Approksimation ved Taylorpolynomier

Preben Alsholm

Juli 2006

1 Taylorpolynomier

Et polynomium i den variable x er et udtryk af formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hvor *koefficienterne* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er tal (enten reelle eller komplekse). Bemærk, at eksponenterne til x alle er ikke-negative hele tal. Hvis $a_n \neq 0$, vil vi kalde a_n for *den ledende koefficient*, og sige at polynomiets *grad* er n. Et polynomium af 0'te grad er blot et tal $a_0 \neq 0$. Nulpolynomiet er blot udtrykket 0. Når det overhovedet tillægges en grad, siger man at den er $-\infty$.

Eksempel 1 *Udtrykkene* $2x^3 - x + 11,\ -\pi x^6 + 5x^5 + (5 + 3i)\, x^2 + x$ *og* 7 *er polynomier i den variable* x *af grader henholdsvis 3, 6 og 0. Udtrykkene* $4x^{-2} + 6x^{-1} - 8 + x + \frac{1}{2}x^2$ *og* $5x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ *er* ***ikke*** *polynomier i den variable* x*. Et udtryk med uendeligt mange led som* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^k + \ldots$ *er ikke et polynomium, men kaldes en uendelig række.*

Et polynomium i den variable x kan naturligvis betragtes som en funktion af x. Som sådan udregnes funktionsværdierne særdeles effektivt og hurtigt, hvis polynomiet skrives på *Hornerform* således som følgende eksempel antyder

$$p(x) = 7x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 5x + 87 = (((7x + 3)\, x - 14)\, x + 5)\, x + 87$$

Polynomier er også i andre henseender lette at have med at gøre, så det kan være en god idé at erstatte en kompliceret eller næsten umulig funktion f med et polynomium. Dette forudsætter selvfølgelig, at den fejl man herved begår er af acceptabel størrelse, altså ligger indenfor en given tolerance.

Definition 2 *Det n'te* Taylorpolynomium P_n *med* udviklingspunkt a *for en funktion* f *er et polynomium af grad højst* n*, således beskaffen, at* f *og* P_n *har samme afledede i punktet* a *op til og med* n*'te orden. Altså*

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a)\,,\ P_n'(a) = f'(a)\,,\ P_n''(a) = f''(a)\,, \\ &\ldots \\ P_n^{(n-1)}(a) &= f^{(n-1)}(a)\,,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Interessen for P_n ligger i forventningen om at f og P_n ikke afviger meget fra hinanden i omegnen af udviklingspunktet a, jo mindre desto større n er. Vi skal lidt senere se, at dette også er rigtigt.

Sætning 3 *Det n'te* Taylorpolynomium P_n *med* udviklingspunkt a *er givet ved*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

Bevis. Ethvert polynomium P_n af grad højst n kan skrives på formen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n \tag{1}$$

Ved indsættelse af $x = a$ i (1) fås $P_n(a) = a_0$. Men vi forlanger jo, at $P_n(a) = f(a)$, så hermed er a_0 bestemt: $a_0 = f(a)$. Ved differentiation af (1) fås

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \tag{2}$$

Ved indsættelse af $x = a$ i (2) fås $P_n'(a) = a_1$. Men vi forlanger, at $P_n'(a) = f'(a)$. Så $a_1 = f'(a)$. Ved differentiation af (2) fås

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \tag{3}$$

Ved indsættelse af $x = a$ i (3) fås $P_n''(a) = 2a_2$. Vi forlanger, at $P_n''(a) = f''(a)$. Så $a_2 = \frac{1}{2}f''(a)$. Ved differentiation af (3) fås

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} \tag{4}$$

Ved indsættelse af $x = a$ i (4) fås $P_n'''(a) = 2 \cdot 3a_3 = 3!a_3$. Vi forlanger, at $P_n'''(a) = f'''(a)$. Så $a_3 = \frac{1}{3!}f'''(a)$. Således kan vi åbenbart fortsætte. Generelt gælder, at når vi har differentieret k gange (med $k \leq n$) har vi

$$P_n^{(k)}(x) = k!a_k + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} \tag{5}$$

