i (8.59).

Den fundne vindellinje kan dernæst roteres og translateres 'på plads' så den netop bringes til at approksimere kurven $\mathbf{p}(t)$ på stedet $\mathbf{p}(0)$. Rotationen er naturligvis den rotation i rummet, der roterer Frenet–Serret basen for vindellinjen over i Frenet–Serret basen for kurven. Resultatet er illustreret og animeret i figur 8.14. Det ses at de konstruerede vindellinjer approksimerer den givne kurve i ethvert punkt.



Figur 8.14: Animation af approksimerende vindellinje-stykke (med konstant længde) langs kurven $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$

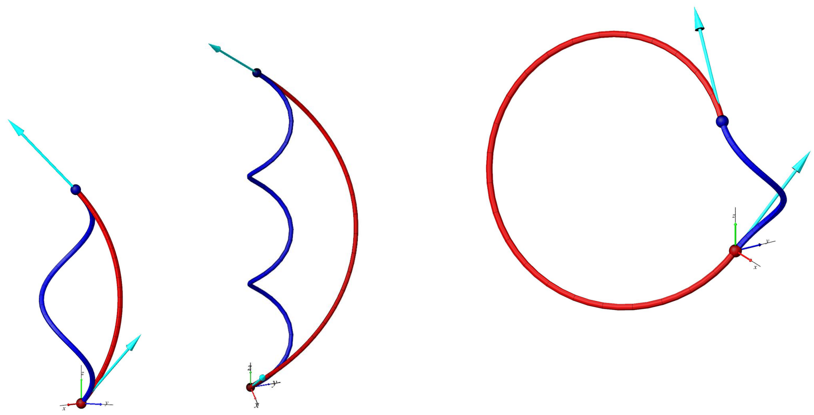
OPGAVE 8.34

Et sammenhængende stykke af en helix (vindellinje) kaldes *kort* hvis den ikke når at gå en hel gang rundt om sin akse. Se figur 8.15.

Et forholdsvist nyt resultat (fra 2013) om vindellinjer er udtrykt i følgende sætning, se [DBT]: Lad $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ være (stedvektorer til) to punkter i rummet og lad $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$ være to enhedsvektorer med fodpunkter i henholdsvis $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$. Så findes der netop én kort vindellinje fra $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ med tangentvektorerne $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$ hvis og kun hvis følgende simple betingelse er opfyldt:

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = 0 \quad . \tag{8.61}$$

Kan du give et kort argument for den påstand?



Figur 8.15: Vindellinjer, der forbinder to punkter med samme tangentlinjer i endepunkterne. Den ene (rød) er altid kort, mens den anden ikke nødvendigvis er længst (som yderst til højre).

8.4.3 SI-enheden for krumning og torsion

Vi indfører enhederne for de størrelser, der indgår i krumnings- og torsions-formlerne. Vi bruger udelukkende SI-enheder, se Wiki; International_System_of_Units:

1. Farten v måles i meter per sekund:
   $v = \{v\}\ [v]$, hvor $[v] = \mathrm{m/s}$.

2. Hastighedsvektorer $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund:
   $v_i = \{v_i\}\ [v_i]$, hvor $[v_i] = \mathrm{m/s}$.

3. Accellerationsvektorer $\mathbf{a}(t) = \mathbf{p}''(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund i anden:
   $a_i = \{a_i\}\ [a_i]$, hvor $[a_i] = \mathrm{m/s^2}$.

4. Accelerationens tidsafledede $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{p}'''(t)$ har koordinater, der måles i meter per sekund i tredje: $a_i' = \{a_i'\}\ [a_i']$, hvor $[a_i'] = \mathrm{m/s^3}$.

5. Koordinaterne for prikproduktet mellem to vektorer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

6. Koordinaterne for krydsproduktet mellem to vektorer $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

Vi benytter dernæst den generelle formel for krumning og torsion som givet i sætning 8.25 og får:

Sætning 8.35 SI-enheden for både krumning og torsion er $[\kappa(t)] = \mathrm{m}^{-1}$ og $[\tau(t)] = \mathrm{m}^{-1}$.

OPGAVE 8.36

Vis den sætning ved at indsætte enheder i de respektive ligninger fra sætning 8.25.

8.5 Plane kurver

Hvis en rum-kurve er helt indeholdt i en plan i rummet, så vil vi naturligvis sige, at kurven er en plan kurve.

Lad os antage at kurven $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [\alpha, \beta]$, er regulær og buelængde-parametriseret. Så er $\boldsymbol{\eta}(s)$ helt indeholdt i den plan, der har ligningen $ax + by + cz = d$, hvis (og kun hvis):

$$ax(s) + by(s) + cz(s) = d \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad . \tag{8.62}$$

Lader vi nu s_0 betegne et tal i $[\alpha, \beta]$ betyder det, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ er helt indeholdt i planen hvis og kun hvis

$$a\,(x(s) - x(s_0)) + b\,(y(s) - y(s_0)) + c\,(z(s) - z(s_0)) = 0 \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad , \tag{8.63}$$

som er ækvivalent med, at $(x(s) - x(s_0), y(s) - y(s_0), z(s) - z(s_0))$ står vinkelret på (a, b, c):

$$(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0)) \cdot (a, b, c) = 0 \quad . \tag{8.64}$$

OPGAVE 8.37

Lad $\boldsymbol{\eta}(s)$ betegne følgende rumkurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\cos(s), \sqrt{2}\sin(s) + \cos(s), \sqrt{2}\sin(s) - \cos(s)\right) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \tag{8.65}$$

1. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.
2. Find torsionen af kurven.

Det er ikke nogen tilfældighed, at kurven i opgave 8.37 har torsion 0:

Sætning 8.38 En regulær rumkurve med positiv krumning har overalt torsionen $\tau = 0$ hvis og kun hvis kurven er en plan kurve.

Bevis

Vi antager, at kurven er buelængde-parametriseret. Hvis kurven ligger helt indeholdt i en plan så er kurvens tangentvektor $\mathbf{e}(s)$ vinkelret på en konstant enhedsnormal-vektor $\mathbf{N}$ til planen:

$$\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad , \tag{8.66}$$

sådan at

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N}) &= 0 \\ \mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{N} + \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N}' &= 0 \\ \mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \kappa(s)\mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{8.67}$$

fordi $\mathbf{N}$ er konstant og $\kappa(s) > 0$. Men dermed er både $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ vinkelrette på $\mathbf{N}$ således at $\mathbf{g}(s) = \pm\mathbf{N}$ for alle s. Dermed er $\mathbf{g}'(s) = 0$ for alle s og derfor er $\tau(s) = 0$ for alle s.

Omvendt, hvis $\tau(s) = 0$ for alle s har vi $\mathbf{g}'(s) = 0$, så $\mathbf{g}(s) = \mathbf{g}_0$, en konstant vektor. Men dermed har vi også:

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\eta}(s) \cdot \mathbf{g}_0) = \boldsymbol{\eta}'(s) \cdot \mathbf{g}_0 = \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{g}_0 = 0 \quad , \tag{8.68}$$

sådan at $\boldsymbol{\eta}(s) \cdot \mathbf{g}_0$ er en konstant og sådan at $(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0)) \cdot \mathbf{g}_0 = 0$, hvilket netop betyder, at $\boldsymbol{\eta}(s)$ er en plan kurve – indeholdt i en plan der har normalvektor $\mathbf{g}_0$.

■

OPGAVE 8.39

Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne følgende rumkurve:

$$\mathbf{p}(t) = \left(\sqrt{2}\,(\cos(t) + 1)\,, 3\sqrt{2}\sin(t) + \cos(t) + 1, 3\sqrt{2}\sin(t) - \cos(t) - 1\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{8.69}$$

1. Find torsionen $\tau(t)$ af kurven.
2. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.

8.5.1 Plane kurver – i (x,y)-planen

I det følgende vil vi antage, at kurverne vi betragter, er plane og at de er indeholdt i (x,y)-planen.

I (x,y)-planen kan vi udnytte orienteringsfordelen: Enhver vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$ har en entydig bestemt 'hat'- eller 'tvær'-vektor $\widehat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1, 0)$, som fremkommer ved at dreje $\mathbf{a}$ vinklen $\pi/2$ i (x,y)-planen i positiv omløbsretning, dvs. imod uret, dvs. i den omdrejnings-retning der drejer

x-aksen over i y-aksen. De to vektorer $\mathbf{a}$ og $\widehat{\mathbf{a}}$ er specielt vinkelrette på hinanden.

Lad os nu betragte en buelængde-parametriseret kurve i (x,y)-planen $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), 0)$ med krumning $\kappa(s)$ betragtet som krumningne af en rumkurve. I de punkter hvor krumningen er positiv har vi også en torsion $\tau(s)$ og en Frenet–Serret basis $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$, hvor $\mathbf{g}(s) = \mathbf{0}$ for alle s.

I planen er $\boldsymbol{\eta}''(s) = \mathbf{e}'(s)$ altid proportional med $\widehat{\mathbf{e}(s)}$, så vi har dermed i ethvert punkt på kurven en proportionalitetsfaktor, som vi vil kalde $\kappa_{\pm}(s)$ og som kan antage både positive og negative værdier:

Definition 8.40 For en plan buelængdeparametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ med $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ definerer vi $\kappa_{\pm}(s)$ ved ligningen:

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa_{\pm}(s)\,\widehat{\mathbf{e}(s)} \quad , \tag{8.70}$$

som er ækvivalent med

$$\kappa_{\pm}(s) = \widehat{\mathbf{e}(s)} \cdot \mathbf{e}'(s) \quad . \tag{8.71}$$

I de punkter hvor $\kappa(s) > 0$ har vi også – per definition af $\kappa(s)$

$$\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa(s)\,\mathbf{f}(s) \quad , \tag{8.72}$$

sådan at

$$\kappa_{\pm}(s) = \kappa(s)\,\left(\mathbf{f}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)}\right) \quad , \tag{8.73}$$

hvor prikproduktet på højre side af ligningen enten er 1 eller -1. Heraf betegnelsen $\kappa_{\pm}(s)$.

Med andre ord har vi $|\kappa_{\pm}(s)| = \kappa(s)$ og fortegnet for $\kappa_{\pm}(s)$ er $+1$ når $\mathbf{e}(s)$ drejes i positiv omløbsretning (dvs. $\mathbf{e}'(s)$ har samme retning som $\widehat{\mathbf{e}(s)}$) og fortegnet er -1 når $\mathbf{e}(s)$ drejes i negativ omløbsretning (dvs. $\mathbf{e}'(s)$ har modsat retning af $\widehat{\mathbf{e}(s)}$) under bevægelsen langs den plane kurve igennem voksende s-værdier.

Se eksemplet i figur 8.17, hvor hastighedsvektoren $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ er angivet under bevægelsen (med fart 1) på kurven sammen med den inducerede krumning med fortegn.

OPGAVE 8.41

Find udtrykket for den orienterede krumning $\kappa_{\pm}(t)$ som funktion af t for en regulær t-parametriseret kurve $\mathbf{p}(t)$ i (x,y)-planen.

8.5.2 Plane kurver med givne krumningsfunktioner $\kappa_{\pm}(s)$.

Vi antager, at krumningen $\kappa_{\pm}(s)$ for en buelængdeparametriseret plan kurve er givet. Vores opgave er at konstruere en kurve i planen, som har den givne krumning som funktion af buelængdeparameteren s.

Da $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ er en enhedsvektor, kan den skrives på følgende form:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \tag{8.74}$$

hvor $\phi(s)$ er en glat funktion af s, der simpelthen måler vinklen mellem kurvens tangentvektor $\boldsymbol{\eta}'(s)$ og x-aksen (dvs. vektoren $(1,0,0)$).

