

# Geometrien af en scroll-kompressor

## Fra et konkret problem til abstrakt matematik

Jens Gravesen and Christian Henriksen

10. februar 1999

### Abstract

Med udgangspunkt i scroll-kompressoren, en opfindelse fra 1905, gennemgås en stor del af teorien for plane kurver. Begreberne afvikler, evolut, indhyllingskurve og især den naturlige ligning viser sig at have afgørende betydning for analysen af scroll-kompressoren. Med den naturlige ligning som fundament kan alle geometrisk forhold vedrørende scroll-kompressoren udregnes eksakt og uden besvær.

## 1 Indledning

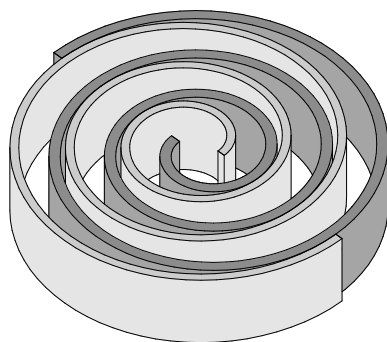
I dagene 31. august – 4. september afholdtes den succesrige ‘32nd European Study Group with Industry’<sup>1</sup> på Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet. En ‘study group’ er en workshop, hvor grupper af matematikere sammen med repræsentanter for virksomheder arbejder med en opgave fra virksomheden. Denne type møder stammer fra England, hvor nu afdøde Alan Tayler i 1968 startede ‘Oxford Study Group with Industry’. I 1988 afholdes de for første gang uden for Oxford, og er siden blevet holdt årligt ved forskellige universiteter i Storbritannien. Sideløbende hermed blev der i 80’erne startet ‘study groups’ i USA, Australien, Mexico og Canada. De britiske møder skiftede i 1991 navn til ‘European Study Group with Industry’ (ESGI); men det var først i 1998 en ESGI blev afholdt udenfor Storbritannien, nemlig den 32’te i Danmark og ugen efter den 33’te i Holland på Leiden Universitet.

Ved ovennævnte første danske ESGI deltog 6 virksomheder og ca. 45 danske og udenlandske matematikere. Samtlige problemer og de tilhørende

---

<sup>1</sup>Mødet blev støttet af COWI-fonden og Carlsberg Mindelegat. Nærmere oplysninger kan findes på net-adressen <http://www.mat.dtu.dk/ESGI32/>

løsningsforslag findes i rapporten fra mødet [4]. Nogle af de største danske virksomhederne deltog, deriblandt Danfoss, hvorfra Stig Helmer Jørgensen præsenterede et problem vedrørende optimering af en scroll-kompressor.



Figur 1: Den klassiske scroll-kompressor. Spiralerne er identiske cirkelafviklere, blot drejet  $180^\circ$  i forhold til hinanden. For at spiralerne kan ses, har vi ikke vist bunden og låget, som er fastgjort til henholdsvis den lyse og den mørke spiral.

Scroll-kompressoren blev opfundet af Léon Creux i 1905, se [1] og figur 2, og består af to spiraler der bevæger sig inden i hinanden, se figur 1. I det klassiske design er spiralerne identiske cirkelafviklere, der er drejet  $180^\circ$  i forhold til hinanden. Princippet i virkemåden kan ses i figur 3, hvor vi dog for overskuelighedens skyld kun har to vindinger i modsætning til de sædvanlige tre. Uheldigvis kunne man i 1905 ikke fremstille spiralerne med tilstrækkelig stor præcision til at forhindre lækager, så opfindelsen blev glemt. Sidst i 70'erne blev interessen genoplivet, se [7], og i starten af 80'erne startede produktion i form af pilot-projekter. Industriel fremstilling i fuld skala påbegyndtes i starten af 90'erne, og nu gøres der udstrakt brug af dem i aircondition anlæg.

Scroll-kompressorer har mange fordele, f.eks. er der ingen ventiler og i det hele taget er der kun et minimum af bevægelige dele. Desuden er de mekaniske ubalancer langt mindre end i en stempel-kompressor, og støjniveauet er også mindre. Der er også ulemper. I modsætning til stempel-kompressorer kan man ikke bruge stempler til tætning, så for at undgå lækager er det nødvendigt med en langt større præcision ved fremstillingen. Den største ulempe er den forholdvis lave kompression, der for øjeblikket kan opnås med disse kompressorer. Nutidens scroll-kompressor giver en kompression på omkring 2,5, hvilket er tilstrækkelig til aircondition; men for lavt til køle- eller fryse-brug. Opgaven fra Danfoss gik ud på at undersøge, om en ændring af spiralerne form kan forbedre kompressorens virkning. Det endelige mål er selvsagt at finde den bedste kompressor-spiral.

UNITED STATES PATENT OFFICE.

LÉON CREUX, OF PARIS, FRANCE.

ROTARY ENGINE.

No. 801,182. Specification of Letters Patent. Patented Oct. 3, 1905.  
Application filed June 26, 1905. Serial No. 207,091.

To all whom it may concern:

Be it known that L. Léon Creux, engineer, a citizen of the Republic of France, residing at 54 Rue Talbot, Paris, in the Republic of France, has invented certain new and useful improvements in Rotary Engines, of which the following is a specification.

The present invention relates to a rotary engine designed to be operated by an elastic fluid under pressure. The said engine may of course be used also as a pump for compressing an elastic fluid. The said engine comprises, essentially, between two parallel plates two spiral strips or bands having the shape of developed arc of circles of the same pitch, the ends of which are engaged one in another and touch at a certain number of points, so as to form between the said bands and the said plates a certain number of separate chambers which become greater as the said points of contact are displaced from the starting-point of the said developed arcs of circles toward the ends of the same. The said displacement of the points of contact, which involves a circular movement of translation of one of the spiral bands with respect to the other, is produced naturally by the expansion of the elastic fluid introduced in the chambers, the said fluid being introduced at the center of the spirals and escaping at the periphery.

In the accompanying drawings, which show several embodiments of the present invention, Figures 1 to 13 are diagrams for the purpose of explaining the invention. Fig. 14 is a vertical section of the engine on the line A-A of Fig. 15. Fig. 15 is a sectional view on the line B-B of Fig. 14. Fig. 16 is a sectional view on the line C-C of Fig. 15. Fig. 17 is a detail of a joint. Figs. 18 and 19 are respectively a vertical section and a plan of a shifting device as to the direction of rotation. Figs. 20, 21, and 22 show modified forms of the engine.

The developed arc of a circle is the curve described by the end *a*, Fig. 1, of an inextensible wire which unrolls from a fixed circumference while still remaining stretched and without moving out of the plane of the circumference. A joint on the wire, Fig. 2, at a distance *c* from *a* describes a developed arc of a circle equal to the first one and of which each point is at a distance *c* from the first curve. If two perpendicular lines *a'a'* and *b'b'*, Fig. 3, drawn from a plane *p'* are so

moved as to describe curves, they give rise to two curved surfaces. The space comprised between the said curved surfaces and the planes *p'* and *p''* constitutes a spiral band. Such a band secured to a circular plate *p'*, as seen in perspective in Fig. 4, constitutes one of the essential members of the engine. A similar band secured to the plate *p''* constitutes the other member of the engine.

If the two spiral bands 1 and 2 are engaged one within the other, as shown in Fig. 5, each coil of the band 1 is tangent at two points to the corresponding coil of the band 2. If a movement of translation is imparted to the band 1 with respect to the band 2, in keeping the said bands in the same direction, one with respect to the other, so that the curved surfaces still remain tangent the one to the other, each point of the band 1 will describe a circumference.

The spaces *d, d', &c.*, are entirely inclosed, and if the circular movement of translation takes place in the direction shown by the arrow the said spaces increase in size during the operation.

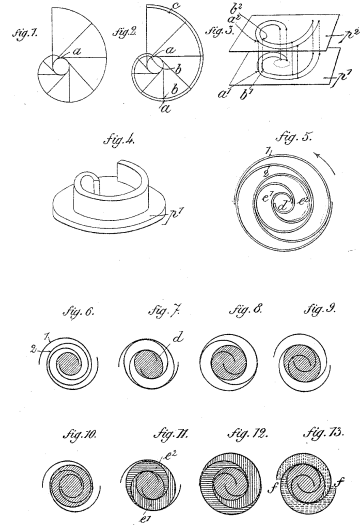
If steam is introduced at *d* and if the bands 1 and 2 are caused to move as just described, the expansive power of the steam will produce the relative movement of the bands in the direction shown by the arrow. The steam will occupy successively the spaces shaded in Figs. 6 to 13. Figs. 6 to 9 show the several phases during the first revolution. Figs. 10 to 13 show those of the second revolution. The steam will always operate at full pressure in the central chamber *d* and will expand at each revolution in the lateral chambers *d'* and will escape at *f*. The oblique hatchings in Figs. 6 to 13 show the steam at full pressure. The vertical or horizontal hatchings show the steam when expanding, and the dotted hatchings show the steam escaping.