Ved indsættelse af $x = a$ i (5) fås $P_n^{(k)}(a) = k!a_k$. Vi forlanger, at $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. Så formlen for a_k bliver

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

Denne formel gælder for alle k mellem 0 og n, når vi bruger den konvention, at den 0'te afledede blot er funktionen selv og $0! = 1$ ligesom også $1! = 1$. Hermed er sætningen vist. ■

Eksempel 4 *Vi vil bestemme både det tredie* (P_3) *og det fjerde* (P_4) *Taylorpolynomium for sinusfunktionen* sin *med udviklingspunkt 0. Vi finder, når* $f(x) = \sin x$, *at*

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

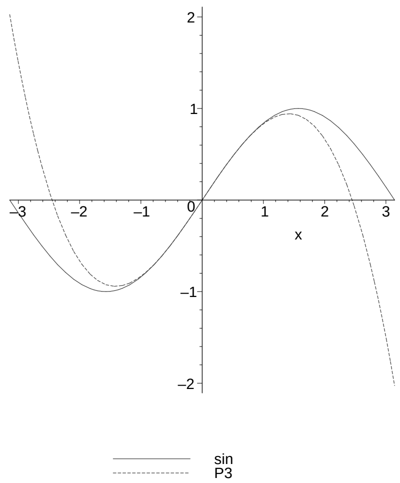
Hermed har vi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

Altså har vi

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

og da $f^{(4)}(0) = 0$*, har vi* $P_4 = P_3$*.*



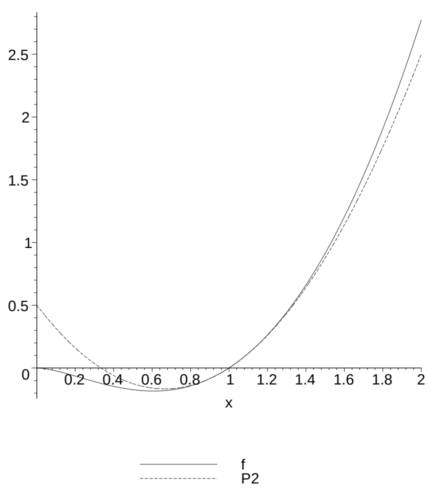
Sinusfunktionen og dens 3. Taylorpolynomium med udviklingspunkt 0.

Eksempel 5 *Vi bestemmer det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt* 1 *for funktionen* $f : x \mapsto x^2 \ln x$*. Vi finder*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln x + x \\ f''(x) &= 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$

Altså har vi $f(1) = 0$*,* $f'(1) = 1$ *og* $f''(1) = 3$*. Taylorpolynomiet* P_2 *er dermed givet ved forskriften*

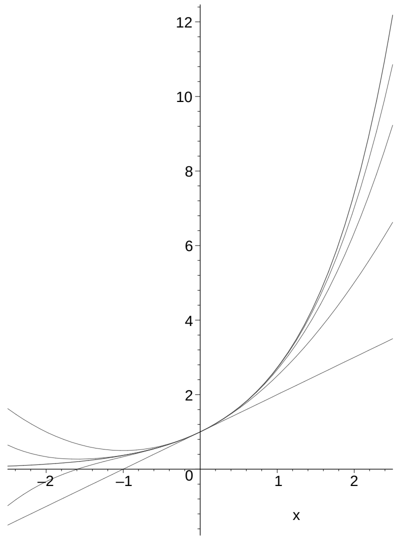
$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 \end{aligned}$$



Funktionen $x \longmapsto x^2 \ln x$ *og dens 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt 1.*

Eksempel 6 *Vi vil bestemme det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* 0 *for eksponentialfunktionen* exp. *Med* $f(x) = \exp x = e^x$ *har vi, at* $f^{(k)}(x) = e^x$ *for alle* $k \geq 0$ *og* $x \in R$. *Dermed finder vi, at* $f^{(k)}(0) = 1$ *for alle* $k \geq 0$, *således at*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$



e^x *og dens første 4 Taylorpolynomier* P_1, P_2, P_3, P_4.