Vi kan udtrykke krumningen – med fortegn – for den plane kurve ved hjælp af (den afledede af) $\phi(s)$:

Sætning 8.42

$$\kappa_{\pm}(s) = \phi'(s) \quad . \tag{8.75}$$

Bevis

Det følger direkte dels af $\boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa_{\pm}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)}$ og dels af:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= (-\phi'(s) \cdot \sin(\phi(s)) \,,\, \phi'(s) \cdot \cos(\phi(s)) \,,\, 0) \\ &= \phi'(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)} \quad . \end{aligned} \tag{8.76}$$

■

Da $\kappa_{\pm}(s)$ er en givet glat funktion af s kan vi jo integrere den og dermed få

$$\int_0^s \kappa_{\pm}(u)\, du = \int_0^s \phi'(u)\, du = \phi(s) - \phi(0) \quad . \tag{8.77}$$

På den anden side ved vi:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \tag{8.78}$$

sådan at

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(s) &= \int_0^s \boldsymbol{\eta}'(u)\,du + \boldsymbol{\eta}(0) \\ &= \int_0^s (\cos(\phi(u)), \sin(\phi(u)), 0)\; du + \boldsymbol{\eta}(0) \\ &= \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv + \phi(0)\right), \sin\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv + \phi(0)\right), 0\right)\; du + \boldsymbol{\eta}(0) \quad .\end{aligned} \tag{8.79}$$

Heraf følger: Hvis vi *vælger* $\boldsymbol{\eta}(0) = (0,0,0)$ og hvis vi *vælger* $\phi(0) = 0$, så har vi en eksplicit kurve med den ønskede krumningsfunktion (med fortegn):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv\right), \sin\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv\right), 0\right)\; du \quad . \tag{8.80}$$

Overvej hvad de *valg* betyder. Dvs. hvis vi havde valgt andre $\boldsymbol{\eta}(0)$ og $\phi(0)$, hvilke andre kurver havde vi så fået?

Vi kan samle de ovenstående overvejelser til følgende:

Sætning 8.43 Lad $\kappa_\pm(s)$ være en given glat funktion. Så findes der en buelængdeparametriseret kurve $\boldsymbol{\eta}(s)$ i (x,y)-planen der har den givne funktion som krumningsfunktion med fortegn. Kurven er entydigt bestemt op til rotation og translation. Den repræsentant der går gennem $(0,0,0)$ med tangentvektoren $\boldsymbol{\eta}'(0) = (1,0,0)$ er bestemt direkte ved følgende formel:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv\right)\, du\;, \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa_\pm(v)\,dv\right)\, du,\; 0\right) \quad . \tag{8.81}$$

OPGAVE 8.44

Her er 4 (orienterede) krumningsfunktioner for 4 plane kurver i (x,y)-planen:

1. $\kappa_\pm(s) = s$
2. $\kappa_\pm(s) = e^{-s}$
3. $\kappa_\pm(s) = s^3 - 2s$
4. $\kappa_\pm(s) = \frac{2s^2}{s^2+1}$.

I figur 8.18 er vist 3 plane kurver i (x,y)-planen.
Hvilken af de 4 krumningsfunktioner passer til hver enkelt af de 3 plane kurver?
Plot selv den 'manglende' kurve.

8.6 Frenet-Serret styring af et basistetraeder

I ethvert punkt $p(t)$ på en given regulær rum-kurve $\mathbf{p}(t)$, $t \in [a,b]$, med positiv krumning, vil vi nu opbygge et tetraeder, der skal være en roteret (og derefter parallelforskudt) kopi af basistetraederet. Den givne fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ får nu *total indflydelse* på styringen af tetraederet, nemlig via Frenet–Serret basis for kurven, som jo definerer et entydigt bestemt treben (tetraeder) i ethvert punkt med de parvis ortogonale enheds-vektorer $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ som kantvektorer:

Definition 8.45 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær rumkurve. Det tilhørende Frenet–Serret treben defineres for ethvert t ved:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \tag{8.82}$$

hvor $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$ er den til kurven hørende Frenet–Serret basis på stedet $p(t)$, således at

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad , \tag{8.83}$$

hvor rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ nu er givet ved Frenet–Serret kantvektorerne:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{8.84}$$

Rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ for et Frenet–Serret treben kan naturligvis differentieres og analyseres på samme måde som i kapitel 7 med tilhørende aksematrix $\boldsymbol{\Omega}(t)$ og associeret aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Lad os lige repetere:

For en given tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ finder vi først den skævsymmetriske tidsafhængige aksematrix

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{8.85}$$

hvoraf vi aflæser den associerede tidsafhængige aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$.

Med Frenet–Serret rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ for en kurve til rådighed kan vi nu også definere en anden skævsymmetrisk matrix:

Definition 8.46 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$. Vi definerer den tidsafhængige krumnings-matrix eller Frenet–Serret-matrix $\Xi(t)$ for kurven således:

$$\Xi(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \quad . \tag{8.86}$$

Denne nye tidafhængige matrix er interessant fordi den indeholder krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ for kurven $\mathbf{p}(t)$ – deraf navnet *krumningsmatrix*:

Sætning 8.47 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$. Krumningsmatricen $\Xi(t)$ for en Frenet–Serret rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er skævsymmetrisk for alle t og elementerne er følgende:

$$\Xi(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t) \cdot \kappa(t) & 0 \\ v(t) \cdot \kappa(t) & 0 & -v(t) \cdot \tau(t) \\ 0 & v(t) \cdot \tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{8.87}$$

hvor $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$ betegner farten, altså længden af den tids-afledede af $\mathbf{p}(t)$.

Bogstavet Ξ er det græske (store bogstav), der svarer til (det lille bogstav) ξ. Begge udtales ’ksi’, se Wiki.

Bevis

Skævsymmetrien af $\Xi(t)$ følger på samme måde som for $\mathbf{\Omega}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}\mathbf{E} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}(t)\right) \\ &= \mathbf{R}'^*(t) \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.88}$$

således at

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}'^*(t) \cdot \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ -\left(\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t)\right)^* &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ -\Xi^*(t) &= \Xi(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.89}$$

Derudover kan vi finde elementerne i $\Xi(t)$ fra ligning (8.40)):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad , \end{aligned} \tag{8.90}$$

sådan at

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}'^*(t) & \mathbf{f}'^*(t) & \mathbf{g}'^*(t) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} (v(t)\kappa(t)\mathbf{f}^*(t)) & (-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}^*(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}^*(t)) & (-v(t)\tau(t)\mathbf{f}^*(t)) \end{array}\right] \quad , \end{aligned} \tag{8.91}$$

hvilket præcis giver følgende matrix-produkt:

$$\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & -v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{8.92}$$

■

|||| Eksempel 8.48

Vi lader $\mathbf{p}(s)$ betegne følgende kurve – en cirkel med radius $a > 0$ i $(x,y)-$planen – som er parametriseret med enhedsfart:

$$\mathbf{p}(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a), 0) \quad . \tag{8.93}$$

Så har vi følgende ingredienser til konstruktion af Frenet–Serret trebenet og til analyse af trebenets rotation:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \mathbf{p}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\ \mathbf{p}''(s) &= (-\frac{1}{a}\cos(s/a), -\frac{1}{a}\sin(s/a), 0) \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{p}''(s)\| = \frac{1}{a} \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{\mathbf{p}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0,0,1) \quad , \end{aligned} \tag{8.94}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= \begin{bmatrix} -\sin(s/a) & -\cos(s/a) & 0 \\ \cos(s/a) & -\sin(s/a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}'(s) &= \begin{bmatrix} -\cos(s/a)/a & \sin(s/a)/a & 0 \\ -\sin(s/a)/a & -\cos(s/a)/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{8.95}$$

således at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(s) &= \mathbf{R}'(s) \cdot \mathbf{R}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}(s) &= (0,0,1/a) \quad , \end{aligned} \tag{8.96}$$

og

$$\Xi(s) = \mathbf{R}^*(s) \cdot \mathbf{R}'(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{8.97}$$

OPGAVE 8.49

Dette er opgave 2 *fra* 2*-timersprøven, E09*. En kurve er givet ved en parametrisering således:

$$p(s) = (3\cos(s/5)\,,\,3\sin(s/5)\,,\,4s/5) \quad , \quad \text{hvor} \quad s \in [0, 5\pi] \quad . \tag{8.98}$$

1. Vis, at kurven er enhedsfart-parametriseret.
2. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ for kurven.
3. Bestem krumningen $\kappa(s)$ for kurven.
4. Bestem torsionen $\tau(s)$ for kurven.

OPGAVE 8.50

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering $\mathbf{p}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Konstanten a antages at være forskellig fra 0, men b kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, opgave 8.30, og opgave 8.23.

1. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ for kurven.
2. Bestem den tilhørende rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ for kurven.
3. Bestem akse-matricen $\mathbf{\Omega}(t)$ og den associerede akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$ for kurven.
4. Bestem Frenet–Serret matricen $\Xi(t)$ for kurven ved at udregne produktet $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}'(t)$, og sammenlign med de tidligere fundne udtryk for krumning $\kappa(t)$ og torsion $\tau(t)$ for vindellinjerne.

Læg mærke til, at Frenet–Serret matricen $\Xi(t)$ og aksematricen $\mathbf{\Omega}(t)$ for rotationen givet ved Frenet–Serret rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ *ikke nødvendigvis* er den samme matrix, selv om de klart er i 'familie' med hinanden i den forstand, at de begge er produkter af $\mathbf{R}^*(t)$ og $\mathbf{R}'(t)$:

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ \mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad . \end{aligned} \tag{8.99}$$

De to matricer $\Xi(t)$ og $\mathbf{\Omega}(t)$ er faktisk såkaldt similære for ethvert t via similaritetstransformationen $\mathbf{R}(t)$ i den forstand, at

$$\mathbf{R}^{-1}(t) \cdot \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \Xi(t) \quad . \tag{8.100}$$

OPGAVE 8.51

Bemærk, at en af kantvektorerne i det markerende treben for det bevægede tetraeder i figur 8.19 har et spidspunkt, der ser ud til at bevæge sig langs $y-$aksen. Fodpunktskurven for Frenet–Serret bevægelsen af basistetraederet er givet ved forskriften:

$$\mathbf{p}(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2}, \sin(t/\sqrt{2})) \quad . \tag{8.101}$$

Vis, at den nævnte observation er korrekt for denne specielle vandrette helix, og bestem farten af den bevægelse af det nævnte spids-punkt på y-aksen.

8.7 Kurver med given fart, krumning og torsion

I kapitel 7 afsnit 7.4.1 fandt vi den tids-afhængige rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ ud fra en given tidsafhængig akse-matrix $\mathbf{\Omega}(t)$ (plus en 'begyndelsesværdi' $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$).