To cause the spiral bands to move suitably one with respect to the other, all that need be done, as will be understood, is to connect the same by a suitable number of equal and parallel cranks or other similar connecting devices. According to the manner in which the bands or their connecting members are connected with the main frame of the engine, one of the bands may be fixed, or circular movements of translation may be imparted to both the bands, or a general or other movement of rotation may be imparted to the two bands

No. 801,182. PATENTED OCT. 3, 1905.

L. CREUX.  
ROTARY ENGINE.  
APPLICATION FILED JUNE 26, 1905.

6 SHEETS-SHEET 1.

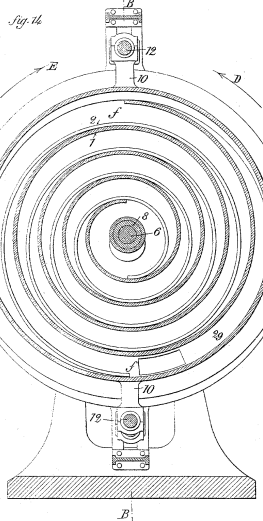


Witnesses -  
C. Allerton  
Sec. Hillyer  
Inventor -  
Léon Creux  
by A. H. Willson  
Attorney

No. 801,182. PATENTED OCT. 3, 1905.

L. CREUX.  
ROTARY ENGINE.  
APPLICATION FILED JUNE 26, 1905.

6 SHEETS-SHEET 2.

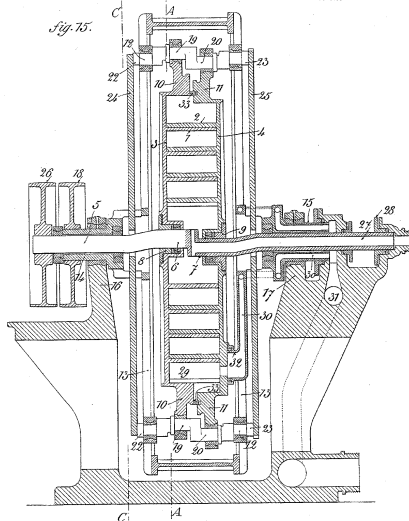


Witnesses -  
C. Allerton  
Sec. Hillyer  
Inventor -  
Léon Creux  
by A. H. Willson  
Attorney

No. 801,182. PATENTED OCT. 3, 1905.

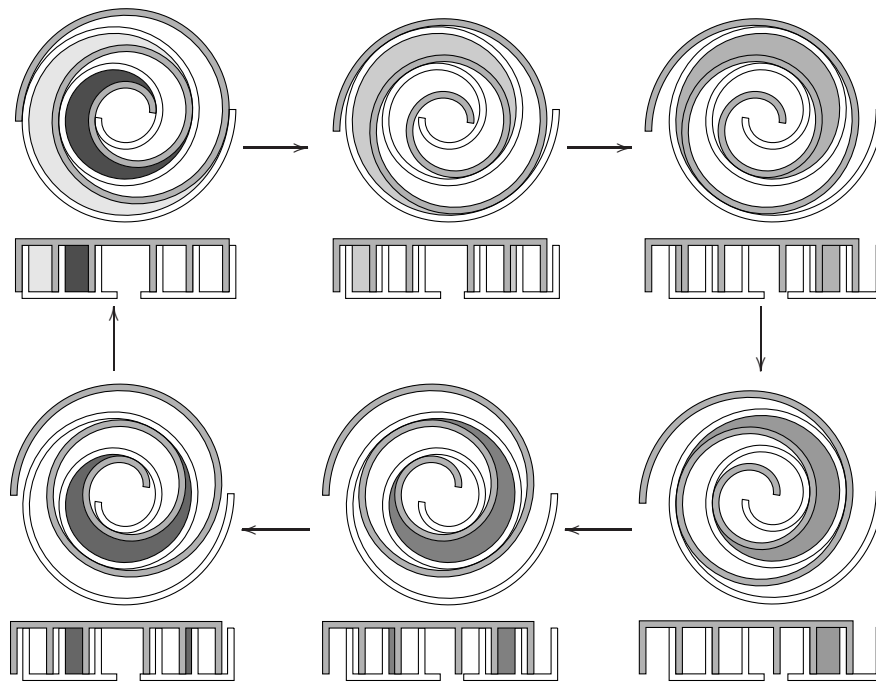
L. CREUX.  
ROTARY ENGINE.  
APPLICATION FILED JUNE 26, 1905.

6 SHEETS-SHEET 3.



Witnesses -  
C. Allerton  
Sec. Hillyer  
Inventor -  
Léon Creux  
by A. H. Willson  
Attorney

Figur 2: Sider fra Léon Creux's patent fra 1905.



Figur 3: Scroll-kompressorens virkemåde: Mens den hvide spiral er holdt fast, bevæger den grå spiral sig med uret rundt i en cirkel, uden selv at dreje. Derved tvinges luften, der er fanget i lommerne mellem de to spiraler, ind mod centrum, og da de inderste lommer er mindre end de yderste, opnås en kompression. Luften bliver suget ind fra kanten af kompressoren, og den komprimerede gas undslipper gennem et hul i midten af kompressoren.

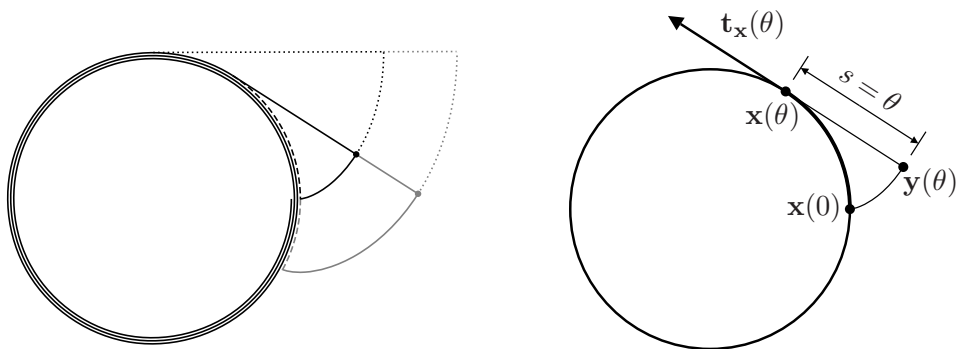
Under arbejdet med at analysere kompressorens geometri fik vi brug for store dele af den klassiske teori for plane kurver, og det var især en overraskelse, at den *naturlige ligning* viste sig at være nøglen til forståelsen af scroll-kompressorens geometri. Med udgangspunkt i den naturlige ligning kan alle geometriske størrelser udregnes eksakt og uden besvær.

Det er denne artikels formål at demonstrere dette; men vi tager dog det modsatte synspunkt – vi tager udgangspunkt i scroll-kompressoren, og bruger analysen af denne til at gennemgå de plane kurvers teori.

Inden vi starter bør vi nævne, at der også blev arbejdet med den hydrodynamiske modellering af kompressoren. Det aspekt vil vi ikke komme ind på her; men blot henvise til den endelige rapport [3]. Vi vil her gerne takke Stig Helmer Jørgensen for at vække vores interesse i problemet. Vi vil også gerne takke de andre deltagere ved ESGI32, specielt Peter Howell, for mange nyttige diskussioner. Endelig vil vi gerne takke vores kollegaer Vagn Lundgaard Hansen, Poul Hjorth og Steen Markvorsen for kritisk gennemlæsning af udkast til artiklen og mange nyttige kommentarer.

## 2 Den klassiske scroll-kompressor og cirkelafvikleren

Som allerede nævnt er spiralerne i den klassiske scroll-kompressor cirkelafviklere. Vi skal først gøre os klart at vi ikke blot har to, men fire kurver, nemlig de fire sider af de to spiraler. Hvordan en cirkelafvikler fremstilles er illustreret i figur 4. Tag en snor og vind den stramt rundt om en kon-



Figur 4: Cirkelafvikleren. Til venstre en skitse af hvordan en cirkelafvikler kan fremstilles ved hjælp af en snor og en konservesdåse, til højre en illustration af den matematiske definition.

servesdåse, idet den ene ende af snoren holdes fast mod dåsen. Bind den

anden ende af snoren om en blyant og vikl snoren langsomt af, idet snoren hele tiden holdes stramt. Den resulterende kurve som derved tegnes af blyanten er *cirkelafvikleren*. Hvis man binder to blyanter fast fås to cirkelafviklere og afstanden mellem de to kurver er konstant lig afstanden mellem de to blyanter, d.v.s. vi har to *parallelle* kurver. Punktet hvor snoren slipper dåsen bevæger sig rundt om dåsen, og den stramme snor *tangerer* dåsen.

Da det lige stykke snor tidligere lå langs med cirklen (dåsen) er længden af dette stykke lig med *buelængden* af den tilsvarende (stiplede) bue på cirklen.

Den grå afvikler i figur 4 fås ved at gå lidt længere ud langs snoren, det svarer til at vi starter afvikleren et andet sted på cirklen, så ved en drejning omkring cirkelens centrum kan vi føre den sorte afvikler over i den grå.