Det er klart af stor interesse at vide noget om størrelsen af den fejl, der begås ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt a. Til en vurdering af denne fejl er Taylors sætning (Taylors formel) velegnet.

Sætning 7 ***Taylors Sætning med Lagranges restled.*** *Antag, at* f *er* $n+1$ *gange differentiabel i et interval* I *indeholdende tallet* a. *Så findes der til ethvert givet* $x \in I$ *et tal* ξ *mellem* x *og* a, *så*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \tag{6}$$

hvor P_n *betegner det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* a, *dvs.*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Bemærkning 8 *Differensen mellem* $f(x)$ *og* $P_n(x)$ *kaldes restleddet og betegnes undertiden med* $R_n(x)$. *Restleddet kan ifølge (6) skrives på formen*

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \tag{7}$$

hvor ξ er et tal mellem a og x. På denne form kaldes det Lagranges restled. Da Taylors sætning om ξ kun siger, at det ligger mellem x og a, kunne man fristes til at tro at sætningen er ubrugelig. Det er ikke tilfældet. Sætningen kan bruges til at vurdere størrelsen af $|R_n(x)|$. Hvis denne er tilstrækkeligt lille, så kan vi se bort fra restleddet og altså erstatte $f(x)$ med $P_n(x)$.

Taylors sætning med Lagranges restled kan bevises på mange måder. Her vil vi gøre brug af den udvidede middelværdisætning:

Lemma 9 ***Den udvidede middelværdisætning.*** *Antag, at funktionerne h og g er kontinuerte i intervallet $[a, b]$ og differentiable i $]a, b[$. Så findes der et tal $\xi \in]a, b[$, så*

$$[h(b) - h(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, h'(\xi).$$

Bevis. Lad $\phi(x) = (g(x) - g(a))(h(b) - h(a)) - (g(b) - g(a))(h(x) - h(a))$. Så gælder åbenbart, at $\phi(a) = 0$ og $\phi(b) = 0$. Da nu ϕ er differentiabel i det åbne interval $]a, b[$ og kontinuert i det lukkede interval $[a, b]$, findes der et tal $\xi \in]a, b[$, så $\phi'(\xi) = 0$, altså et tal ξ hvor grafen for ϕ har vandret tangent. Denne kendsgerning kaldes i øvrigt Rolles sætning. Men $\phi'(\xi) = g'(\xi)(h(b) - h(a)) - (g(b) - g(a))h'(\xi)$, der sammen med $\phi'(\xi) = 0$ umiddelbart giver påstanden i lemmaet. ■

Vi kan nu bevise Taylors sætning med Lagranges restled:

Bevis. I den udvidede middelværdisætning tager vi $h(x) = f(x) - P_n(x)$ og $g(x) = (x - a)^{n+1}$. Så har vi

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - P_n(a) = 0, h'(a) = f'(a) - P_n'(a) = 0, \\ h''(a) &= f''(a) - P_n''(a) = 0, ..., h^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(a) = 0, \end{aligned}$$

og for g gælder tilsvarende $g(a) = 0, g'(a) = 0, g''(a) = 0, ..., g^{(n)}(a) = 0$. Lad nu $x \in I$. Lad os sige, at $x > a$. Første brug af den udvidede middelværdisætning giver nu

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

hvor $\xi_1 \in]a, x[$. Anden brug af den udvidede middelværdisætning giver

$$\frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{h'(\xi_1) - h'(a)}{g'(\xi_1) - g'(a)} = \frac{h''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

hvor $\xi_2 \in]a, \xi_1[$. Sådan kan fortsættes. Idet $g^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ for alle t får vi til sidst

$$\frac{h^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{h^{(n)}(\xi_n) - h^{(n)}(a)}{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(a)} = \frac{h^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

hvor vi altså har $a < \xi_{n+1} < \xi_n < ... < \xi_2 < \xi_1 < x$. Vi har nu vist, at

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

dvs. $h(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) g(x)$, altså $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1})(x - a)^{n+1}$. Med $\xi = \xi_{n+1}$ er sætningen vist. ■

Restleddet i Taylors formel kan også gives i form af et integral. Det er dog normalt lettest at bruge restleddet på Lagranges form.