Vi vil nu se på det tilsvarende problem for den tids-afhængige Frenet-Serret matrix: Hvis vi har fået oplyst element-funktionerne i Frenet-Serret matricen, dvs. $v(t) \cdot \kappa(t)$ og $v(t) \cdot \tau(t)$, kan vi så finde $\mathbf{R}(t)$ sådan at

$$\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \Xi(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & -v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad ? \tag{8.102}$$

Vi må igen forvente, at det kun kan lade sig gøre at finde en entydig løsning til problemet hvis vi igen har fået oplyst en 'begyndelsesværdi' $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ for $\mathbf{R}(t)$. Men så kan opgaven løses på samme måde som i kapitel 7:

Ligning (8.102) er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo har at $\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$:

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \Xi(t)$$
$$\mathbf{R}'^*(t) = \Xi^*(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{21}(t) & r'_{31}(t) \\ r'_{12}(t) & r'_{22}(t) & r'_{32}(t) \\ r'_{13}(t) & r'_{23}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{21}(t) & r_{31}(t) \\ r_{12}(t) & r_{22}(t) & r_{32}(t) \\ r_{13}(t) & r_{23}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} , \tag{8.103}$$

og da $\mathbf{R}(t)$ har Frenet-Serret basisvektorernes koordinater som søjler, får vi:

$$\begin{bmatrix} e'_1(t) & e'_2(t) & e'_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \\ g'_1(t) & g'_2(t) & g'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) & e_2(t) & e_3(t) \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{bmatrix} , \tag{8.104}$$

Hver søjle i $\mathbf{R}^*(t)$ – det vil sige hver række i $\mathbf{R}(t)$ – tilfredsstiller altså et og samme differentialligningssystem; de har fælles systemmatrix $\Xi^*(t)$. Eksempelvis har vi for den første søjle i $\mathbf{R}^*(t)$:

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ f_1'(t) \\ g_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v(t)\cdot\kappa(t) & 0 \\ -v(t)\cdot\kappa(t) & 0 & v(t)\cdot\tau(t) \\ 0 & -v(t)\cdot\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ f_1(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{8.105}$$

Eksempel 8.52

Vi lader $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$. Så har vi følgende ingredienser til bestemmelse af $\mathbf{R}(t)$:

$$\Xi(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{8.106}$$

Vi skal altså løse tre differentialligningssystemer med den konstante systemmatrix Ξ^*. Det første system er følgende:

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ f_1'(t) \\ g_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ f_1(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{8.107}$$

Det system har den fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ f_1(t) &= c_2\cos(2t) - c_1\sin(2t) \quad , \end{aligned} \tag{8.108}$$

hvor c_1, c_2, og c_3 er vilkårlige konstanter, som imidlertid bliver fastlagt af begyndelsesbetingelsen $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ hvilket medfører: $e_1(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, og $g_1(0) = 0$. Heraf får vi $c_3 = 0$, $c_1 = 1$, og $c_2 = 0$, sådan at

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 0 \\ e_1(t) &= \cos(2t) \\ f_1(t) &= -\sin(2t) \quad . \end{aligned} \tag{8.109}$$

Præcis den samme fuldstændige løsning og den samme begyndelsesbetingelse kan benyttes til at finde:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= 0 \\ e_2(t) &= \sin(2t) \\ f_2(t) &= \cos(2t) \\ \\ g_3(t) &= 1 \\ e_3(t) &= 0 \\ f_3(t) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{8.110}$$

således at:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad . \tag{8.111}$$

Sammenlign med den tilsvarende løsningsprocedure for $\mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{\Omega}(t)$ og bemærk forskellene.

Eksempel 8.53

I forlængelse af eksempel 8.52 kan vi nu undersøge præcis hvilke tidsparametriserede kurver $\mathbf{p}(t)$ der giver anledning til de givne data $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$: De skal alle opfylde, at $\mathbf{R}(t)$ er givet konkret ved (8.111). Specielt er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= (\cos(2t), \sin(2t), 0) \\ \mathbf{p}'(t) &= v(t)\cdot(\cos(2t), \sin(2t), 0) = (2\cos(2t), 2\sin(2t), 0) \quad , \end{aligned} \tag{8.112}$$

således at

$$\mathbf{p}(t) = \int_0^t (2\cos(2t), 2\sin(2t), 0)\, dt + \mathbf{p}_0 \quad , \tag{8.113}$$

hvor $\mathbf{p}_0$ er en vilkårlig integrations-konstant (vektor). Hvis vi *vælger den vektor* til at være $\mathbf{p}(0) = (0, -1, 0)$ får vi dermed den entydige løsningskurve:

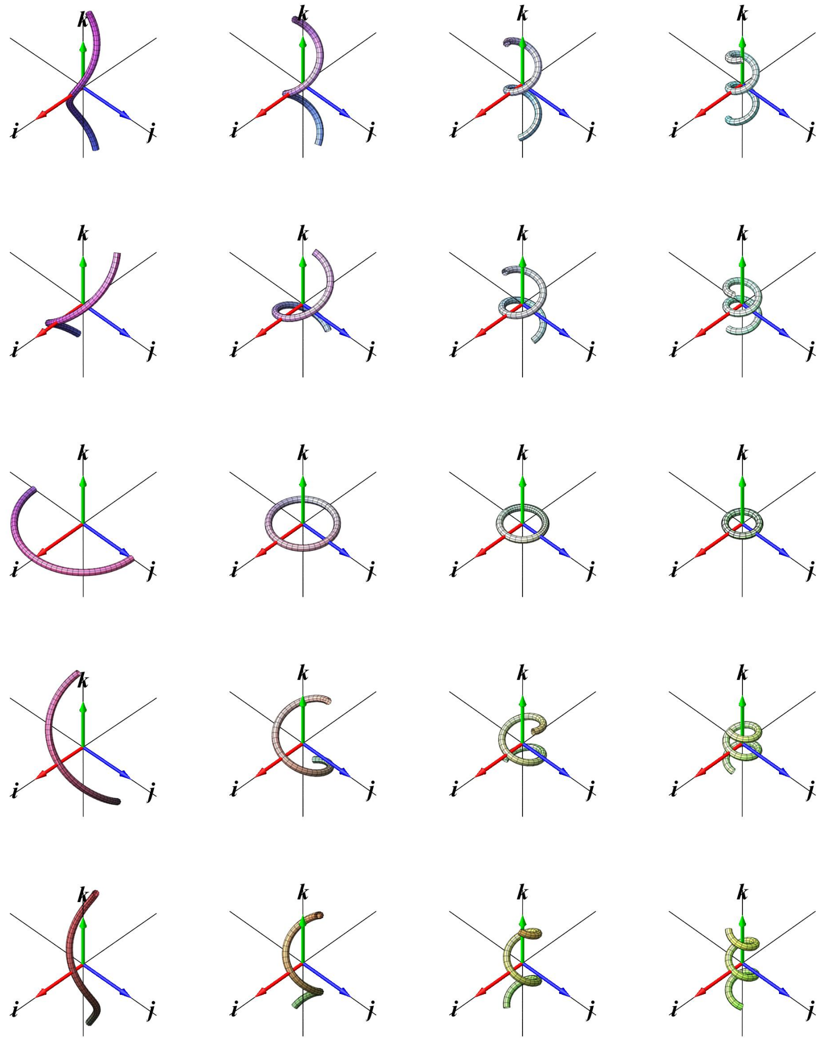
$$\mathbf{p}(t) = (\sin(2t), -\cos(2t), 0) \quad . \tag{8.114}$$

Det er tydeligvis en cirkel i (x,y)-planen. Og den har præcis de krumningsdata vi begyndte med: $v(t) = 2$, $\kappa(t) = 1$, $\tau(t) = 0$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$.

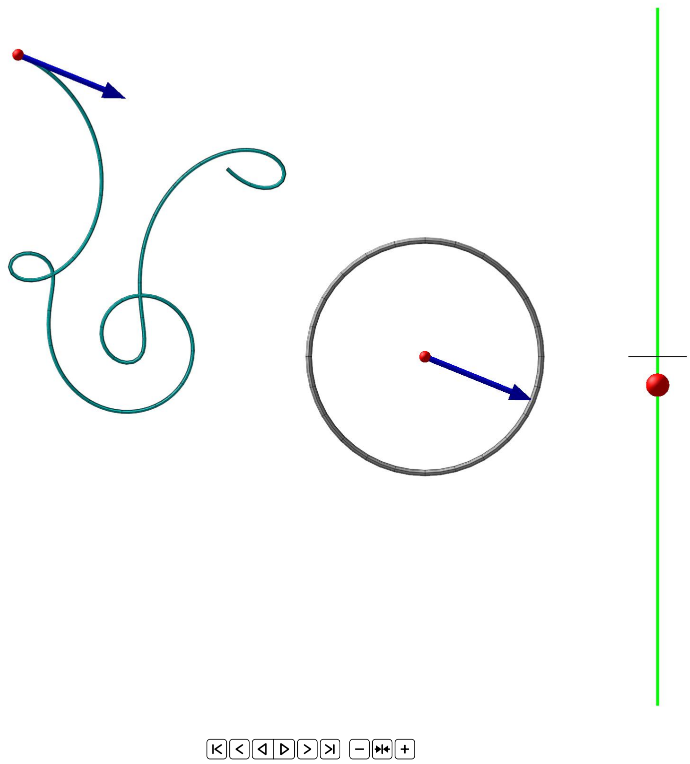
Vi har hermed bevist og illustreret følgende sætning, som ofte benævnes hovedsætningen for rumkurver og som er den rumlige generalisering af sætning 8.43 for plane kurver:

Sætning 8.54 Lad $v(t) > 0$, $\kappa(t) > 0$ og $\tau(t)$ være tre givne glatte funktioner af parameteren $t \in I$. Antag at $0 \in I$. Lad $\mathbf{p}_0$ være en fast vektor i rummet og lad $\mathbf{R}_0$ betegne en given rotationsmatrix.

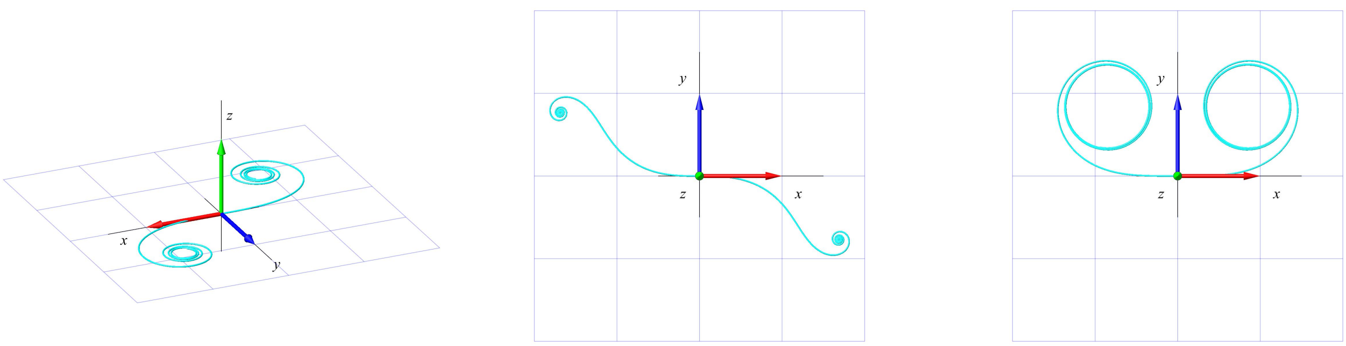
Så findes der en entydigt bestemt tidsparametriseret rumkurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ således at Frenet-Serret rotationsmatricen for kurven er $\mathbf{R}_0$ til tiden $t = 0$ og således at farten af (bevægelsen langs) kurven er $v(t)$, krumningen af kurven er $\kappa(t)$, og torsionen af kurven er $\tau(t)$ til ethvert tidspunkt $t \in I$.



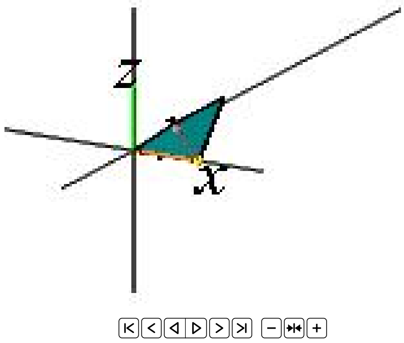
Figur 8.16: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle vindellinjer er her vist i det sædvanlige retvinklede koordinatsystem i rummet. Det er forholdsvis simpelt at spotte størrelsen af krumning og torsion samt fortegnet af torsionen – se opgave 8.31 og sammenlign med figurerne 8.9, 8.10, og 8.11.



Figur 8.17: Bevægelse med buelængdeparametrisering langs den plane kurve fra figur 8.7. I midten ses hastigheds-indikatoren $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$ og (til højre) krumnings-indikatoren $\kappa_{\pm}(s)$. Animeret.



Figur 8.18: Plane kurver med givne krumningsfunktioner. Men hvilke? Se opgave 8.44.



Figur 8.19: Frenet–Serret styret bevægelse af basistetraederet langs 'vandret' vindellinje. Se opgave 8.51. Animeret.