Matematisk set har vi altså et punkt der bevæger sig rundt på en cirkel:

$$\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Da vi har valgt radius i cirklen til 1 er parameteren  $\theta$  lig med *buelængden*  $s$  på cirklen. Vi gennemløber altså cirklen med konstant fart 1. (Hvis vi havde en cirkel med radius  $r$  kan vi bruge parameterfremstillingen  $s \mapsto (r \cos s/r, r \sin s/r)$  for at få konstant fart 1). Når den brugte *parameter* er buelængde siger vi, at vi har den *naturlige parameterfremstilling* for den pågældende kurve. Ved differentiation fås *tangentvektoren*  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\theta) = \mathbf{x}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Hvis vi starter afvikleren i punktet  $\mathbf{x}(0)$  ser vi af figur 4, at vi ved fra punktet  $\mathbf{x}(\theta)$  at gå stykket  $s = \theta$  bagud ad tangenten kommer til punktet  $\mathbf{y}(\theta)$  på cirkelafvikleren. Vi har altså at cirkelafvikleren er givet ved

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{x}(\theta) - s\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\theta) = (\cos \theta + \theta \sin \theta, \sin \theta - \theta \cos \theta)$$

Som vi ser i figur 4, fås de forskellige afviklere ved at gå kortere eller længere ud af cirkelens tangent, en vilkårlig afvikler er altså givet ved

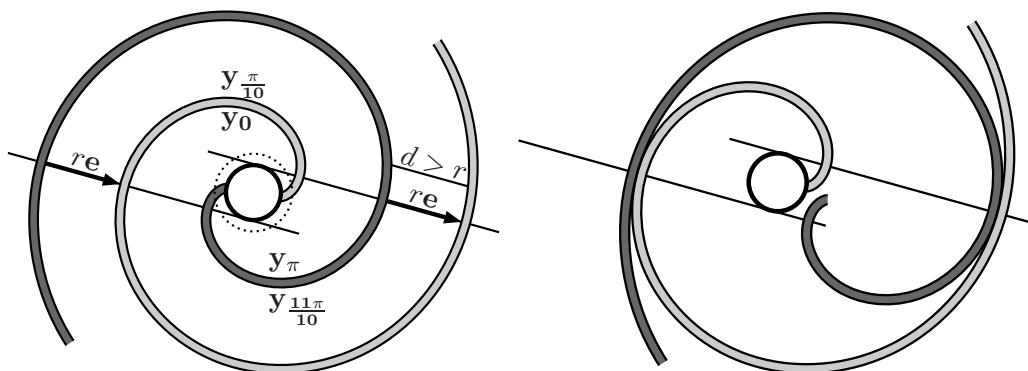
$$\mathbf{y}_c(\theta) = \mathbf{x}(\theta) - (\theta + c)\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\theta) = (\cos \theta + (\theta + c)\sin \theta, \sin \theta - (\theta + c)\cos \theta)$$

hvor  $c$  er en reel konstant. Som bemærket ovenfor er  $\mathbf{y}_{c_1}$  og  $\mathbf{y}_{c_2}$  parallelle kurver og afstanden mellem dem er  $|c_1 - c_2|$ . Hvis vi differentierer  $\mathbf{y}_c$  får vi

$$\mathbf{y}'_c(\theta) = ((\theta + c)\cos \theta, (\theta + c)\sin \theta).$$

Vi ser at  $\mathbf{x}'(\theta) \cdot \mathbf{y}'_c(\theta) = 0$ , d.v.s., at cirkelens tangent skærer cirkelafvikleren under en ret vinkel.

Vi vælger nu  $\mathbf{y}_0$  og  $\mathbf{y}_{\pi/10}$  som de to sider af den lyse spiral, se figur 5. Den mørke spiral fås ved at dreje  $180^\circ$ ; men som før bemærket svarer det til at vælge  $\mathbf{y}_\pi$  og  $\mathbf{y}_{11\pi/10}$  som de to sider af den mørke spiral. Som set før er alle disse fire kurver parallelle, og om deres indenbyrdes afstand gælder:



Figur 5: Til venstre definition af de fire sider af spiralerne i den klassiske scroll-kompressor. Bredden af de to ‘kanaler’ er  $r = 9\pi/10$ , så hvis vi skubber et punkt på kanten af den mørke spiral stykket  $r$  i retningen  $\mathbf{e}$ , så rammer dette punkt den hvide spiral, netop hvis  $\mathbf{e}$  er vinkelret på spiralen i det givne punkt. Til højre situationen efter at den mørke spiral er translateret stykket  $re$ . Den stiplede cirkel til venstre indikerer, hvor meget det er nødvendigt at skære væk.

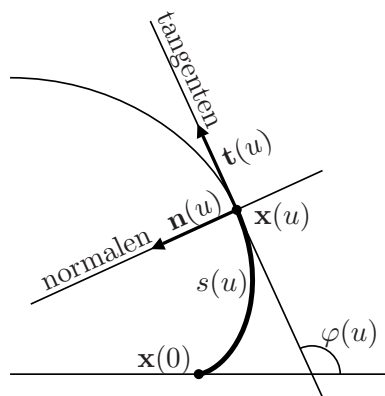
- Afstanden mellem  $\mathbf{y}_0$  og  $\mathbf{y}_{\frac{\pi}{10}}$  er  $\pi/10$ .
- Afstanden mellem  $\mathbf{y}_{\frac{\pi}{10}}$  og  $\mathbf{y}_{\pi}$  er  $9\pi/10$ .
- Afstanden mellem  $\mathbf{y}_{\pi}$  og  $\mathbf{y}_{\frac{11\pi}{10}}$  er  $\pi/10$ .
- Afstanden mellem  $\mathbf{y}_{\frac{11\pi}{10}}$  og  $\mathbf{y}_0$  er  $9\pi/10$ .

Vi betragter nu en tilfældig enhedsvektor  $\mathbf{e}$ , og prøver at parallelforskyde den mørke spiral i denne retning. Den *mindste* afstand fra et punkt på kanten af den mørke spiral til et punkt på kanten af den lyse spiral er  $r = 9\pi/10$ , bortset fra punkter inde ved midten af spiralerne. Hvis vi er helt inde ved cirklen er afstanden fra den mørke til den lyse spiral selvfølgelig lig med diameteren i cirklen som i dette tilfælde er 2; men vi skal blot se bort fra punkter med afstand mindre end  $r/2$  fra cirkelens centrum. Hvis vi ser bort fra problemerne inde ved midten, kan vi derfor bevæge den mørke spiral stykket  $r$ . Da minimumsafstanden  $r$  opnås ved at gå langs den fælles normal, der samtidig er tangent til cirklen, vil de to spiraler efter at den mørke er skubbet stykket  $re$  mødes i skæringspunkter mellem normalen og den lyse spiral, se figur 5. Vi kan altså bevæge den mørke spiral præcis afstanden  $r$  i *alle retninger*, eller sagt på en anden måde: Hvis vi (uden at dreje) bevæger den mørke spiral rundt i en cirkel med radius  $r$ , da vil den konstant røre den lyse spiral i en række punkter på den lyse spiral, der er givet som skæringspunkter mellem tangenter til cirklen og den lyse spiral. Vi kan nu

se at cirkelafvikler spiraler giver en situation som i figur 3; men vi kan også se, at der er problemer inde ved midten. Vi kan blive nødt til at skære den inderste del af spiralerne væk.

### 3 Afviklere og evolutter

Konservesdåsen som vi har brugt til at fremstille cirkelafvikleren har et cirkulært tværsnit; men vi kan selvfølgelig lave en tilsvarende konstruktion med en ikke-cirkulær konservesdåse. Det eneste krav er at vi skal kunne lægge en snor stramt langs med dåsen, den må altså ikke bue indad, eller sagt med andre ord, den skal være konveks. Hvis vi forlader den fysiske verden behøver 'dåsen' ikke engang at være lukket, tværsnittet kunne f.eks. være en spiral, se figur 9; men vi vil stadigvæk kræve, at den kun buer til den ene side. Det sidste krav sikrer at der ikke kommer spidser på afvikleren; hvis dette er ligegyldigt kan enhver kurve bruges. Før vi går videre vil vi præcisere visse begreber, se figur 6.



Figur 6: Nogle grundlæggende geometriske begreber.