Sætning 10 ***Taylors Sætning med integralrestled.*** *Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel med $f^{(n+1)}$ kontinuert i et interval I indeholdende a. Så gælder for alle $x \in I$:*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \tag{8}$$

hvor P_n betegner det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt a.

Bevis. Lad $P_{t,n}$ være det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt $t \in I$:

$$P_{t,n}(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n$$

Ved at differentiere de tre første led i $P_{t,n}(x)$ mht. t fås

$$f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2 - f''(t)(x-t) = \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2$$

Ved at differentiere hele $P_{t,n}(x)$ mht. t fås tilsvarende, at alle bidrag på nær et forsvinder:

$$\frac{d}{dt} P_{t,n}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

Bemærk nu, at erstattes t i $P_{t,n}(x)$ med x og a fås $f(x)$ og $P_n(x)$ henholdsvis. Derfor har vi, at

$$f(x) - P_n(x) = \int_a^x \frac{d}{dt} P_{t,n}(x)\, dt = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

hvor med sætningen er vist. ∎

Bemærkning 11 *I Taylors sætning med integralrestled er ingen information gået tabt. Det er derimod tilfældet for Taylors sætning med Lagranges restled, hvor vi jo kun om ξ får at vide, at det ligger mellem x og a.*

Som en konsekvens af Taylors sætning med det ene eller andet restled har vi følgesætningen:

Korollar 12 *Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i intervallet I, der indeholder a. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le C$ for alle $x \in I$. Så gælder*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{C}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \tag{9}$$

for alle $x \in I$, når P_n er det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt a.

Bevis. Påstanden er en umiddelbar følge af Taylors sætning med Lagranges restled. Men kan også vises ved brug af Taylors sætning med integralrestled hvis vi antager, at $f^{(n+1)}$ er kontinuert på I. Lad os først betragte tilfældet $x > a$:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \left| \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \le \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \\ &\le \frac{C}{n!} \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{C}{n!} \left[\frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right]_a^x = \frac{C}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

For $x < a$ fås

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \frac{1}{n!}\int_x^a (t-x)^n \left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \\
&\le \frac{C}{n!}\int_x^a (t-x)^n\,dt = \frac{C}{n!}\left[\frac{1}{n+1}(t-x)^{n+1}\right]_x^a = \frac{C}{(n+1)!}(a-x)^{n+1}
\end{aligned}$$

Resultaterne i de to tilfælde kan sammenfattes i (9). ■

Lemma 13 *Det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for den afledede f' er lig med den afledede af det n'te Taylorpolynomium for f. Ved differentiation af*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

fås nemlig

$$P_n'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + ... + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}$$

men det er jo netop det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for f'

Følgende nyttige resultat kan ofte benyttes i stedet for en direkte vurdering af restleddet i Taylors formel:

Sætning 14 ***(Max-fejl-sætningen)*** *Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et lukket interval I, der indeholder a. Lad P_n være det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt a. Da gælder, at hvis $f^{(n+1)}$ ikke skifter fortegn andre steder i I end eventuelt i a, så vokser afvigelsen $|f(x) - P_n(x)|$ med $|x-a|$, og antager altså sin størsteværdi i et af endepunkterne af intervallet I.*

Bevis. Ifølge lemmaet (13) ovenfor er P_n' det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for f'. Med $h(x) = f(x) - P_n(x)$ har vi derfor ifølge Taylors sætning med Lagranges restled anvendt på f', at der findes et tal ξ_1 mellem a og x, så

$$h'(x) = f'(x) - P_n'(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^n$$

Heraf følger med vores antagelse om $f^{(n+1)}$, at $h'(x)$ ikke ændrer fortegn andre steder end eventuelt i a. Derfor er h svagt monoton til venstre for a og svagt monoton til højre for a. (En funktion h er svagt voksende, hvis $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$). Heraf følger påstanden. ■