Kapitel 9

Medfølgende tetraederrum

I kapitel 7 har vi allerede undersøgt bevægelsen af punkter, der 'følger med' en given bevægelse af et tetraeder - for eksempel spidspunkterne for de tre kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ i det roterede tetraeder. Placeringen af det roterede tetraeder er til ethvert tidspunkt t givet ved:

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \qquad (9.1) \\ \mathbf{R}(t) &= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{array} \right] \quad , \end{aligned}$$

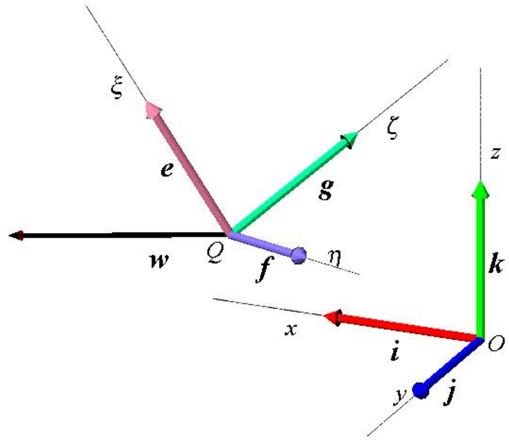
hvor $\mathbf{R}(t)$ stadig betegner en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t og $\mathbf{p}(t)$ betegner den tidsparametriserede fodpunktskurve for tetraederet

Bemærkning 9.1 Læg mærke til, at vi i dette kapitel igen 'fritstiller' både rotationsmatricen og fodpunktskurven i forhold til hinanden i den forstand, at de ikke nødvendigvis er koblede som i forrige kapitel, hvor tetraederet og dermed $\mathbf{R}(t)$ blev styret direkte ud fra fodpunktskurvens geometri via Frenet–Serret basen.

9.1 Koordinat- og basis-skift

Et objekt, der er *fast monteret* på - eller i - det bevægede tetraeder $\boxtimes(t)$ har til ethvert tidspunkt en position i rummet, som selvsagt er direkte bestemt af tetraederets position i rummet. Positionen er altså direkte bestemt ud fra fodpunktskurven og de tre kantvektorer. Vi skal blot derudover beskrive præcist *hvordan* objektet er nagelfast placeret på - eller i - tetraederet.

Vi betragter et punkt på et fræseværktøj, f.eks. centerpunktet for et kugleformet fræsehoved, som er monteret på enden af en stålaksel, der er fast monteret på tetraederet $\boxtimes(t)$ således at akslens andet endepunkt hele tiden er i fodpunktet $p(t)$. Så kan vi repræsentere stålakslen med en vektor $\mathbf{w}(t)$, der til ethvert tidspunkt har fodpunkt i $p(t)$ og spidspunkt i fræsehovedets centerpunkt. Den



Figur 9.1: Koordinatsystemerne $\{Q,\xi,\eta,\zeta\}$ og $\{O,x,y,z\}$ med tilhørende basisvektorer $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ og $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ samt en vektor $\mathbf{w}$ med fodpunkt i Q.

vektor har faste koordinater i forhold tetraederet, dvs. i forhold til $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$. Det vil sige, at der findes 3 *konstanter*, $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$ således at

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad . \tag{9.2}$$

Det er vigtigt at lægge mærke til, at på grund af den nagelfaste placering af $\mathbf{w}(t)$ i $\boxtimes(t)$ så er de tre koordinater $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, og $\tilde{w}_3$ konstante, uafhængige af tiden t. Da de tre kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ til ethvert tidspunkt er ortogonale enhedsvektorer, idet $\mathbf{R}(t)$ er en rotationsmatrix, så kan konstanterne findes ved almindelig retvinklet projektion af $\mathbf{w}$ på kantvektorerne, altså ved prikprodukterne

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{e}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{e}(t) = \tilde{w}_1 \\
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{f}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{f}(t) = \tilde{w}_2 \\
\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{g}(t) &= (\tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}(t) = \tilde{w}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Vektoren $\mathbf{w}$ har i den forstand *koordinaterne* $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)$ med hensyn til de nye basisvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$. Og med opstillingen ovenfor er $\mathbf{w}$ stedvektor ud fra fodpunktet $p(t)$ til det spidspunkt der er givet ved centret af fræsehovedet. Til ethvert tidspunkt t_0 har vi dermed defineret et nyt koordinatsystem, $\{Q,\xi,\eta,\zeta\}$ med de nye basisvektorer i akseretningerne $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\} = \{\mathbf{e}(t_0),\mathbf{f}(t_0),\mathbf{g}(t_0)\}$ og $Q = p(t_0)$, se figur 9.1.

Herefter kan vi *ikke bare skrive* en vektors koordinater således $\mathbf{w} = (1,2,7)$ uden at præcisere hvilket af de to koordinatsystemer $\{Q,\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ eller $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, der refereres til. Hvis $\mathbf{w} = \tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g}$, så har $\mathbf{w}$ koordinaterne $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ og det er sædvanligvis *ikke* koordinaterne for $\mathbf{w}$ med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

Med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ har vi stadigvæk koordinaterne (uden ˜) (w_1, w_2, w_3) for $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} \quad . \tag{9.4}$$

Vi bliver således nødt til at markere, hvilken basis vi bruger når vi skriver og bruger koordinater for vektorer. Det gør vi med index G på gamle koordinater og index N på nye koordinater således:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N \\
\mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1\mathbf{e}^* + \tilde{w}_2\mathbf{f}^* + \tilde{w}_3\mathbf{g}^* = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \\
\mathbf{w} &= w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} = (w_1, w_2, w_3)_G \\
\mathbf{w}^* &= w_1\mathbf{i}^* + w_2\mathbf{j}^* + w_3\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Bemærk, den afgørende forskel mellem $(1,2,7)_N$ og $(1,2,7)_G$. Vi vil finde sammenhængen mellem de to koordinatsæt for en vilkårlig vektor $\mathbf{w}$. Der må nødvendigvis være en eller anden sammenhæng, da de jo begge er koordinatsæt for én og samme vektor.

Vi bruger, at $\mathbf{e}$ er den vektor, der med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ har præcis de koordinater som står i rotationsmatricens første søjle, og tilsvarende for $\mathbf{f}$ og $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{f}^* &= \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G \\
\mathbf{g}^* &= \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Ved indsættelse i (9.5) får vi så:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_2 \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_3 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \\
&= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \qquad (9.7) \\
&= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad ,
\end{aligned}
$$

hvor det sidste lighedstegn stammer direkte fra sidste ligning i (9.5).

Vi har derfor følgende generelle sammenhæng mellem de to koordinatsæt for samme vektor **w** udtrykt i de to baser:

$$
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad . \qquad (9.8)
$$

|||| **Bemærkning 9.2** Læg mærke til, at vi har brugt både tilde og index N til at markere nye koordinater og ingen tilde sammen med index G til at markere gamle koordinater. Resultatet er så, at de gamle koordinater for en vektor **w** kan bestemmes ved at gange **R**-matricen på de nye koordinater for **w**. Bemærk også, at der jo stadigvæk i **R**-matricen står de gamle koordinater for de nye basis-vektorer! Prøv for eksempel at finde de gamle koordinater for den nye første basis-vektor, der jo har de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = (1,0,0)_N$.

Omvendt har vi også direkte fra (9.8) ved at gange med $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$ på begge sider af lighedstegnet:

$$
\begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G^* \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad , \qquad (9.9)
$$

således at de *nye* koordinater for **w** kan bestemmes ved at gange den transponerede af rotations-matricen på de *gamle* koordinater for **w**.

OPGAVE 9.3

Lad $\mathbf{R}$ betegne rotationsmatricen $\mathbf{R}_z(t_0)$ for en fast valgt værdi af $t_0 \in \mathbb{R}$ og lad $N = \{\mathbf{e}(t_0), \mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0)\}$ betegne den dertil hørende nye basis.

1. Bestem de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ for de vektorer $\mathbf{w}$, der har de gamle koordinater (med hensyn til $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$) henholdsvis: $(1,0,0)_G$, $(0,1,0)_G$, $(0,0,1)_G$, og $(1,2,3)_G$.

2. Bestem de gamle koordinater for de vektorer $\mathbf{w}$, der har de nye koordinater henholdsvis: $(1,0,0)_N$, $(0,1,0)_N$, $(0,0,1)_N$, og $(1,2,3)_N$.

Med de to baser $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ og $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ til rådighed i rummet kan vi beskrive lineære afbildninger fra $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$ ved hjælp af hver enkelt af de to baser: En given lineær afbildning kan jo udtrykkes ved hjælp af en afbildningsmatrix dels med hensyn til den gamle basis og dels med hensyn til den nye basis.

Lad os antage, at $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ er en given lineær afbildning. Så gælder der for enhver vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ at billed-vektoren $\mathcal{A}(\mathbf{w})$ kan skrives på to måder:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}) \\ &= w_1\mathcal{A}(\mathbf{i}) + w_2\mathcal{A}(\mathbf{j}) + w_1\mathcal{A}(\mathbf{k}) \quad , \end{aligned} \tag{9.10}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(\tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g}) \\ &= \tilde{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{e}) + \tilde{w}_2\mathcal{A}(\mathbf{f}) + \tilde{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{g}) \quad . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Det betyder præcis at der gælder følgende for alle $\mathbf{w}$:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^* = \left[\ (\mathcal{A}(\mathbf{i}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{j}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{k}))^*\ \right] \mathbf{w}^* \quad , \tag{9.12}$$

så hvis vi lader $\mathbf{A}_G$ betegne matricen for $\mathcal{A}$ med hensyn til den gamle basis får vi

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^*_G = \mathbf{A}_G \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G = \mathbf{A}_G\, \mathbf{w}^*_G \tag{9.13}$$

og tilsvarende når vi lader $\mathbf{A}_N$ betegne matricen for $\mathcal{A}$ med hensyn til den nye basis:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^*_N = \mathbf{A}_N \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \mathbf{A}_N\, \mathbf{w}^*_N \quad . \tag{9.14}$$

Men heraf følger så af (9.8) og (9.9):

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(\mathbf{w}))_N^* &= \mathbf{R}^* \left(\mathcal{A}(\mathbf{w})\right)_G^* \\ &= \mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{w}_G^* \\ &= \left(\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{R}\right) \mathbf{w}_N^* \\ &= \mathbf{A}_N \, \mathbf{w}_N^* \quad .\end{aligned} \tag{9.15}$$

Da dette holder for alle vektorer $\mathbf{w}$ må derfor gælde:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \, \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_G \, \mathbf{R} = \mathbf{A}_N \quad . \tag{9.16}$$

De to afbildningsmatricer $\mathbf{A}_G$ og $\mathbf{A}_N$ for afbildningen $\mathcal{A}$ med hensyn til henholdsvis den gamle og den nye basis er således similære med hensyn til basisskiftmatricen $\mathbf{R}$.

9.2 Hastighedsfeltet for det medfølgende rum

Vi betragter nu igen (ligesom i kapitel 7, afsnit 7.5) et punkt $q(t)$, der bevæger sig sammen med tetraederet

$$\begin{aligned}\boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad ,\end{aligned} \tag{9.17}$$

idet vi her dog *ikke vil indskrænke os* til kun as betragte hjørnepunkterne i tetraederet.

Vi betragter altså nu et vilkårligt punkt $q(t)$, som er fast i forhold til tetraederet og som derfor har faste tidsuafhængige koordinater med hensyn til det nye koordinatsystem $\{e(t), f(t), g(t)\}$. Det vil sige, at stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra Origo O i det gamle koordinatsystem til punktet $q(t)$ er summen:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t) \quad , \tag{9.18}$$

hvor $\mathbf{p}(t)$ (som tidligere) er vektoren fra O til det nye koordinatsystems Origo $Q(t) = p(t)$, og hvor $\mathbf{w}(t)$ er vektoren fra $p(t)$ til $q(t)$. Den sidstnævnte har så *faste tidsuafhængige koordinater* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.19}$$

således at

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad . \tag{9.20}$$

Punktet $q(t)$ bevæger sig ikke i det medfølgende nye koordinatsystem hvor det har konstante koordinater, men $q(t)$ bevæger sig (typisk) i det faste gamle koordinatsystem.