En *parametrisering* af en *regulær* plan kurve er en differentiabel afbildning  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , som opfylder at  $\mathbf{x}'(u) \neq \mathbf{0}$  for alle  $u \in I$ . Kurvens *tangent* i punktet  $\mathbf{x}(u)$  er en linie gennem punktet i retningen  $\mathbf{x}'(u)$ , og kurvens *normal* i punktet er en linie gennem punktet som står vinkelret på tangenten. Kurvens *tangentvektor*  $\mathbf{t}$  er enhedsvektoren i retningen  $\mathbf{x}'(u)$ , og kurvens *normalvektor*  $\mathbf{n}$  er tangentvektoren drejet  $90^\circ$  mod uret, altså

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\mathbf{x}'(u)}{|\mathbf{x}'(u)|}, \quad \mathbf{n}(u) = \widehat{\mathbf{t}(u)}$$



Kurvens *buelængde*  $s$  fås ved at integrere farten  $|\mathbf{x}'(u)|$ , altså

$$s(u) = \int_0^u |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

Da vi har forudsat  $\mathbf{x}'(u) \neq \mathbf{0}$  for alle  $u$ , har vi specielt, at  $s'(u) = |\mathbf{x}'(u)| > 0$ . Dermed er  $s$  en strengt voksende funktion af  $u$ . Så findes den inverse funktion  $u(s)$ , og den opfylder også, at  $u'(s) \neq 0$ . Vi kan derfor bruge  $s$  som parameter på kurven og opnår hermed den *naturlige parameterfremstilling*. I den naturlige parameterfremstilling er farten konstant 1, og tangentvektoren fås så ved

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}.$$

Bemærk, at vi har brugt det samme symbol ' $\mathbf{x}$ ' for både den gamle parameterfremstilling og for den naturlige parameterfremstilling. Vi har desuden undladt at skrive parameteren eksplicit i ovenstående formel. Dette er selvfølgelig lidt upræcist, men da det forenkler notationen, vil vi ofte gøre dette i det efterfølgende. Bemærk også, at udtrykket  $d\mathbf{x}/ds$  tilsyneladende kræver, at vi kender et eksplicit udtryk for den naturlige parameterfremstilling; men dette er *ikke* nødvendigt, hvis vi har parameteren  $u$ , skal vi blot benytte kædereglen og at  $ds/du = |d\mathbf{x}/du|$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{du} \bigg/ \frac{ds}{du} = \frac{d\mathbf{x}}{du} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{du} \right|.$$

Kurvens *tangentdrejning*  $\varphi$  er den vinkel tangenten danner med  $x$ -aksen. Vi har altså

$$\mathbf{t} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{og} \quad \mathbf{n} = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad (1)$$

hvor vi bemærker, at  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  og  $\varphi$  er funktioner af den givne parameter. Kurvens *krumning*  $\kappa$  er defineret som

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds},$$

og måler altså hvor hurtigt tangenten drejer. Ved differentiation af (1) får vi formlerne

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad \text{og} \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t},$$

kaldet *Frenets formler*. Hvis vi vender gennemløbsretningen på kurven skifter krumningen fortegn, så hvis  $\kappa \neq 0$  overalt på kurven, kan vi altid opnå  $\kappa > 0$ . I så fald er tangentdrejningen  $\varphi$  en strengt voksende funktion af  $s$ , og som før ser vi, at vi kan bruge  $\varphi$  som parameter på kurven. Kurvens *krumningsradius*  $\varrho$  er defineret ved

$$\varrho = \frac{1}{\kappa} = \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^{-1} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

For cirklen,  $\mathbf{x}(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , med radius  $r$ , har vi

$$\mathbf{t} = (-\sin \theta, \cos \theta) = \left( \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

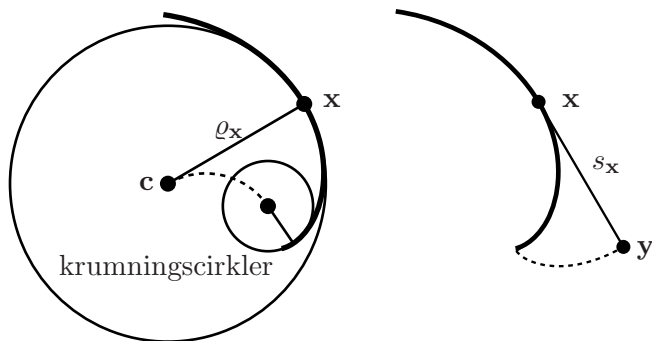
så  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ . Ydermere er buelængden givet ved  $s = r\theta = r(\varphi - \frac{\pi}{2})$ , så  $\rho = \frac{ds}{d\varphi} = r$ . Krumningsradius for en cirkel er altså lig med radius for cirklen, heraf navnet. Hvis vi bruger den naturlige parameterfremstilling er Taylor-rækken til anden orden givet ved

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + (s - s_0) \mathbf{t}(s_0) + \frac{1}{2} \kappa(s_0) (s - s_0)^2 \mathbf{n}(s_0) + \text{højere ordens led.}$$

Cirklen som tangerer den givne kurve i punktet  $\mathbf{x}(s_0)$  og som har radius  $\rho(s_0)$  kaldes for *krumningscirklen* og har præcis den samme Taylor-række til anden orden. Det er derfor den cirkel som approksimerer kurven bedst muligt i punktet  $\mathbf{x}(s_0)$ . Centrum  $\mathbf{c}$  for krumningscirklen fås ved at gå stykket  $\rho$  ud ad normalen, altså:

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} + \rho \mathbf{n}_x.$$

Igen har vi undladt referencer til parameteren, til gengæld har vi angivet hvilken kurve krumningsradius og normalvektor hører til. Når vi gennemløber kurven  $\mathbf{x}$ , vil krumningscentrene gennemløbe en anden kurve kaldet *evolутten* for  $\mathbf{x}$ , se figur 7. Ved differentiation af  $\mathbf{c}$  fås



Figur 7: Til venstre evolутten for  $\mathbf{x}$  og til højre afvikleren.

$$\frac{d\mathbf{c}}{ds_x} = \frac{d\mathbf{x}}{ds_x} + \frac{d\rho_x}{ds_x} \mathbf{n}_x + \rho \frac{d\mathbf{n}_x}{ds_x} = \mathbf{t}_x + \frac{d\rho_x}{ds_x} \mathbf{n}_x - \frac{1}{\kappa_x} \kappa_x \mathbf{t}_x = \frac{d\rho_x}{ds_x} \mathbf{n}_x.$$

Heraf ser vi, at  $\mathbf{t}_c = \pm \mathbf{n}_x$ , og at  $|d\mathbf{c}/ds_x| = |d\rho_x/ds_x|$ . For at have en regulær evolут bliver vi derfor nødt til at kræve at  $d\rho_x/ds_x \neq 0$ , eller ækvivalent

hermed, at  $d\kappa_x/ds_x \neq 0$  overalt. I figur 8 ses hvad der sker, hvis dette krav ikke er opfyldt.

En kurves *afvikler* er defineret på præcis samme måde som for cirkelafvikleren:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - (s_x + c)\mathbf{t}_x,$$

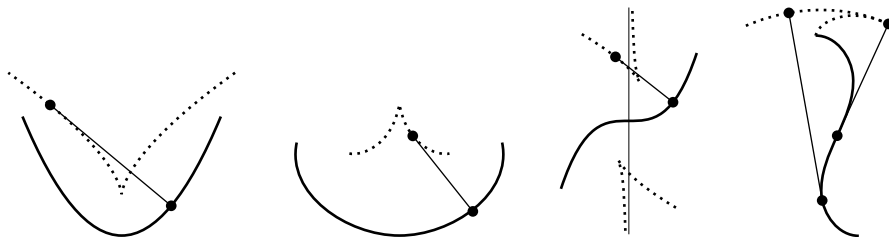
specielt er cirkelafvikleren altså en afvikler for cirklen. Ved differentiation fås

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds_x} = \frac{d\mathbf{x}}{ds_x} - \mathbf{t}_x - (s_x + c)\frac{d\mathbf{t}_x}{ds_x} = \mathbf{t}_x - \mathbf{t}_x - (s_x + c)\kappa_x\mathbf{n}_x = -(s_x + c)\kappa_x\mathbf{n}_x.$$

Heraf ser vi, at

$$\mathbf{t}_y = -\mathbf{n}_x \quad \text{og} \quad \frac{ds_y}{ds_x} = \left| \frac{d\mathbf{y}}{ds_x} \right| = (s_x + c)\kappa_x.$$

Specielt ser vi, at hvis  $\kappa_x > 0$  overalt, og  $s_x > c$ , så er afvikleren  $\mathbf{y}$  en regulær kurve. I figur 8 ses hvad der sker, hvis dette krav ikke er opfyldt.



Figur 8: Den første tegning viser evoluten for en kurve med et maximum for krumningen, den næste viser evoluttet for en kurve med et minimum for krumningen, den tredje viser evoluttet for en kurve med et nulpunkt for krumningen, samt to minima, og den sidste viser afvikleren for en kurve med et nulpunkt for krumningen.

Ved yderligere differentiation fås

$$\frac{d\mathbf{t}_y}{ds_y} = -\frac{d\mathbf{n}_x}{ds_x} \frac{ds_x}{ds_y} = \frac{\kappa_x\mathbf{t}_x}{(s_x + c)\kappa_x} = \frac{1}{s_x + c}\mathbf{t}_x,$$

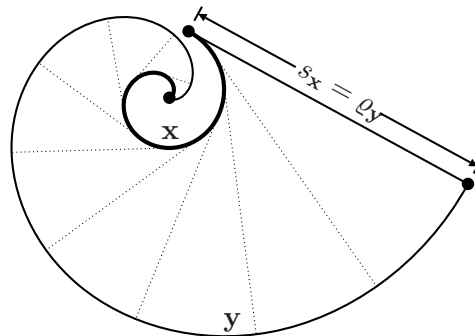
hvoraf  $\varrho_y = s_x + c$ . Hvis vi nu udregner  $\mathbf{y}$ 's evolut får vi klart  $\mathbf{x}$ . Vi har altså

$$\mathbf{y} \text{ er en afvikler af } \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \text{ er evoluttet for } \mathbf{y}.$$

I dette tilfælde gælder

$$\mathbf{t}_y = -\mathbf{n}_x, \quad \mathbf{n}_y = \mathbf{t}_x, \quad \varrho_y = s_x + c, \quad \varphi_y = \varphi_x - \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

I figur 9 er tegnet en afvikler af cirkelafvikleren.