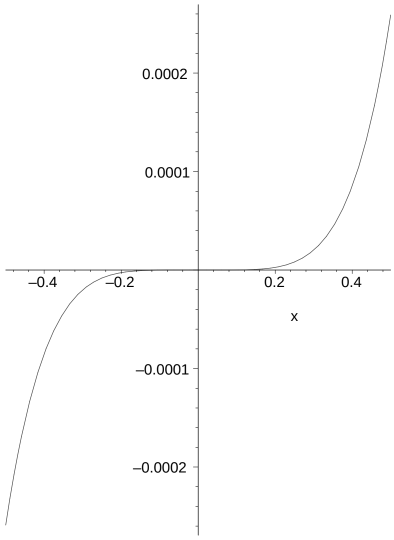
1.1 Anvendelser af Taylorpolynomier

Approksimation af en funktion f ved Taylorpolynomier bruges specielt i tilfælde, hvor funktionen ikke er særlig godt kendt, men hvor de afledede i et givet punkt a er kendte (eller lette at bestemme). Vi begynder med et simpelt eksempel.

Eksempel 15 *Vi vil vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $\sin x$ med dets fjerde Taylorpolynomium $P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ (med udviklingspunkt 0), når $|x| \le \frac{1}{2}$. Vi har, når $f(x) = \sin x$, at $f^{(5)}(x) = \cos x$. Da $\left|f^{(5)}(x)\right| = |\cos x| \le 1$ følger det altså af (9) i Korollar (12), at*

$$|\sin x - P_4(x)| \le \frac{1}{5!}\cdot 1 \cdot |x|^5 \le \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{3840} \cong 2.6 \times 10^{-4}$$

Er vi tilfredse med 3 *decimaler i resultatet, kan vi altså erstatte* $\sin x$ *med* $x - \frac{x^3}{3!}$, *når* $|x| \leq \frac{1}{2}$. *Eksempelvis finder vi* $\sin 0.5 = 0.479\,43$ *og* $P_4(0.5) = P_3(0.5) = 0.479\,17$. *På figuren nedenfor ser vi, at den faktiske afvigelse* $\sin x - P_4(x) = \sin x - P_3(x)$ *vokser med voksende afstand fra udviklingspunktet. Det er netop det typiske, jvf. Max-fejl-sætningen.*



Afvigelsen $\sin x - P_3(x)$, *altså den faktiske fejl.*

Eksempel 16 *Vi vil bestemme det 3. Taylorpolynomium* P_3 *med udviklingspunkt 0 for* arcsin *og vurdere den fejl, der begås ved at erstatte* $\arcsin x$ *med* $P_3(x)$, *når* $|x| \leq \frac{1}{2}$. *Med* $f = \arcsin$ *finder vi*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= 9x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 15x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}} = \frac{3x\left(2x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned}$$

Hermed har vi $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1$, *således at*

$$P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$$

En øvre grænse for den fejl, der begås ved at erstatte $\arcsin x$ *med* $P_3(x)$, *når* $|x| \leq \frac{1}{2}$, *kan findes ved brug af (9) i Korollar (12). Vi finder først en majorant for* $\left|f^{(4)}(x)\right|$ *på intervallet* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{3x\left(2x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}}\right| = \frac{3|x|\left(2x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}} \leq \frac{3\cdot\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}} \cong 14.4$$

Vi har brugt, at $\left|f^{(4)}(x)\right|$ *klart er størst for* $x = \pm\frac{1}{2}$, *idet dermed tælleren bliver størst mulig samtidig med at nævneren bliver mindst mulig. Hermed har vi*

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4!} 14.4 \cdot x^4 = 0.6 \cdot x^4$$

Hvis vi også erstatter x *med det værst tænkelige, igen* $x = \pm\frac{1}{2}$, *fås vurderingen*

$$|f(x) - P_3(x)| \leq 0.6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cong 0.037\,5$$

Det kan bemærkes, at den faktiske maksimale fejl er ca. 3×10^{-3}, *altså betydeligt mindre! Ved udelukkende at bruge Korollar (12) er det umuligt at give en bedre vurdering end den vi gav. Men i dette eksempel kan vi bemærke, at* $f^{(4)}(x) \neq 0$ *for alle* $x \neq 0$. *Af Max-fejl-sætningen ovenfor følger derfor, at* $|f(x) - P_3(x)|$ *er størst for* $x = \pm\frac{1}{2}$. *Værdien er* $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cong 0.002765$ *altså ca.* 3×10^{-3}.