Vi vil undersøge hastigheden af den bevægelse til ethvert tidspunkt i det faste gamle koordinatsystem. Vi må forvente, at bevægelsen afhænger både af fodpunkt-bevægelsen $p(t)$ og af rotationsmatricerne $\mathbf{R}(t)$. Ved at differentiere (9.20) med hensyn til t får vi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}'(t) &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1\mathbf{e}'(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}'(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}'(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{g}(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\tilde{w}_1\mathbf{e}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\tilde{w}_2\mathbf{f}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\tilde{w}_3\mathbf{g}(t)) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{w}(t) \\
&= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{q}(t)-\mathbf{p}(t)) \quad ,
\end{aligned} \tag{9.21}$$

hvor vi har benyttet (7.37) fra kapitel 7 og den aksevektor, $\boldsymbol{\omega}(t)$, som som er bestemt via $\mathbf{R}(t)$.

Da valget af det faste punkt $q(t)$ i det medfølgende nye koordinatsystem var helt generelt og givet ved punktets faste koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ i det nye system, så kan vi nu ved hjælp af (9.21) til ethvert tidspunkt bestemme den øjeblikkelige hastighed af *ethvert punkt*, der er fast monteret i det rum, der følger med tetraederet. Vi skal blot kende punktets faste koordinatsæt i dette medfølgende tetraeder-rum samt fodpunktets hastighedsvektor $\mathbf{p}'(t)$ og rotationsmatricens øjeblikkelige akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Med andre ord: Vi kender nu bevægelsen, ikke blot af selve tetraederet $\boxtimes(t)$ og dets hjørnepunkter, men også bevægelsen af ethvert punkt i hele det rum, der er *fast monteret på tetraederet*.

Vi har dermed:

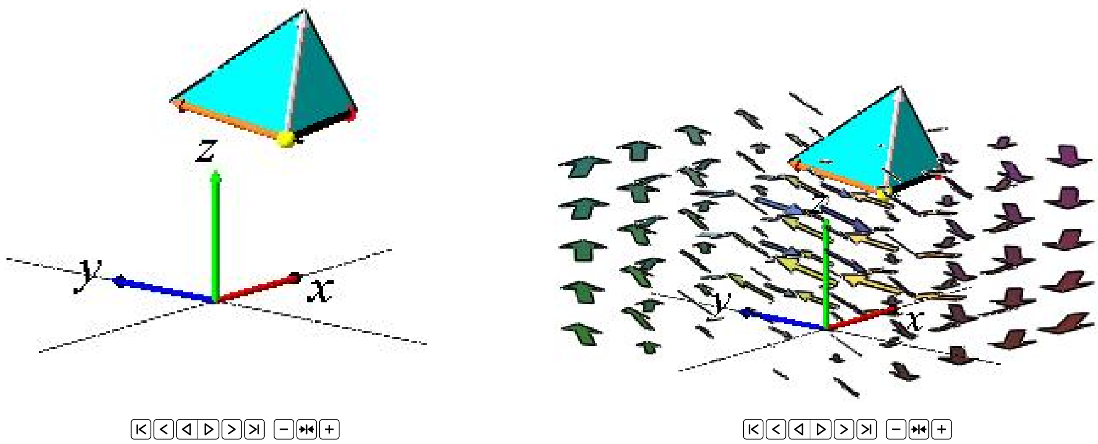
Sætning 9.4 Lad $\boxtimes(t)$ betegne en bevægelse af et tetraeder:

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t)\boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) = \boxtimes(p(t),\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)) \quad , \tag{9.22}$$

hvor $\mathbf{R}(t)$ angiver en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t med akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Det til denne bevægelse hørende øjeblikkelige hastighedsfelt til tidspunktet t_0 er så givet ved følgende vektor i det vilkårligt givne punkt i rummet, der har stedvektoren $\mathbf{q}$ (ud fra det gamle faste Origo, O):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{q}'(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0)\times\mathbf{w}(t_0) \\
&= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0)\times(\mathbf{q}-\mathbf{p}(t_0)) \quad .
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Bemærkning 9.5 Med andre ord: Til ethvert tidspunkt og til ethvert givet punkt i rummet har vi dermed knyttet en vektor, nemlig den hastighed som punktet har på det tidspunkt hvis det følger fast med i hele tetraeder-rummets bevægelse, sådan som den bevægelse er fastlagt af $\boxtimes(t)$.



Figur 9.2: En tetraeder-bevægelse langs en cirkel og det tilhørende øjeblikkelige hastigheds-vektorfelt $\mathbf{V}_q(t_0)$ for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.6. Animeret.

Eksempel 9.6

En roterende bevægelse af et standard tetraeder er givet ved en parametriseret fodpunktskurve (i dette tilfælde en cirkel) og en tidsafhængig rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, der er et produkt af to akserotationsmatricer som følger, hvor parameteren er $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G \quad . \end{aligned} \tag{9.24}$$

Vi bestemmer først aksematricen $\mathbf{\Omega}(t)$ og aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ til ethvert tidspunkt t:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sin(t) \\ 1 & 0 & -\cos(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{bmatrix}_G \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \quad . \end{aligned} \tag{9.25}$$

Ud fra disse ingredienser finder vi det øjeblikkelige hastighedsfelt for ethvert punkt $q = (q_1, q_2, q_3)_G$, se opgave 9.7:

$$\mathbf{V}_q(t) = (-q_2 + (q_3 - 1)\sin(t), q_1 - (q_3 - 1)\cos(t), (q_2 - \sin(t))\cos(t) - (q_1 - \cos(t))\sin(t))_G \, .$$

Se figur 9.2, hvor hastighedsfeltet (og tetraeder-bevægelsen) er vist i animation over det givne $t-$interval, $t \in [0, 2\pi]$.

OPGAVE 9.7

Eftervis de angivne udtryk i eksempel 9.6 - især det sidste, dvs. udtrykket for det øjeblikkelige hastighedsfelt for den angivne bevægelse af tetraederrummet.

OPGAVE 9.8

Bestem tilsvarende udtryk som i eksempel 9.6, men nu ud fra følgende – lidt simplere – data for bevægelsen af tetraederrummet:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (t,t,1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad .\end{aligned} \tag{9.26}$$

9.3 Karakterisering af hastighedsfeltet

Der er to hovedtilfælde for det øjeblikkelige hastighedsfelt for en bevægelse af tetraederrummet til et givet tidspunkt t_0. Vi antager som ovenfor, at bevægelsen er givet på følgende måde, hvor $\mathbf{R}(t)$ som sædvanlig betegner en tidsafhængig rotationsmatrix og $\mathbf{p}(t)$ betegner en tidsparametriseret fodpunktskurve:

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{9.27}$$

Det afgørende er, om den ud fra $\mathbf{R}(t)$ bestemte akse-vektor (til det givne tidspunkt) $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ er nul-vektoren eller ikke:

9.3.1 Øjeblikkelig parallelforskydning

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$ er hastighedsfeltet simpelthen ifølge (9.23):

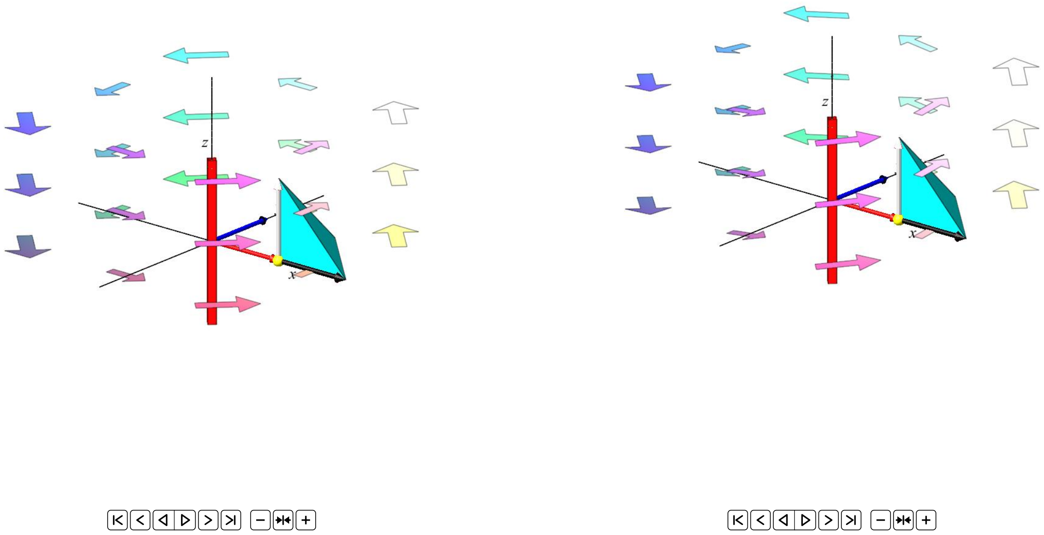
$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) \quad , \tag{9.28}$$

således at *alle* punkter q i hele rummet har *samme* hastighedsvektor til det betragtede tidspunkt t_0. Der er altså tale om en øjeblikkelig parallelforskydning (øjeblikkelig translation) i den retning og med den fart, som er givet ved tetraederfodpunktets hastighed $\mathbf{p}'(t_0)$ til det tidspunkt. Hvis specielt $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$ siger vi, at alle punkter i hele rummet er i øjeblikkelig hvile til tidspunktet t_0.

9.3.2 Øjeblikkelig skrue-bevægelse

Hvis $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ er en fast valgt vektor i rummet, kan vi definere en ret linje i rummet med retningsvektoren $\boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ på følgende måde, hvor parameteren er u og $\mathbf{r}_0$ er stedvektoren til et fast punkt i rummet:

$$\mathcal{L} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\,\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.29}$$



Figur 9.3: Lodrette tetraeder-bevægelser langs henholdsvis en cirkel og en vindellinje, begge med tilhørende øjeblikkelige skrue-akser samt hastighedsfelter for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$. Animeret.

Sætning 9.9 Vi ser på en speciel bevægelse af tetraederrummet beskrevet ved $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t)\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ som ovenfor men her med *konstant akse-vektor* $\boldsymbol{\omega}$ og en fodpunktsbevægelse med *konstant hastighedsvektor* $h\boldsymbol{\omega}$ *på linjen* $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\,\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.30}$$

Denne bevægelse giver anledning til følgende hastighedsfelt i rummet:

$$\mathbf{V}_q = h\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad . \tag{9.31}$$

Bevis. Vi indsætter $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\,\boldsymbol{\omega}$ i (9.23) og får som ønsket til ethvert tidspunkt t_0:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 - ht_0\,\boldsymbol{\omega}) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \tag{9.32}$$

$\square$

Definition 9.10 Enhver bevægelse af et tetraederrum, der til et givet tidspunkt t_0 giver anledning til et hastighedsfelt af formen (9.31) vil vi kalde en øjeblikkelig skrue-bevægelse med den rette linje $\mathcal{L}$ som øjeblikkelig skrue-akse, øjeblikkelig vinkelhastighed $\boldsymbol{\omega}$ og øjeblikkelig reduceret skrue-højde (pitch) h. Betegnelsen *øjeblikkelig* betyder selvfølgelig, at skrue-aksen, vinkelhastigheden, og den reducerede skruehøjde alle afhænger af tidspunktet og jo ikke nødvendigvis er konstante.

De betegnelser er helt rimelige. Lad os se på et eksempel:

Eksempel 9.11

Med udgangspunkt i akserotationsmatricen $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$, der har tilhørende akse-vektor $\boldsymbol{\omega} = (0,0,1)_G$, og ved valg af fodpunktskurven $p(t) = (0,0,ht)_G$, hvor h er en konstant, får vi

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}_z(t)\boxtimes(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + (0,0,ht)_G \\ &= \boxtimes((0,0,ht)_G,\mathbf{e}(t),\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)) \quad , \end{aligned} \tag{9.33}$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= (0,0,1)_G \\ \mathbf{e}(t) &= (\cos(t),\sin(t),0)_G \\ \mathbf{f}(t) &= (-\sin(t),\cos(t),0)_G . \end{aligned} \tag{9.34}$$

Hvis vi nu betragter et punkt $q(t)$ med faste koordinater $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)_N$ i det bevægede tetraedersystem får vi stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra O til $q(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = (0,0,ht)_G + \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.35}$$

således at

$$\mathbf{q}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix}_G \quad . \tag{9.36}$$

Dette er en rotation med vinkel t af vektoren $\mathbf{w}$ omkring z-aksen efterfulgt af en parallelforskydning i $z-$akseretningen med vektoren $(0,0,ht)_G$ - altså en skrue-bevægelse. Endnu mere konkret kan vi eksempelvis betragte punktet $(1,0,0)_N$ i det medfølgende tetraederrum. Det punkt vil gennemløbe følgende punkter, beskrevet med koordinaterne i det gamle koordinatsystem:

$$\mathbf{q}(t) = (0,0,ht)_G + \mathbf{e}(t) = (\cos(t),\sin(t),ht)_G \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.37}$$

hvilket netop er en parameterfremstilling for en helix - som er højreskruet hvis $h > 0$, venstreskruet hvis $h < 0$ og som er udartet til en cirkel hvis $h = 0$, jvf. opgave 8.5 i kapitel 8.