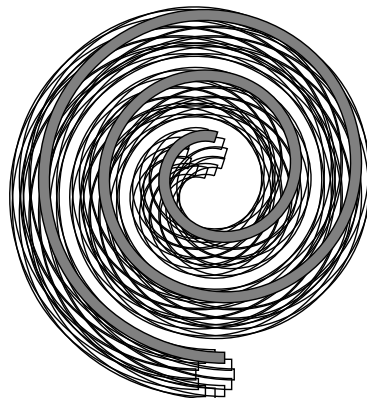


Figur 9: En afvikler af cirkelafvikleren.

## 4 Indhyllingskurver

Vi har i forrige afsnit set, hvordan der 'inden i' en spiral i form af en cirkelafvikler er plads til, at en anden cirkelafvikler kan bevæge sig rundt i en cirkel. Spørgsmålet er nu, hvad der sker, hvis vi prøver andre spiraler end cirkelafvikleren.

Hvis man tager en vilkårlig spiral, og uden at dreje den bevæger den cirkulært rundt i en kasse med sand, får man et billede som i figur 10, hvor



Figur 10: Sporet fra en spiral bevæget rundt i en cirkel.

man tydeligt kan se, hvordan den faste spiral skal se ud, for at der skal være plads til bevægelsen af den første spiral. Vi kan også se, at den bevægelige spiral til ethvert tidspunkt *tangerer* den faste spiral i en række punkter. En ting er, at kunne 'se' hvordan spiralen skal se ud, en anden er, at finde en parameterfremstilling for den. Det er problemet vi vil behandle i dette afsnit.

Hvis vi koncentrerer opmærksomheden om n side af den bevægelige spiral, har vi altså en kurve, som vi parallelforskyder rundt langs en cirkel. Hvis kurven er givet ved en parameterfremstilling  $\mathbf{x}$ , så kan bevægelsen af spiralen beskrives ved følgende funktion af to variable:

$$\mathbf{X}(u, t) = \mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(t), \quad (3)$$

hvor  $\mathbf{a}(t)$  er en parameterfremstilling for cirkelbevægelsen. Vi vil nu betragte funktionen  $\mathbf{X}(u, t)$ , og kan glemme, at vi har en spiral, der deltager i en cirkelbevægelse. Vi kunne f.eks. lade spiralen foretage en anden type bevægelse end den cirkulære, eller mere drastisk, vi kunne forestille os at kurven forandrede form når  $t$  varierede; men så forlader vi scroll-kompresseren.

Synspunktet er altså at vi har givet en *familie* af kurver  $\mathbf{x}_t(u) = \mathbf{X}(u, t)$  og vi søger en såkaldt *indhyllingskurve* for familien. Det er en kurve  $\mathbf{y}$ , som til tidspunktet  $t$  tangerer kurven  $\mathbf{x}_t$  i et punkt vi benævner  $\mathbf{y}(t)$ , (vi bruger altså  $t$  som parameter på indhyllingskurven). Det tilsvarende punkt på  $\mathbf{x}_t$ , kan skrives som  $\mathbf{x}_t(u(t))$ . Vi har dermed, at

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(u(t), t), \quad (4)$$

problemet er at bestemme funktionen  $u(t)$ . Hvis vi tager en vilkårlig funktion  $u(t)$ , og definerer  $\mathbf{y}(t)$  ved (4), så vil kurverne  $\mathbf{y}$  og  $\mathbf{x}$  skærer hinanden; men betingelsen er som sagt, at de skal tangerer hinanden. Tangentretningerne er givet ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_t(u(t)) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}((u(t), t)), \\ \mathbf{y}'(t) &= u'(t) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}((u(t), t)) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}((u(t), t)), \end{aligned}$$

og de er parallelle, netop hvis de partielle afledede  $\partial \mathbf{X} / \partial u((u(t), t))$  og  $\partial \mathbf{X} / \partial t((u(t), t))$  er det. Hvis  $\mathbf{X}(u, t) = (X(u, t), Y(u, t))$ , så kan parallelitet udtrykkes ved ligningen:

$$\frac{\partial X}{\partial u}((u(t), t)) \frac{\partial Y}{\partial t}((u(t), t)) - \frac{\partial X}{\partial t}((u(t), t)) \frac{\partial Y}{\partial u}((u(t), t)) = 0.$$

Denne ligning skal opfattes som en ligning til bestemmelse af funktionen  $u(t)$ ; men det er normalt *ikke* muligt at løse denne ligning.

Vi vender nu tilbage til spiralen der parallelforskydes rundt langs en cirkel. Fra (3) er de partielle afledede givet ved

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}(u, t) = \mathbf{x}'(u), \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(u, t) = \mathbf{a}'(t).$$

Hvis  $\mathbf{a}(t) = (r \sin t, -r \cos t)$ , så er  $\mathbf{a}'(t) = r\mathbf{e}(t) = (r \cos t, r \sin t)$  og  $t$  er tangentdrejningen for cirkelbevægelsen. Vi forestiller os nu at spiralen også er parametriseret med tangentdrejningen. Vi har altså  $u = \varphi_{\mathbf{x}}$ , og  $t = \varphi_{\mathbf{e}}$ . Parallelitetsbetingelsen kan formuleres, som  $\varphi_{\mathbf{x}} - \varphi_{\mathbf{e}} = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , d.v.s. vi har den simple løsning

$$u = t + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

og dermed har vi indhyllingskurverne givet ved

$$\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{x}(t + n\pi) + \mathbf{a}(t).$$

Tilsyneladende har vi uendelig mange indhyllingskurver; men da  $\mathbf{a}$  er periodisk med perioden  $2\pi$ , ser vi, at

$$\mathbf{y}_{n+2}(t) = \mathbf{x}(t + (n+2)\pi) + \mathbf{a}(t) = \mathbf{x}((t+2\pi) + n\pi) + \mathbf{a}(t+2\pi) = \mathbf{y}_n(t+2\pi).$$

Så  $\mathbf{y}_{n+2}$  og  $\mathbf{y}_n$  er blot to forskellige parameterfremstillinger for den samme kurve. Vi har altså præcis to forskellige indhyllingskurver, som vi vælger at skrive som

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_+(t) &= \mathbf{y}_0(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t), \\ \mathbf{y}_-(t) &= \mathbf{y}_1(t - \pi) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{a}(t), \end{aligned} \tag{5}$$

hvor vi har udnyttet, at  $\mathbf{a}(t - \pi) = -\mathbf{a}(t)$ . Da både  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{a}$  er parametriseret ved tangentdrejningen, ser vi at  $\mathbf{y}_{\pm}$  også er det.

Da det normalt også er umuligt at bestemme tangentdrejnings-parametriseringen, har vi tilsyneladende blot erstattet t umuligt problem med et andet; men vi skal i næste afsnit se, hvordan vi kan definere kurver, så de automatisk er parametriseret med tangentdrejningen.

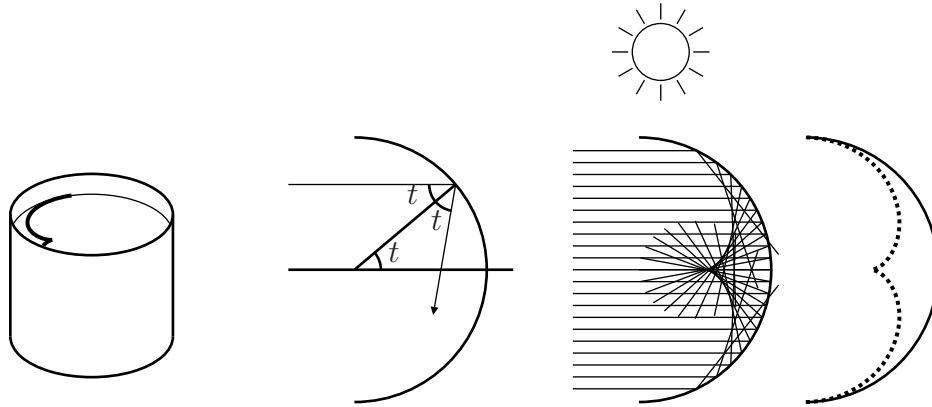
Før vi gør det, vil vi dog betragte det tilfælde, hvor kurven ikke er givet ved en parametrisering, men i stedet ved en ligning. I dette tilfælde er muligheden for at finde indhyllingskurven langt mere gunstig, se f.eks. [2]. Her vil vi blot se på det tilfælde, hvor vi har en familie af rette linier givet ved en familie af ligninger i  $x$  og  $y$ :

$$a(t)x + b(t)y = c(t).$$

Hvis vi tilføjer den differentierede ligning:

$$a'(t)x + b'(t)y = c'(t),$$

har vi for hvert  $t$  to lineære ligninger med to ubekendte og disse har i almindelighed en entydig løsning  $(x(t), y(t))$ , som præcis er en parameterfremstilling for indhyllingskurven.