Eksempel 17 *Vi vil bestemme det n'te Taylorpolynomium* P_n *med udviklingspunkt 0 for funktionen* $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *og vurdere den fejl, der begås ved at erstatte* $f(x)$ *med* $P_n(x)$, *når* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. *Vi finder ved differentiation, at*

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \; f''(x) = -(1+x)^{-2}, \; f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

og generelt for $k \geq 1$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$$

Det n'te Taylorpolynomium P_n *er altså givet ved*

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n$$

En øvre grænse for den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ *med* $P_n(x)$, *når* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, *kan findes ved brug af (9) i Korollar (12). Vi har*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \leq n! \tag{10}$$

for $x \geq 0$. *Derfor har vi vurderingen*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

for $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Lad os nu bestemme* $\ln(1.5)$ *med 10 decimaler. Vi agter at bruge Taylorpolynomiet* P_n *hertil. Det betyder, at vi forlanger, at fejlen, som vi begår ved at erstatte* $\ln(1.5)$ *med* $P_n(1.5)$ *skal være mindre end* $5 \cdot 10^{-11}$. *Ifølge de ovenstående beregninger er det tilstrækkeligt at forlange, at*

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 5 \cdot 10^{-11}$$

For $n = 28$ *og* $n = 29$ *fås*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &\simeq 6.423 \cdot 10^{-11} \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &\simeq 3.105 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

henholdsvis. Med $n = 29$ *er vi altså sikre på at fejlen ved at erstatte* $\ln(1.5)$ *med* $P_n(1.5)$ *er mindre end* $5 \cdot 10^{-11}$*. Ved udregning i Maple finder vi*

$$\begin{aligned}
\ln(1.5) - P_{27}(1.5) &= -8.974 \cdot 10^{-11} \\
\ln(1.5) - P_{28}(1.5) &= 4.331 \cdot 10^{-11} \\
\ln(1.5) - P_{29}(1.5) &= -2.092 \cdot 10^{-11}
\end{aligned}$$

Vi ser, at faktisk er $P_{28}(1.5)$ *god nok.*

Bemærkning 18 *Vurderingen (10) brugte kraftigt, at* $x \geq 0$*. Hvis* $-1 < x < 0$ *har vi i stedet*

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-|x|)^{n+1}}$$

der giver vurderingen

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{(1-|x|)} \right)^{n+1}$$

Dette er kun en god vurdering, hvis $|x| \leq \frac{1}{2}$*. Hvis* $|x| > \frac{1}{2}$ *så vil højresiden gå mod uendelig for* $n \to \infty$*. For* $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ *har vi derfor behov for en bedre vurdering. Ved brug af integralrestleddet fås for* $-1 < x < 0$*, at*

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \left| \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \\
&= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^{|x|} \frac{u^n}{1-u} du
\end{aligned}$$

hvor vi har brugt substitutionen

$$u = \frac{t-x}{1+t},\ t = \frac{u+x}{1-u},\ dt = \frac{1+x}{(1-u)^2} du$$

Herefter fås

$$|f(x) - P_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{u^n}{1-u} du \leq \int_0^{|x|} \frac{u^n}{1-|x|} du = \frac{1}{1-|x|} \int_0^{|x|} u^n du = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^n}{1-|x|} \tag{11}$$

der er en meget bedre vurdering, idet den bl.a. viser, at blot $|x| < 1$ *gælder, at* $|f(x) - P_n(x)| \to 0$ *for* $n \to \infty$*.*