OPGAVE 9.12

I forlængelse af ovenstående eksempel 9.11: Find de kurver, som gennemløbes af punkterne $(0,1,0)_N$, $(0,0,1)_N$ og $(1,2,3)_N$ i løbet af skruebevægelsen.

9.4 Hovedresultat for roterende bevægelser

Vi kan nu formulere og vise hovedsætningen for roterende bevægelser i rummet. Vi antager, at $\boldsymbol{\omega}(t_0) \neq \mathbf{0}$ sådan at der virkelig er tale om en egentlig rotation. (Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$ er sagen allerede klar; så er der tale om en øjeblikkelig parallelforskydning, se 9.3.1 ovenfor.)

Sætning 9.13 Lad $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ betegne en egentlig roterende bevægelse af basistetraederet langs en given fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$. Vi antager altså, at $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t.

Så findes der til ethvert tidspunkt t_0 en entydigt bestemt ret linje $\mathcal{L}(t_0)$ i rummet, nemlig

$$\mathcal{L}(t_0) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \left(\mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2}\right) + u\,\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.38}$$

således at den øjeblikkelige bevægelse af tetraederrummet til tidspunktet t_0 er en skrue-bevægelse med $\mathcal{L}(t_0)$ som skrue-akse og med reduceret skruehøjde $h(t_0)$ som er givet ved

$$h(t_0) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \cdot \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad . \tag{9.39}$$

Hvis $h(t_0) = 0$ er der tale om en øjeblikkelig drejning omkring aksen $\mathcal{L}(t_0)$ til det givne tidspunkt t_0.

Det øjeblikkelige hastighedsfelt for bevægelsen af tetraederrummet på stedet $\mathbf{q}$ er tilsvarende:

$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.40}$$

Definition 9.14 De ingredienser som udledes i sætning 9.13 til beskrivelse af den egentlige roterende bevægelse $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$, altså $\mathcal{L}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, og $h(t)$ vil vi her og i det følgende kalde bevægelsens skrue-data til tiden t.

Bevis for sætning 9.13. Vi skal blot vise, at det øjeblikkelige hastighedsfelt har form som i ligning (9.31). Vi lokaliserer først skrue-aksen i rummet, dvs. vi skal finde et eller flere punkt(er) $q = r$

således at følgende ligning er opfyldt for en passende værdi af $h(t_0)$:

$$\mathbf{V}_r(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad . \tag{9.41}$$

Denne ligning er selvfølgelig ækvivalent med

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.42}$$

Men den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.42): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.42). Se opgave 9.15 nedenfor. Vi sætter $\mathbf{r}_0$ til at være det udpegede punkt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad , \tag{9.43}$$

sådan at

$$\mathcal{L}(t_0) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\,\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.44}$$

Med det $\mathbf{r}_0$ har vi så også (per konstruktion) at (9.42) er opfyldt:

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \tag{9.45}$$

Heraf får vi

$$\mathbf{p}'(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad , \tag{9.46}$$

som ved indsættelse i (9.23) giver

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= (h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0))) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \tag{9.47}$$

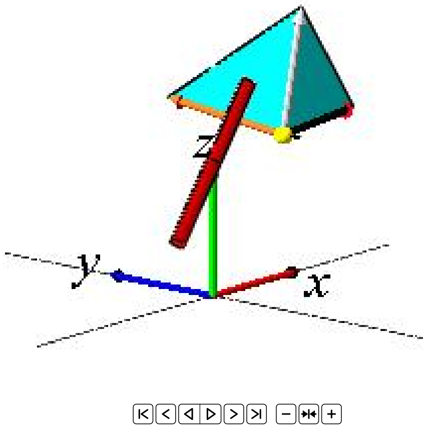
Det vil sige, at vi sluttelig har følgende øjeblikkelige hastighedsfelt for den betragtede bevægelse:

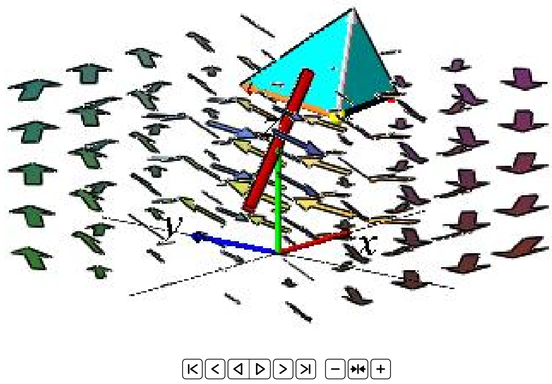
$$\mathbf{V}_q(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad , \tag{9.48}$$

og det er netop i henhold til definition 9.10 en øjeblikkelig skruebevægelse omkring den påståede akse. Skruebevægelsen reducerer specielt til en øjeblikkelig drejning hvis $h(t_0) = 0$. □

OPGAVE 9.15

Vis, at ovenstående intermezzo i beviset for sætning 9.13 er OK, altså at: "Den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.42): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.42)."





Figur 9.4: Tetraeder-bevægelse langs cirkel, den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse samt hastighedsfeltet for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.16. Animeret.

|||| Eksempel 9.16

En bevægelse af tetraederrummet er givet ved udtrykkene for $\mathbf{p}(t)$ og $\mathbf{R}(t)$, som er angivet i eksempel 9.6:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\
\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G \quad .
\end{aligned}
\tag{9.49}
$$

I det eksempel fandt vi, at aksevektoren for bevægelsen er

$$
\boldsymbol{\omega}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)_G \quad . \tag{9.50}
$$

Bevægelsen af tetrederrummet har så følgende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af t:

$$
\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 3/2)_G + (u\cos(t), u\sin(t), u)_G \quad , \quad u \in [0, 2\pi] \tag{9.51}
$$

med reduceret skruehøjde $h(t) = 0$. Bemærk, at den øjeblikkelige skrueakse afhænger (kraftigt) af tidspunktet t. Se opgave 9.17 og figurerne 9.4.

OPGAVE 9.17

Vis, at den påståede skrue-akse i eksempel 9.16 er korrekt for enhver værdi af t, og eftervis, at skruehøjden konstant er 0, således at der til ethvert tidspunkt er tale om en øjeblikkelig drejning omkring den øjeblikkelige skrue-akse.

OPGAVE 9.18

Bestem skrue-akse og reduceret skruehøjde for ethvert t i det eksempel, der er defineret i opgave 9.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (t,t,1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.52}$$

OPGAVE 9.19

Bestem $\omega(t)$, det øjeblikkelige hastighedsfelt, den øjeblikkelige skrueakse, og den øjeblikkelige reducerede skruehøjde for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$ ud fra følgende data for en bevægelse af tetraederrummet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_x(2t) \quad . \end{aligned} \tag{9.53}$$

9.5 Frenet–Serret skrue-data

I dette afsnit vil vi se lidt nærmere på de specielle tetraederbevægelser, der er totalt styret af en given fodpunktskurve, nemlig Frenet–Serret styring ved hjælp af Frenet–Serret basen for en given regulær kurve $\mathbf{p}(t)$ med positiv krumning som vi indførte og analyserede i kapitel 8, afsnittene 8.3 og 8.6.

Vi vil her specielt undersøge hvordan *krumningen* og *torsionen* af fodpunktskurven indgår i beskrivelsen af skrue-data for Frenet–Serret styringen af et basistetraeder langs den givne fodpunktskurve.

Sætning 9.20 Lad $\mathbf{p}(t)$ betegne en regulær kurve i rummet med fart $v(t)$, krumning $\kappa(t) > 0$, torsion $\tau(t)$, og medfølgende *Frenet–Serret tetraeder*:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad . \tag{9.54}$$

Skrue-data for den derved definerede Frenet–Serret styring af ⊠(t) er da givet ved følgende udtryk for enhver given værdi af t:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t)\cdot\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t) + v(t)\cdot\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.55}$$

$$h(t) = \frac{\tau(t)}{\kappa^2(t)+\tau^2(t)} \quad , \quad \text{og} \tag{9.56}$$

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t)+\tau^2(t)}\cdot\mathbf{f}(t)\right) + u\cdot(\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t)) \quad . \tag{9.57}$$

Bevis. Vi ved allerede fra kapitel 8 at de gamle koordinater for $\boldsymbol{\omega}$ er elementer i aksematricen $\boldsymbol{\Omega}$ som jo per definition er matricen (mht. den gamle basis) for den lineære afbildning $\mathbf{v}\mapsto\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$. De nye koordinater for $\boldsymbol{\omega}$ (dvs. koordinaterne med hensyn til den nye basis $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$) fås derfor som de tilsvarende elementer i afbildningens matrix med hensyn til den nye basis, som er givet via basisskiftmatricen $\mathbf{R}$ på følgende vis – sammenlign med ligning (9.16):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{R} &= \mathbf{R}^{-1}\cdot(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}^*)\cdot\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R}^*\cdot(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}^*)\cdot\mathbf{R} \\
&= (\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}')\cdot(\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}) \\
&= (\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}')\cdot\mathbf{E} \\
&= \boldsymbol{\Xi} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -v\cdot\kappa & 0 \\ v\cdot\kappa & 0 & -v\cdot\tau \\ 0 & v\cdot\tau & 0 \end{bmatrix} \quad ,
\end{aligned} \tag{9.58}$$

hvor $v = v(t)$ betegner farten, længden af $\mathbf{p}'(t)$, i.e. $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$. Koordinaterne for $\boldsymbol{\omega}$ med hensyn til $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ er derfor:

$$\boldsymbol{\omega} = v\cdot(\tau,0,\kappa)_N \quad , \tag{9.59}$$

sådan at

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t)\cdot(\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t)) \quad , \tag{9.60}$$

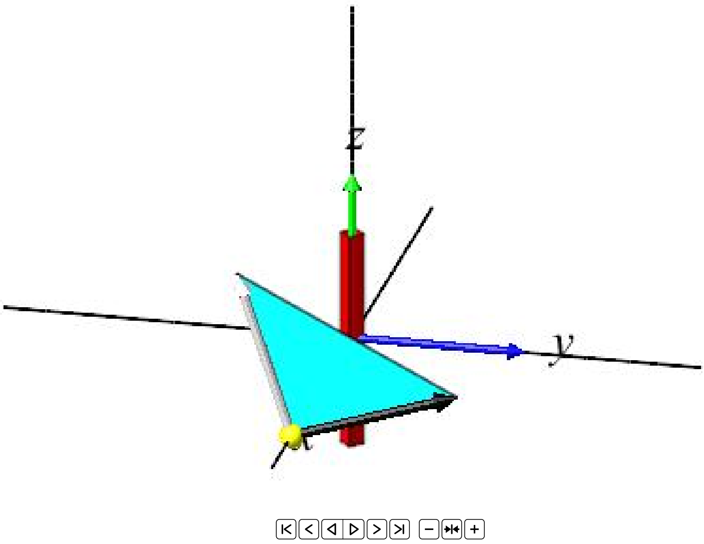
som påstået.