Figur 11: Når solens stråler reflekteres i indersiden af et krus med kaffe, dannes en lysende kurve (brændkurven) på kaffens overflade. Den anden tegning viser reflektionen af en enkelt stråle, den tredje tegning viser reflektionen af 21 stråler, og i den sidste tegning er den beregnede brændkurve plottet

Hvis vi forestiller os, at linierne er lysstråler, så er indhyllingskurven den såkaldte *brændkurve*, altså den kurve hvor lyset er koncentreret. Hvis man en sommerdag sidder udenfor med et krus kaffe, vil solens stråler reflekteres i indersiden af kruset, og familien af reflekterede stråler vil danne en brændkurve på kaffens overflade, se figur 11. Vi forestiller os nu solens stråler kommer ind langs med  $x$ -aksen, og betragter en enkelt stråle der reflekteres i punktet  $(\cos t, \sin t)$ . Da indfaldsvinkel er lig med udfaldsvinkel har den reflekterede stråle retningsvektor  $(\cos(2t + \pi), \sin(2t + \pi)) = (-\cos 2t, -\sin 2t)$  og normalvektor  $(\sin 2t, -\cos 2t)$ , se figur 11. Dermed er ligningen for strålen

$$(x - \cos t) \sin 2t - (y - \sin t) \cos 2t = 0.$$

Da  $-\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t = -\sin t$ , får vi efter differentiation de to ligninger:

$$\begin{aligned} (\sin 2t)x - (\cos 2t)y &= \sin t, \\ (2 \cos 2t)x + (2 \sin 2t)y &= \cos t. \end{aligned}$$

Brændkurven er løsningen til disse to lineære ligninger, som let udregnes til:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin 2t & -\cos 2t \\ 2 \cos 2t & 2 \sin 2t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \sin 2t & \cos 2t \\ -2 \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \sin 2t \sin t + \cos 2t \cos t \\ 2 \cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos t - \cos t \cos 2t \\ 2 \sin t - \cos t \sin 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} - \frac{\cos t}{2} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 5 Den naturlige ligning

Som lovet i forrige afsnit vil vi nu specificere kurver på en måde, så de automatisk bliver parametriseret med tangendrejningen. Hvis vi et øjeblik forestiller os, at kurven  $\mathbf{x}$  er parametriseret med tangendrejningen  $\varphi$ , så er tangentvektoren pr. definition givet ved  $\mathbf{t}(\varphi) = \mathbf{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . På den anden side fås tangentvektoren ved normering af hastighedsvektoren, så vi må have, at

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \right| \mathbf{t} = \frac{ds}{d\varphi} \mathbf{t} = \varrho \mathbf{t}.$$

Vi kan komme tilbage til  $\mathbf{x}$  ved integration:

$$\mathbf{x}(\varphi) = \int \varrho(\varphi) \mathbf{t}(\varphi) d\varphi = \int \varrho(\varphi) \mathbf{e}(\varphi) d\varphi = \int (\varrho(\varphi) \cos \varphi, \varrho(\varphi) \sin \varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Vi ser nu, at vi i stedet for at angive en eksplicit parameterfremstilling for en kurve, kan specificere kurven ved at angive  $\varrho(\varphi)$ , d.v.s. krumningsradius som funktion af tangendrejningen. Thi vi kan få en parameterfremstilling ved en simpel integration, og denne parameterfremstilling er med tangendrejningen som parameter. Bemærk, at integrationskonstanten ikke har nogen geometrisk betydning, de forskellige valg svarer blot til parallelforskydninger af kurven.

Hvis vi kender  $\varrho(\varphi)$ , har vi en differentiaalligning  $ds/d\varphi = \varrho(\varphi)$ , som sammenknytter buelængden  $s$ , og tangendrejningen  $\varphi$ . En ligning, eller som her en differentiaalligning, der gør det, kaldes en *naturlig ligning* for kurven. Et andet eksempel på en naturlig ligning er  $\varphi = \varphi(s)$ , altså hvor tangendrejningen er givet som funktion af buelængden. Så er  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{e}(\varphi(s))$ , og vi kan bestemme den naturlige parameterfremstilling for kurven ved integration:

$$\mathbf{x}(s) = \int \mathbf{t}(s) ds = \int \mathbf{e}(\varphi(s)) ds = \int (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) ds \quad (7)$$



Fra et teoretisk synspunkt er der ikke den store forskel på ligningerne (6) og (7), begge bestemmer en parameterfremstilling ved integration, og i begge tilfælde har parameteren geometrisk betydning. Fra et praktisk synspunkt er (6) derimod langt mere behagelig. Hvis funktion  $\varrho(\varphi)$  er et polynomium i  $\varphi$ , så kan integrationen i (6) udføres eksakt og uden besvær. Dette er i modsætning til integralet i (7), der almindeligvis ikke kan udregnes, hvis  $\varphi(s)$  er et polynomium i  $s$ .

Vi definerer nu en kurve  $\mathbf{x}$ , ikke ved en parameterfremstilling; men ved den naturlige ligning  $\varrho = \varrho(\varphi)$ . Da  $\varrho = ds/d\varphi$ , kan vi bestemme buelængden direkte ved en simpel integration,  $s = \int \varrho(\varphi) d\varphi$ . Bemærk, at hvis  $\varrho(\varphi)$  er et polynomium, så kan  $s$  udregnes eksakt.

Hvis  $\mathbf{x}$  er givet ved den naturlige ligning  $\varrho_{\mathbf{x}} = \varrho_{\mathbf{x}}(\varphi)$ , og  $\mathbf{y}$  er en afvikler, så har vi fra (2), at  $\varphi_{\mathbf{y}} = \varphi_{\mathbf{x}} - \pi/2$  og  $\varrho_{\mathbf{y}} = s_{\mathbf{x}} + c$ . dermed er  $\mathbf{y}$  givet ved den naturlige ligning

$$\varrho_{\mathbf{y}}(\varphi) = \int \varrho \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) d\varphi,$$

hvor de forskellige integrations konstanter svarer til de forskellige afviklere. Omvendt er  $\mathbf{x}$ 's evolut  $\mathbf{c}$  givet ved den naturlige ligning

$$\varrho_{\mathbf{c}}(\varphi) = \frac{d\varrho_{\mathbf{x}}}{d\varphi} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right).$$

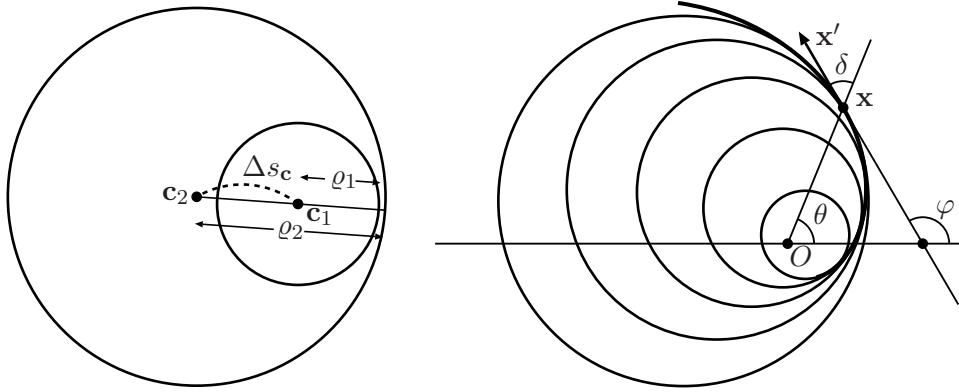
Vi har med andre ord, at

$$\begin{aligned} \text{afvikler} &\longleftrightarrow \text{integration,} \\ \text{evolut} &\longleftrightarrow \text{differentiation.} \end{aligned}$$

F.eks. har vi følgende tabel:

| $\varrho(\varphi)$     | $s(\varphi)$           | kurve                      |
|------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1                      | $\varphi$              | cirkel                     |
| $\varphi$              | $\frac{1}{2}\varphi^2$ | cirkelafvikler             |
| $\frac{1}{2}\varphi^2$ | $\frac{1}{6}\varphi^3$ | afvikler af cirkelafvikler |
| $\vdots$               | $\vdots$               | $\vdots$                   |

I forbindelse med scroll-kompressoren er vi specielt interesserede i spiraler, og det er heldigvis let at fremstille spiraler ved hjælp af den naturlige ligning. Vi har nemlig følgende resultat, se [5, side 48, Knesers sætning]



Figur 12: Til venstre ser vi hvordan  $\overline{D}_1 \subset D_2$ , hvis  $|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1| + \varrho_1 < \varrho_2$ . Til højre ser vi hvordan  $\theta' > 0$ , hvis  $O$  ligger til venstre for tangenten, specielt hvis  $O$  ligger i krumningscirklen.