Eksempel 19 *Løsningen til differentialligningen*

$$x' = t^2 + x^2$$

med begyndelsesværdien $x(0) = 1$*, kan faktisk findes eksakt, men løsningen må udtrykkes vha. såkaldte Besselfunktioner* J_ν *og* Y_ν *samt ved brug af gammafunktionen* Γ*. Løsningen (som er fundet ved hjælp af Maple) ser indviklet ud:*

$$x(t) = -\frac{t\left(\left(sgn(t)\pi - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\left(sgn(t)\pi - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

Løsningen er jo noget af et monstrum. Man kan roligt sige, at selve differentialligningen ser meget mindre afskrækkende ud! For mange formål er det nok at kende en god approksimation til løsningen, f.eks. et Taylorpolynomium. Vi skal nu se, at det er let uden kendskab til den eksakte løsning at bestemme ligeså mange afledede af løsningen i $t = 0$*, som man lyster. Altså kan man let bestemme Taylorpolynomier for* x *udfra punktet* 0*. Vi viser, hvordan de afledede for* $t = 0$ *kan bestemmes direkte udfra differentialligningen og begyndelsesbetingelsen.*

Ved indsættelse af $t = 0$ *i* $x'(t) = t^2 + x(t)^2$ *fås* $x'(0) = 0^2 + x(0)^2 = 1$*, da* $x(0) = 1$*. Differentiér nu differentialligningen. Vi finder*

$$x''(t) = 2t + 2x(t)x'(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ *giver* $x''(0) = 2 \cdot 0 + 2x(0)x'(0) = 2$*. Differentiér én gang til. Vi finder*

$$x'''(t) = 2 + 2x'(t)x'(t) + 2x(t)x''(t) = 2 + 2x'(t)^2 + 2x(t)x''(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ *giver* $x'''(0) = 2 + 2x'(0)^2 + 2x(0)x''(0) = 8$*. Differentieres endnu engang, fås*

$$x^{(4)}(t) = 4x'(t)x''(t) + 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'''(t) = 6x'(t)x''(t) + 2x(t)x'''(t)$$

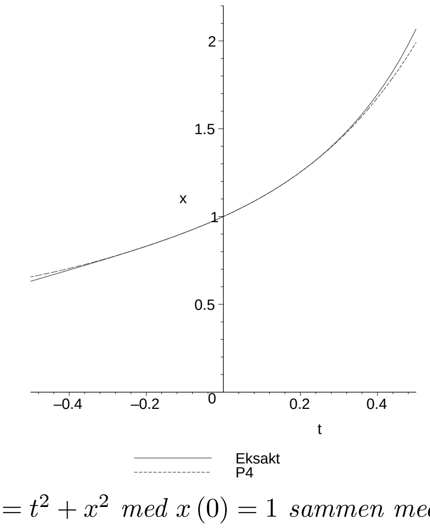
Indsættelse af $t = 0$ *giver* $x^{(4)}(0) = 6x'(0)x''(0) + 2x(0)x'''(0) = 12 + 16 = 28$*. Man kunne fortsætte, men vi standser her. Vi kan nu nedskrive det fjerde Taylorpolynomium* P_4 *for løsningen* x *til begyndelsesværdiproblemet*

$$\begin{gathered} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 1 \end{gathered}$$

Vi finder

$$\begin{aligned} P_4(t) &= x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2}x''(0)t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}x^{(4)}(0)t^4 \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}2t^2 + \frac{1}{3!}8t^3 + \frac{1}{4!}28t^4 = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{6}t^4 \end{aligned}$$

Det ses let, at den femte afledede $x^{(5)}(t)$ *nødvendigvis må være positiv (i øvrigt ligesom alle de andre afledede). Derfor følger af max-fejl-sætningen, at afvigelsen* $|x(t) - P_4(t)|$ *vokser med* $|t|$*.*



Den eksakte løsning til $x' = t^2 + x^2$ *med* $x\,(0) = 1$ *sammen med det 4. Taylorpolynomium.*