Dernæst får vi direkte:

$$\|\boldsymbol{\omega}(s)\|^2 = v^2(t)\cdot\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right) \quad , \tag{9.61}$$

og dermed følgende:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t)\bullet\mathbf{p}'(t) &= (\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t))\bullet\mathbf{e}(t) = \tau(t) \\
\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{p}'(t) &= (\tau(t)\cdot\mathbf{e}(t)+\kappa(t)\cdot\mathbf{g}(t))\times\mathbf{e}(t) = \kappa(t)\cdot\mathbf{f}(t) \quad ,
\end{aligned} \tag{9.62}$$



Figur 9.5: Frenet–Serret styring langs en vindellinje og den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af $s \in [0, 2\pi]$. Animeret.

som giver resten af de påståede skruedata ved indsættelse i definition 9.14. □

OPGAVE 9.21

Lad $\mathbf{p}(s)$ betegne følgende buelængdeparametriserede rumkurve (jvf. opgave 8.49 fra kapitel 8):

$$\mathbf{p}(s) = (3\cos(s/5), 3\sin(s/5), 4s/5) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.63}$$

Bestem skrue-data for Frenet–Serret styring langs $\mathbf{p}(s)$ og angiv til ethvert tidspunkt det tilsvarende øjeblikkelige hastighedsfelt af det medfølgende tetraederrum.

9.6 Styring med givne skrue-data

Vi vil i dette afsnit se på den *omvendte problemstilling* i forhold til hovedresultatet i sætning 9.13, nemlig følgende:

Antag, at vi har fået oplyst en parameterfremstilling (med enheds-retningsvektor $\mathbf{v}(t)$) for en ret linje $\mathcal{L}(t)$ til ethvert tidspunkt t, samt to funktioner af tiden $w(t)$ og $h(t)$. Antag også, at vi kender den præcise placering af et standard tetraeder i rummet til tiden $t = 0$, dvs. vi kender $\boxtimes(0) = \mathbf{R}(0) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(0)$, hvor altså $\mathbf{R}(0)$ er en given rotationsmatrix og $\mathbf{p}(0)$ er et givet fodpunkt i rummet. Kan vi så konstruere $\mathbf{R}(t)$ og $\mathbf{p}(t)$ til ethvert senere – og tidligere – tidspunkt sådan at den givne rette linje $\mathcal{L}(t)$ til det tidspunkt netop bliver den øjeblikkelige skrue-akse for den øjeblikkelige skruebevægelse af $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ med øjeblikkelig akse-rotationsvektor $\boldsymbol{\omega} = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$?

Svaret er ja, det kan vi! Og det er indholdet af følgende sætning, hvor vi gentager beskrivelsen af scenariet med lidt flere præcise detaljer:

Sætning 9.22 Vi lader $\mathcal{L}(t)$ betegne følgende familie af orienterede rette linjer i rummet:

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{q}(t) + u \cdot \mathbf{v}(t) \quad , \quad \text{hvor} \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \tag{9.64}$$

hvor $\mathbf{q}(t)$ er en parametriseret kurve i rummet, og hvor $\mathbf{v}(t)$ er en enhedsvektor til ethvert tidspunkt $t \in \mathbb{R}$. Lad $h(t)$ og $w(t)$ betegne to givne funktioner af t og antag at $w(t) > 0$ for alle t. Lad endelig p_0 betegne et punkt i rummet med stedvektor $\mathbf{p}_0$ og lad $\mathbf{R}_0$ betegne en given rotationsmatrix.

Så findes der en entydigt bestemt parametriseret fodpunktskurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ og en entydigt bestemt t-parametriseret familie af rotationsmatricer $\mathbf{R}(t)$ med $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ således at følgende roterende bevægelse af standard-tetraederrummet

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \tag{9.65}$$

netop har $\mathcal{L}(t)$ som øjeblikkelig skrueakse, $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ som øjeblikkelig aksevektor, og $h(t)$ som øjeblikkelig reduceret skruehøjde.

Specifikt skal fodpunktskurven tilfredsstille følgende differentialligninger (med begyndelsesbetingelsen $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \end{aligned} \tag{9.66}$$

Bevis. Som antydet skal vi løse to differentialligningssystemer, dels et for $\mathbf{p}(t)$ og dels et for $\mathbf{R}(t)$ med begyndelsesbetingelserne $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$. Men $\mathbf{R}(t)$ bestemmes direkte ud fra $\boldsymbol{\omega}(t)$ og $\mathbf{R}(0)$ som i kapitel 7 afsnit 7.4.1 (se metoden og eksemplerne der og konkrete eksempler nedenfor).

Vi mangler derfor kun at bestemme fodpunktskurven $\mathbf{p}(t)$, dvs. vise, at den er givet som løsning til (9.66).

Fodpunktet $\mathbf{p}(t)$ skal opfylde to krav som stammer direkte fra sætning 9.13: Det første krav er givet ved ligning (9.39):

$$\mathbf{p}'(t) \bullet \boldsymbol{\omega}(t) = h(t) \cdot \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 \quad , \tag{9.67}$$

som – efter division med $w(t)$ på begge sider af lighedstegnet – er ækvivalent med:

$$\mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = h(t) \cdot w(t) \quad . \tag{9.68}$$

Det andet krav er at til ethvert givet tidspunkt t skal det givne punkt $\mathbf{q}(t)$ ligge på den givne linje $\mathcal{L}(t)$, dvs. i henhold til ligning (9.38):

$$\mathbf{q}(t) = \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2}\right) + u\,\boldsymbol{\omega}(t) \tag{9.69}$$

for et passende valg af parameterværdi $u \in \mathbf{R}$ (som gerne må afhænge af t). Dvs. for ethvert tidspunkt t skal der findes en værdi af u således at

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + u \cdot w(t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \tag{9.70}$$

Vi kan isolere den søgte værdi af u fra denne ligning ved at danne skalarprodukt med $\mathbf{v}(t)$ på begge sider af lighedstegnet:

$$(\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t) = u \cdot w(t) \quad , \tag{9.71}$$

hvor vi har benyttet, at $\mathbf{v}(t)$ jo er vinkelret på krydsproduktet $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)$ og at $\mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{v}(t) = 1$ for alle t.

Heraf får vi så ved at indsætte $u \cdot w(t) = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)$ tilbage i ligning (9.70):

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \tag{9.72}$$

Ved at omskrive den ligning lidt får vi endelig:

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) = w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \tag{9.73}$$

Vi har dermed de to påståede ligninger til bestemmelse af $\mathbf{p}(t)$ ud fra $h(t)$, $w(t)$, $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{q}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \end{aligned} \tag{9.74}$$

Hvis vi skriver disse ligninger ud i koordinater, altså bruger $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G$ osv. vil vi se (som i det simple eksempel nedenfor) at vi har ialt 4 koblede lineære første-ordens differentialligninger til bestemmelse af de 3 koordinatfunktioner for $\mathbf{p}(t)$.

Det betyder dog ikke, at differentialligningssystemet er overbestemt og derfor muligvis uden løsninger – hvad vi godt kunne frygte, fordi der jo er flere ligninger end ubekendte. Koefficientmatricen for det totale differentialligningssystem har netop rangen 3 (se opgaver og eksempler nedenfor) således at der for givne (passende pæne) koefficientdata $h(t)$, $w(t)$, $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{q}(t)$ findes præcis én løsning $\mathbf{p}(t)$ til differentialligningssystemet (9.74) med den givne begyndelsesbetingelse $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Og det var det, vi skulle vise. □

Vi illustrerer påstanden om, at der generelt findes præcis én løsning til (9.74):

Eksempel 9.23

Vi antager, at $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ = den sædvanlige tredje basisvektor i det (gamle) koordinatsystem for alle t. Så reducerer differentialligningssystemet i (9.74) til følgende – skrevet ud med koordinaterne for de respektive vektorfunktioner:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ p_2'(t) &= w(t) \cdot (p_1(t) - q_1(t)) \\ p_1'(t) &= w(t) \cdot (q_2(t) - p_2(t)) \quad , \end{aligned} \tag{9.75}$$

som netop har rangen 3 og en entydig løsning med $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Bemærk, at 'krydsproduktligningen' i (9.74) kun giver anledning til 2 ligninger, der tilsammen redegør for hvordan $\mathbf{p}(t)$ udvikler sig i det 2D-vektorrum, der er vinkelret på $\mathbf{v} = \mathbf{k}$.

OPGAVE 9.24

Lad $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_G$ betegne en given enhedsvektor i rummet og lad $(*)$ betegne følgende ligningssystem for $\mathbf{x} = (x, y, z)_G$, hvor a er et reelt tal og hvor $\mathbf{b}$ er en vektor der er vinkelret på $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= a \\ \mathbf{v} \times \mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad . \end{aligned} \tag{9.76}$$

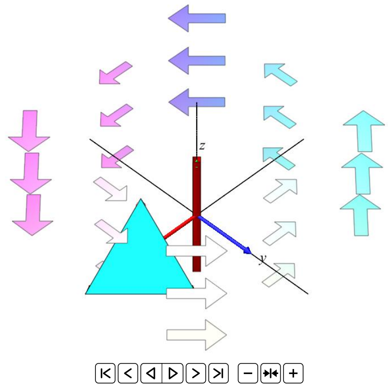
Vis, at $(*)$ kan skrives på formen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^*$, hvor $\mathbf{A}$ er en (4×3)-matrix og $\mathbf{c}$ er en vektor. Vis dernæst, at (4×4)-totalmatricen for dette lineære ligningssystem har rangen 3, således at der er netop én løsning $\mathbf{x}$ til systemet.

Eksempel 9.25

Med $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ som i ovenstående eksempel 9.23 og med $h(t) = 0$, $w(t) = 1$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$ for alle t får vi:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= 0 \\ p_2'(t) &= p_1(t) \\ p_1'(t) &= -p_2(t) \quad , \end{aligned} \tag{9.77}$$

som har den fuldstændige løsning (med frie konstanter c_i) (fås på samme måde som i eksempel 7.20 i



Figur 9.6: Tetraederbevægelsen som er udviklet i eksemplerne 9.23 og 9.25. Animeret.

Kapitel 7):

$$\begin{aligned} p_3(t) &= c_3 \\ p_2(t) &= c_1 \cdot \sin(t) + c_2 \cdot \cos(t) \\ p_1(t) &= c_1 \cdot \cos(t) - c_2 \cdot \sin(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.78}$$

Hvis vi dernæst antager, at fodpunktet til tiden $t = 0$ er givet ved $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = (1,0,0)_G$ får vi derfor følgende præcise fodpunktskurve til ethvert andet tidspunkt t – ved at indsætte $t = 0$ i ovenstående ligninger og løse for c_1, c_2, og c_3:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0 \\ p_2(t) &= \sin(t) \\ p_1(t) &= \cos(t) \quad . \end{aligned} \tag{9.79}$$

Med fodpunktskurven på plads, mangler vi blot at konstruere rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ således at den netop til ethvert tidspunkt t har den ønskede aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$ og iøvrigt tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen, som vi her i dette eksempel vil antage er givet simpelt ved: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$.

Konstruktionen af $\mathbf{R}(t)$ foregår præcis som i eksempel 7.20 i kapitel 7. Hvis vi gennemgår proceduren derfra får vi følgende – ikke overraskende – resultat:

$$\mathbf{R}(t) = \left[\ \mathbf{e}^*(t) \quad \mathbf{f}^*(t) \quad \mathbf{g}^*(t)\ \right] = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(t) \quad . \tag{9.80}$$

Vi kan altså konkludere, at i dette eksempel er det følgende entydigt givne tetraederbevægelse, der vil give anledning til de ønskede givne skrue-data inklusive de givne begyndelsesbetingelser (se animationen af bevægelsen samt det inducerede hastighedsvektorfelt i figur 9.6):

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes (O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes (O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + (\cos(t), \sin(t), 0)_G \quad . \end{aligned} \tag{9.81}$$

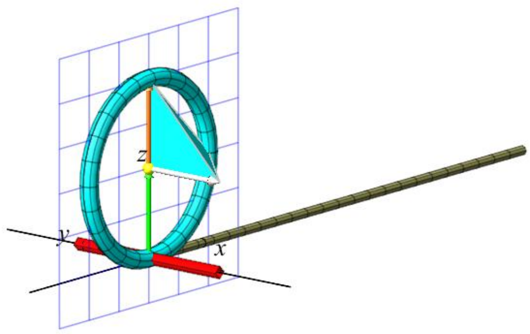
OPGAVE 9.26

Bestem på samme måde som i eksempel 9.23 de tetraederbevægelser, der opfylder følgende skrue-data og begyndelsesbetingelser:

1. $w(t) = 2$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
2. $w(t) = 2$, $h(t) = 1$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
3. $w(t) = 1$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_x(\pi/4)$
4. $w(t) = 1$, $h(t) = 1, \mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$, $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_z(\pi/4)$

OPGAVE 9.27

Angiv skruedata som kan bruges til konstruktion af rulning af en cirkel langs en ret linje som i figur 9.7.