**Spiral-lemma.** Lad  $\mathbf{x}$  være en kurve, givet ved den naturlige ligning  $\varrho = \varrho(\varphi)$ . Lad  $\mathbf{c}(\varphi)$  være evolутten (d.v.s. krumningscentrum) for  $\mathbf{x}$  og lad  $D_\varphi$  være den åbne cirkelskive begrænset af krumningscirklen:

$$D_\varphi = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{p} - \mathbf{c}(\varphi)| < \varrho(\varphi)\},$$

og lad  $\overline{D}_\varphi$  være den tilsvarende afsluttede cirkelskive:

$$\overline{D}_\varphi = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{p} - \mathbf{c}(\varphi)| \leq \varrho(\varphi)\}.$$

Hvis  $\varrho(\varphi)$  er en strengt voksende positiv funktion, så former cirkelskiverne  $D_\varphi$  en strengt voksende følge:

$$\varphi_1 < \varphi_2 \Rightarrow \overline{D}_{\varphi_1} \subset D_{\varphi_2}, \quad (8)$$

og kurvens fortid og fremtid er henholdsvis indenfor og udenfor krumningscirklen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 < \varphi_2 &\Rightarrow \mathbf{x}(\varphi_1) \in D_{\varphi_2}, \\ \varphi_1 < \varphi_2 &\Rightarrow \mathbf{x}(\varphi_2) \notin D_{\varphi_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Hvis vi ydermere vælger koordinatsystemets begyndelsespunkt indenfor samtlige krumningscirkler:  $O \in \bigcap_\varphi \overline{D}_\varphi$ , og lader  $(r, \theta)$  være polære koordinater for kurven  $\mathbf{x}$ , så er vinklen  $\theta$  en strengt voksende funktion:

$$\theta'(\varphi) > 0. \quad (10)$$

*Proof.* Da  $\mathbf{x}(\varphi)$  ligger på randen af  $D_\varphi$ , følger (9) af (8). Sæt  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}(\varphi_1)$ ,  $\varrho_1 = \varrho(\varphi_1)$ , osv. For at vise, at  $\overline{D}_1 \subset D_2$  er det klart nok at vise, at

$|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1| + \varrho_1 < \varrho_2$ , eller ækvivalent hermed, at  $|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1| < \varrho_2 - \varrho_1$ . Da krumningscentrene  $\mathbf{c}_1$  og  $\mathbf{c}_2$  er punkter på evolутten for  $\mathbf{x}$ , og da afstanden langs med en kurve ikke kan være mindre end afstand langs en ret linie, har vi nu, at

$$|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1| \leq \Delta s_{\mathbf{c}} = s_{\mathbf{c}}(\varphi_2) - s_{\mathbf{c}}(\varphi_1) = \varrho_2 - \varrho_1,$$

hvor  $s_{\mathbf{c}}$  er buelængde på evolутten. Vi har nu vist (8) og dermed også (9).

Betragt nu figur 12. Hvis vinklen  $\delta = \varphi - \theta$ , mellem stedvektoren til  $\mathbf{x}$  og hastighedsvektoren  $\mathbf{x}'$ , ligger i intervallet  $]0, \pi[$ , så er  $\theta' > 0$ . Hvis blot  $O$  ligger til venstre for tangentvektoren har vi  $\delta \in ]0, \pi[$ . Da  $\varrho' > 0$  ligger krumningscirklen til venstre for tangentvektoren, og da begyndelsespunktet  $O$  er valgt, så det ligger indenfor enhver af krumningscirklerne, ligger  $O$  specielt til venstre for enhver af tangentvektorerne. Dermed har vi vist, at  $\theta' > 0$  overalt på kurven.  $\square$

## 6 Scroll-kompressoren II

Vi betragter nu en spiral  $\mathbf{x}$  givet ved den naturlige ligning  $\varrho_{\mathbf{x}} = \varrho_{\mathbf{x}}(\varphi)$ , hvor  $\varrho_{\mathbf{x}}(\varphi)$  er en strengt voksende positiv funktion. Som i afsnit 4 lader vi nu  $\mathbf{x}$  udføre en cirkulær bevægelse parametriseret ved  $\mathbf{a}(t) = (r \sin t, -r \cos t)$ . Fra (5) har vi så de to indhyllingskurver  $\mathbf{y}_{\pm}(t) = \mathbf{x}(t) \pm \mathbf{a}(t)$ . Ydermere er alle tre kurver parametriseret ved tangentdrejning, d.v.s.  $\varphi_{\mathbf{y}_{\pm}} = \varphi_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{a}} = \varphi$ , og de har alle den samme tangentvektor  $\mathbf{t} = \mathbf{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Ved differentiation får vi

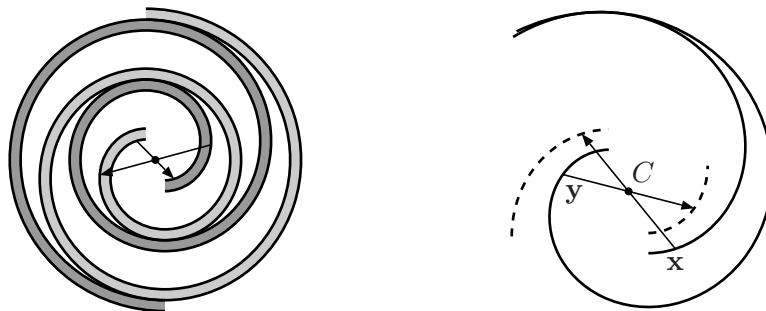
$$\mathbf{y}'_{\pm}(\varphi) = \mathbf{x}'(\varphi) \pm \mathbf{a}'(\varphi) = (\varrho_{\mathbf{x}} \pm r)\mathbf{e}(\varphi),$$

og dermed

$$\varrho_{\mathbf{y}} = \varrho_{\mathbf{x}} \pm r.$$

Bemærk, at ovenstående argument kun gælder for  $\mathbf{y}_-$  hvis  $r < \varrho_{\mathbf{x}}(\varphi)$ , thi hvis  $r > \varrho_{\mathbf{x}}(\varphi)$  så er  $\mathbf{t}_{\mathbf{y}} = -\mathbf{t}_{\mathbf{x}}$ .

Hvis vi vælger  $\mathbf{y}_+$ , som ligger på 'ydern' af  $\mathbf{x}$ , har vi nu defineret ydersiden af den bevægelige spiral ( $\mathbf{x}$ ), og indersiden af den faste spiral ( $\mathbf{y}_+$ ). For at få de to manglende sider betragter vi igen den klassiske scroll-kompressor, og bemærker, at den faste og den bevægelige spiral føres over i hinanden ved spejling i et passende punkt, se figur 13. Ved denne spejling føres ydersiden af den bevægelige spiral over i ydersiden af den faste spiral og indersiden af den faste spiral føres over i indersiden af den bevægelige spiral. Vi kan altså få de to manglende sider ved spejling i et passende punkt. Der er en vis frihed i valget af spejlingspunkt  $C$ ; men bemærk, at idet  $C$  ligger midt



Figur 13: Til venstre ses hvordan den klassiske scroll-kompressor ligger symmetrisk omkring et punkt. Til højre ses hvordan vi ved at kræve den samme symmetri af andre scroll-kompressorer får defineret de to sidste sider.

mellem et punkt og dets spejlbillede, er  $C$  bestemt hvis vi blot specificerer spejlbilledet af et enkelt punkt.

Man kan tænke sig andre måder at definere de to manglende sider på; men spejlingsmetoden har den store fordel, at kompressoren så bliver symmetrisk, og det er dermed garanteret, at de to 'kanaler' giver den samme kompression.

Hvis man ser bort fra lækager og andre fysiske fænomener, så er kompressionen bestemt af kompressionskammerenes rumfang, og vi skal nu se, hvordan disse kan beregnes eksakt ud fra den naturlige ligning. Grundfladen af et kompressionskammer er begrænset af to kurvestykker, beliggende mellem to konsekutive røringspunkter, et fra siden af den bevægelige spiral  $\mathbf{x}$  og et fra indhyllingskurven  $\mathbf{y}_+$ , som er den tilsvarende side af den faste spiral. Hvis det ene røringspunkt er  $\mathbf{y}_+(\varphi) = \mathbf{x}(\varphi) + \mathbf{a}(\varphi)$ , så er det næste røringspunkt  $\mathbf{y}_+(\varphi + 2\pi) = \mathbf{x}(\varphi + 2\pi) + \mathbf{a}(\varphi)$ . Vi beregner ikke grundfladens areal direkte; men som differensen mellem de to arealer udspændt mellem begyndelsespunktet  $O$  og de to kurvestykker, se figur 14.