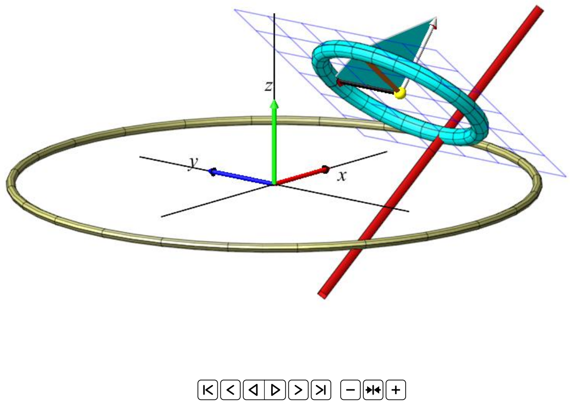


Figur 9.7: Rulning af cirkel langs linje. Bemærk især at den vandrette øjeblikkelige skrueakse ligger i (x,y)-planen parallel med y-aksen og at den øjeblikkelige reducerede skruehøjde er $h(t) = 0$ for alle t. Se opgave 9.27.

OPGAVE 9.28

Angiv skruedata som kan bruges til konstruktion af den rulning af en cirkel på en cirkel som er vist i figur 9.8.

Ved at ændre ganske lidt på de simple skrue-data, som vi har betragtet ovenfor kan man let konstruere langt mere komplicerede tetraeder-bevægelser, som f.eks. illustreret med følgende eksempel og tilhørende opgave:



Figur 9.8: Rulning af tiltet cirkel langs en vandret cirkel. Bemærk især at den øjeblikkelige skrueakse har en fast vinkel med z-aksen og at den øjeblikkelige reducerede skruehøjde også her er $h(t) = 0$ for alle t. Se opgave 9.28.

Eksempel 9.29

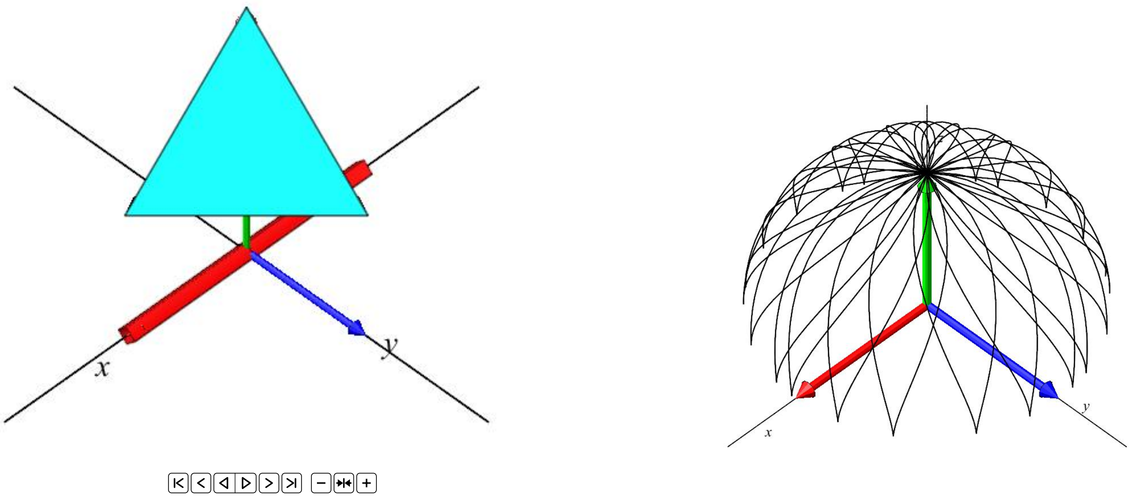
I dette eksempel benyttes følgende skrue-data og begyndelsebetingelser: $w(t) = 1$, $h(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)_G$, $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$, $\mathbf{p}(0) = (0,0,1)_G$, og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$. De resulterende ligninger (9.74) *kan* løses eksakt og løsningerne *kan* udtrykkes ved almindelige funktionstegn. Resultatet er vist i figur 9.9.

OPGAVE 9.30

Det synes at fremgå af figur 9.9, at den tetraederbevægelse, der er resultatet af skrue-data i eksempel 9.29, har en fodpunktskurve, der ligger helt indeholdt i en (halv-)kugleflade med radius 1 og centrum i Origo samt at farten af fodpunktskurven er 0 netop når fodpunktet rører (x,y)-planen. Kan du bevise, at de observationer er korrekte? Er fodpunktskurven en lukket kurve, der gennemløbes igen og igen når tiden går? Hvis ikke, betyder det så at alle punkter på halvkuglen bliver 'ramt' af fodpunktskurven på et eller andet tidspunkt?

9.7 Skruebevægelser med fast akse

De bevægelser af det medfølgende tetraederrum, som har konstant skrue-akse og en fodpunktbevægelse på denne faste akse, må formodes at være særligt simple. Vi antager først, at den faste akse er z-aksen, og giver i næste afsnit en præsentation af rotationer omkring en vilkårlig fast akse.



Figur 9.9: Tetraederbevægelsen som er givet via skrue-data i eksemplet 9.29. Animeret. Til højre ses (en del af) den kurve som tetraederets fodpunkt $\mathbf{p}(t)$ gennemløber.

Når den faste akse er z-aksen får vi specielt fra hovedresultatet for roterende bevægelser, Sætning 9.13, at:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad : \quad \mathbf{r}(u) &= \left(\mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2}\right) + u\,\boldsymbol{\omega}(t) \\ &= (0,0,g(t) + u\,w(t)) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \, t \in [0,T] \quad ,\end{aligned} \tag{9.82}$$

hvor fodpunktbevægelsen $\mathbf{p}(t)$ er antaget at foregå langs z-aksen, således at $\mathbf{p}(t) = (0,0,g(t))$ for en løfte-funktion $g(t)$, og hvor den aktuelle akse-vektor er parallel med z-aksen og givet ved $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v}(t) = w(t)\,(0,0,1)$.

Den reducerede skruehøjde er dermed:

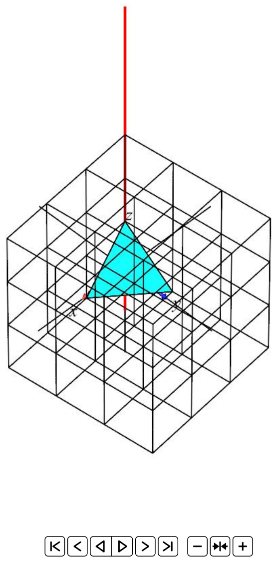
$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \\ &= \frac{g'(t)}{w(t)} \quad , \quad \text{for alle } \; t \in [0,T] \quad .\end{aligned} \tag{9.83}$$

Da der er tale om en skruebevægelse omkring z-aksen må vi forvente, at den rotationsmatrix-funktion $\mathbf{R}(t)$, der definerer bevægelsen via udtrykket

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \tag{9.84}$$

har følgende form:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \tag{9.85}$$



Figur 9.10: Tetraederbevægelse med fast akse og data $f(t) = t$ og $g(t) = t$.

hvor drejningsvinklen er en passende funktion af tiden, $f(t)$.

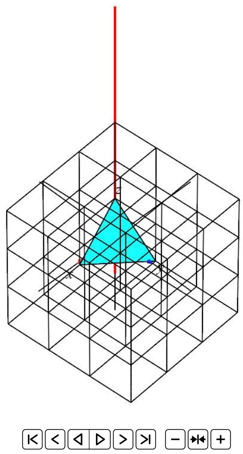
At den forventning holder stik fås direkte af udregningen af rotationens aksematrix $\mathbf{\Omega}(t)$ og den tilhørende aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \\
&= \mathbf{R}'_z(f(t)) \cdot \mathbf{R}^*_z(f(t)) \\
&= \mathbf{R}'_z(f(t)) \cdot \mathbf{R}^*_z(f(t)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -f'(t) & 0 \\ f'(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \\
\boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, f'(t)) \quad .
\end{aligned} \tag{9.86}$$

Det vil sige, at den afledede af drejningsvinklen er længden (med fortegn) af rotationens aksevektor. Den reducerede skruehøjde er således givet ved forholdet mellem de afledede af f og g:

$$h(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad , \quad \text{for alle } t \in [0, T] \quad . \tag{9.87}$$

I det specielle tilfælde i eksempel 9.11 er $g(t) = ht$ og $f(t) = t$ således at $h(t) = h$ (med fortegn). Det eksempel er animeret i figur 9.10 (med $h = 1$) hvori der også er monteret et gitter fast på det bevægede tetraeder for at vise den inducerede bevægelse af det medfølgende rum. Til sammenligning vises bevæglesen med data $f(t) = 2\pi\sin^2(t)$ og $g(t) = 2\pi\sin^2(t)$ i figur 9.11 nedenfor.



Figur 9.11: Tetraederbevægelse med fast akse og data $f(t) = 2\pi\sin^2(t)$ og $g(t) = 2\pi\sin^2(t)$.

9.8 Rodrigues' formel

Når aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ har en konstant retning, som ikke nødvendigvis er $(0,0,1)$ som ovenfor, så kan $\mathbf{R}(t)$ stadig bestemmes direkte - det er lidt mere kompliceret, men Rodrigues' formel giver en færdig formel:

Sætning 9.31 Lad $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v}$ være en given vektorfunktion hvor $\mathbf{v}$ er en konstant enhedsvektor, $||\mathbf{v}|| = 1$. Vi ønsker at konstruere den rotationsmatrix-funktion $\mathbf{R}(t)$, der har aksevektoren $\boldsymbol{\omega}(t)$ og som starter med en given rotationsmatrix $\mathbf{R}_0$.

Lad $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ betegne den aksematrix, der har aksevektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.88}$$

Ud fra $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\mathbf{R}(t) = \Big(\mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\mathbf{\Omega}}^2(t)\Big) \cdot \mathbf{R_0} \quad , \tag{9.89}$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(\tau)\, d\tau \quad . \tag{9.90}$$

Så er $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$, og den til $\mathbf{R}(t)$ hørende akse-matrix er givet ved

$$\mathbf{\Omega}(t) = w(t)\,\widehat{\mathbf{\Omega}} \quad . \tag{9.91}$$

Den tilsvarende akse-vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} \quad , \tag{9.92}$$

som ønsket.

Bevis. Det følger via en direkte udregning af $\mathbf{\Omega}(t)$ ud fra den påståede $\mathbf{R}(t)$. □

Eksempel 9.32

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\,\mathbf{v} = w(t)\,\mathbf{k} = (0, 0, w(t))$ og $\mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ får vi:

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.93}$$

Ud fra $\widehat{\mathbf{\Omega}}(t)$ konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\mathbf{\Omega}}^2(t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(f(t)) & -\sin(f(t)) & 0 \\ \sin(f(t)) & \cos(f(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \end{aligned} \tag{9.94}$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(u)\, du \quad . \tag{9.95}$$

Så er $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$, og den til $\mathbf{R}(t)$ hørende aksematrix er givet ved

$$\mathbf{\Omega}(t) = w(t)\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) = f'(t)\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(t) \tag{9.96}$$

og den tilsvarende akse vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} = f'(t)\,(0,0,1) \quad , \tag{9.97}$$

som i ovenstående afsnit 9.7.