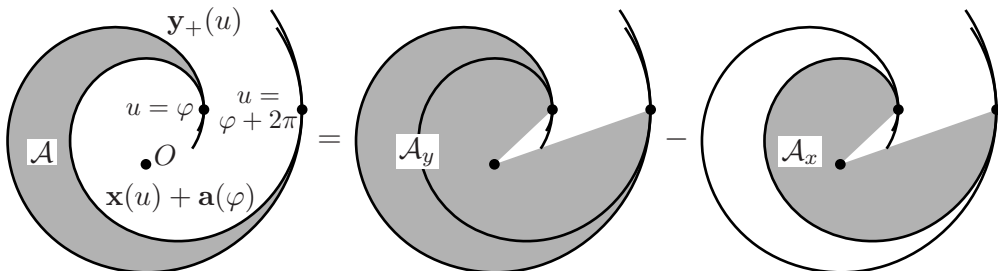
Arealet af parallelogrammet udspændt af to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er givet ved *planproduktet*,  $[\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}$ , se figur 15. Planproduktet er lineært i hver variabel, og er desuden antisymmetrisk.

Arealerne i figur 14 er altså givet ved

$$\mathcal{A}_{\mathbf{y}}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{y}_+(u) \ \mathbf{y}'_+(u)] \, du,$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(\varphi) \ \mathbf{x}'(u)] \, du,$$

$$\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{A}_{\mathbf{y}}(\varphi) - \mathcal{A}_{\mathbf{x}}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \left( [\mathbf{y}_+(u) \ \mathbf{y}'_+(u)] - [\mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(\varphi) \ \mathbf{x}'(u)] \right) \, du,$$



Figur 14: Arealet af grundfladen i et kompressions kammer beregnes som differensen mellem arealerne udspændt af  $O$  og de to kurvestykker.

For at bestemme planprodukterne, indfører vi foruden vektoren  $\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t)$ , dens tværvektor  $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{e}}(t) = (-\sin t, \cos t)$ . De opfylder, at

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}'(t) = -\mathbf{e}(t), \quad [\mathbf{e}(t) \mathbf{f}(t)] = -[\mathbf{f}(t) \mathbf{e}(t)] = 1.$$

Vi har desuden, at

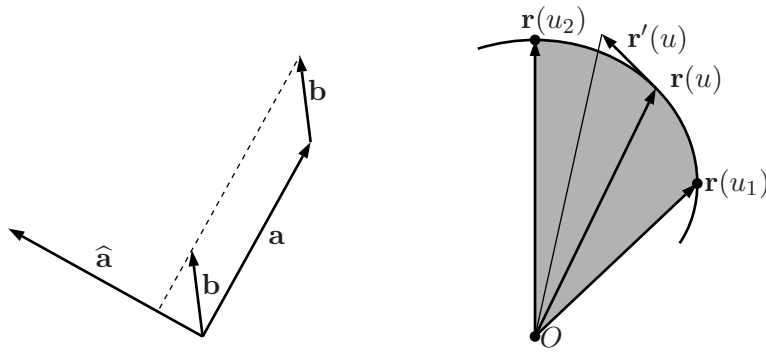
$$\mathbf{a}(t) = -r\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{a}'(t) = r\mathbf{e}(t), \quad \mathbf{x}'(t) = \varrho_{\mathbf{x}}(t)\mathbf{e}(t).$$

Hvis vi ganger planprodukterne i integranden ud får vi

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}_+(u) \mathbf{y}'_+(u)] - [\mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(\varphi) \mathbf{x}'(u)] &= [\mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(u) \mathbf{x}'(u) + \mathbf{a}'(u)] - [\mathbf{x}(u) + \mathbf{a}(\varphi) \mathbf{x}'(u)] \\ &= [\mathbf{x}(u) \mathbf{a}'(u)] + [\mathbf{a}(u) \mathbf{x}'(u)] + [\mathbf{a}(u) \mathbf{a}'(u)] - [\mathbf{a}(\varphi) \mathbf{x}'(u)]. \end{aligned}$$

Vi udregner nu integralet af hvert led:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{x}(u) \mathbf{a}'(u)] du &= \frac{1}{2} \left[ [\mathbf{x}(u) \mathbf{a}(u)] \right]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} - \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{x}'(u) \mathbf{a}(u)] du \\ &= \frac{1}{2} \left( [\mathbf{x}(\varphi + 2\pi) - r\mathbf{f}(\varphi + 2\pi)] - [\mathbf{x}(\varphi) - r\mathbf{f}(\varphi)] \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\varrho_{\mathbf{x}}\mathbf{e}(u) - r\mathbf{f}(u)] du \\ &= \frac{1}{2}r [\mathbf{x}(\varphi) - \mathbf{x}(\varphi + 2\pi) \mathbf{f}(\varphi)] + \frac{1}{2}r \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \varrho_{\mathbf{x}} du \\ &= \frac{1}{2}r \left( [\mathbf{x}(\varphi) - \mathbf{x}(\varphi + 2\pi) \mathbf{f}(\varphi)] + s_{\mathbf{x}}(\varphi + 2\pi) - s_{\mathbf{x}}(\varphi) \right), \end{aligned}$$



Figur 15: Til venstre arealet af et parallelogram udspændt af  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Grundlinjen er længden af  $\mathbf{a}$  og højden er projektionen af  $\mathbf{b}$  ind på  $\hat{\mathbf{a}}$ , så arealet er  $[\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}$ . Til højre ses arealet udspændt af et punkt og et kurvestykke. Da det infinitesimale areal er givet ved  $\frac{1}{2}[\mathbf{r}(u) \ \mathbf{r}'(u)] du$ , er det totale areal givet ved  $\frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} [\mathbf{r}(u) \ \mathbf{r}'(u)] du$ .

det næste led har vi allerede mødt ovenfor, så vi har umiddelbart

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{a}(u) \ \mathbf{x}'(u)] du = \frac{1}{2} r (s_x(\varphi + 2\pi) - s_x(\varphi)).$$

Det tredje led giver

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\mathbf{a}(u) \ \mathbf{a}'(u)] du = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [-r\mathbf{f}(u) \ r\mathbf{e}(u)] du = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} r^2 du = \pi r^2,$$

i overensstemmelse med at  $\mathbf{a}$  beskriver en cirkel med radius  $r$ . Det sidste led giver

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} -[\mathbf{a}(\varphi) \ \mathbf{x}'(u)] du &= \frac{1}{2} \left[ [r\mathbf{f}(\varphi) \ \mathbf{x}(u)] \right]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \\ &= \frac{1}{2} r \left( -[\mathbf{x}(\varphi + 2\pi) \ \mathbf{f}(\varphi)] + [\mathbf{x}(\varphi) \ \mathbf{f}(\varphi)] \right) \\ &= \frac{1}{2} r [\mathbf{x}(\varphi) - \mathbf{x}(\varphi + 2\pi) \ \mathbf{f}(\varphi)]. \end{aligned}$$

Det ønskede areal fås nu til

$$\mathcal{A}(\varphi) = \pi r^2 + r \left( [\mathbf{x}(\varphi) - \mathbf{x}(\varphi + 2\pi) \ \mathbf{f}(\varphi)] + s_x(\varphi + 2\pi) - s_x(\varphi) \right).$$

Bemærk, at vi atter har, at hvis  $\varrho_x(\varphi)$  er et polynomium, så kan  $\mathbf{x}(\varphi)$ ,  $s_x(\varphi)$  og dermed arealet  $\mathcal{A}(\varphi)$  udregnes eksakt.

Arbejdet med at finde den optimale spiral er ikke færdigt. Dette arbejde pågår i samarbejde med Danfoss; men det er klart, at mulighed for at opskrive eksakte udtryk for alle de vigtige geometriske egenskaber ved scroll-kompressoren letter arbejdet betydeligt. Vi bør her bemærke, at ikke alene polynomielle udtryk for  $\rho(\varphi)$  giver eksakte udtryk; men også *stykkevis* polynomielle udtryk fører til eksakte udtryk. Da enhver funktion meget let kan tilnærmes med en stykkevis polynomiell funktion betyder det, at der i praksis ikke er nogen begrænsning på de spiraler, der kan analyseres eksakt.

## References

- [1] L. Creux. *Rotary Engine*. US Patent 801182, 1905.
- [2] F. Fabricius-Bjerre. *Lærebog i Geometri II. Differentialgeometri og kinematisk geometri*. Polyteknisk Forlag, Lyngby, 6. udg., 1987.
- [3] J. Gravesen, C. Henriksen og P. Howell. Danfoss: Scroll optimization. I Gravesen og Hjorth [4], side 3–35. URL <http://www.mat.dtu.dk/ESGI32/Report>.
- [4] J. Gravesen og P. Hjorth, redaktører. *32nd European Study Group with Industry, Final Report*. Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet, 1998. URL <http://www.mat.dtu.dk/ESGI32/Report>.
- [5] H. W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.
- [6] B. Jessen. *Lærebog i Geometri II. Differentialgeometri og nomografi*. Jul. Gjellerups Forlag, København, Anden udg., 1945.
- [7] J. E. McCullough og F. Hirschfeld. The scroll machine — an old principle with a new twist. *Mech. Eng.*, 101(12):46–51, 1979.