Eksempel 20 *Lad f være den funktion, der er givet ved forskriften*

$$f(x)=\int_0^x e^{\sin t}dt$$

Funktionen er altså givet ved et integral. Dette integral kan imidlertid ikke udtrykkes vha. det sædvanlige repertoire af funktioner kendt af alle og enhver. Ikke engang Maple kan udtrykke integralet ved brug af dets ret omfattende repertoire af funktioner. Ikke desto mindre er der ingen tvivl om at $f(x)$ er særdeles veldefineret for ethvert $x \in R$. Integranden $e^{\sin t}$ er jo en kontinuert funktion af t. Den har altså en stamfunktion, og f er netop en sådan. Med andre ord vi har

$$f'(x)=e^{\sin x}$$

Foruden at opfylde denne ligning opfylder f åbenbart også betingelsen $f(0)=0$. Vi er nu i realiteten i samme situation som i eksemplet ovenfor. Vi har en funktion, der opfylder en differentialligning (denne gang af en meget simpel art) og en begyndelsesbetingelse. Vi kan da let finde Taylorpolynomier med udviklingspunkt 0. Vi vil bestemme det 3. Taylorpolynomium P_3 samt vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$, når $|x|\leq\frac{\pi}{6}$. Vi skal dermed udregne de første 4 afledede af f. Vi finder

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\sin x}\cos x\\
f'''(x) &= e^{\sin x}\left(-\sin x+\cos^2 x\right)\\
f^{(4)}(x) &= e^{\sin x}\cos x\sin x\cdot(3-\sin x)
\end{aligned}$$

Hermed fås

$$f(0)=0, f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=1$$

Således har vi

$$P_3(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

Ønsker vi at vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$, når $|x|\leq\frac{\pi}{6}$, kan vi gøre brug af (9) i Korollar (12). Vi skal altså bestemme en øvre grænse for værdien af $\left|f^{(4)}(x)\right|$. Da $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, burde vi nu erstatte $\left|f^{(4)}(x)\right|$ med den maksimale værdi for $f^{(4)}$ på intervallet $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$. At finde denne maksimale værdi kan selvfølgelig lade sig gøre, men kræver uden brug af computer lidt arbejde. Da det er en fejl, som vi er i færd med at vurdere, vil det ikke give megen mening at bruge for meget arbejde herpå. Vi laver derfor en grov vurdering, der selvfølgelig skal være korrekt, men forhåbentlig stadig kan være god nok til at være nyttig. Vi begynder således

$$\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|e^{\sin x}\cos x\sin x\,(3-\sin x)\right|=e^{\sin x}\left|\cos x\right|\left|\sin x\right|\left|3-\sin x\right|$$

Grovheden består nu i, at hver faktor erstattes med sin maksimale værdi. Herved fås, idet $|\sin x|\leq\frac{1}{2}, |\cos x|\leq 1$ og $|3-\sin x|\leq 3+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{7}{2}$:

$$\left|f^{(4)}(x)\right|\leq e^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cong 2.9$$

Vi har hermed for $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ opnået vurderingen

$$|f(x)-P_3(x)|\leq\frac{1}{4!}\cdot 2.9\cdot x^4\leq\frac{1}{4!}\cdot 2.9\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\cong 0.91\times 10^{-2}$$

Vi kan altså garantere, at den fejl der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$ allerhøjst er 0.9×10^{-2}, men den er formodentlig en del lavere. Vurderingen kan afhænge meget af den form den afledede *har. Vi kan lave en lidt bedre vurdering ved at omskrive den 4. afledede ved brug af formlen* $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$*:*

$$f^{(4)}(x) = e^{\sin x}\cos x \sin x\,(3-\sin x) = \frac{1}{2}e^{\sin x}\sin(2x)\,(3-\sin x)$$

Hermed finder vi den forbedrede vurdering $|f(x) - P_3(x)| \leq 0.78 \times 10^{-2}$*. Den er dog ikke så meget bedre, så man kan diskutere, om den var umagen værd! Lader man Maple tegne forskellen mellem* f *og* P_3 *på intervallet* $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$*, vil man se, at den største forskel er ca.* 1.2×10^{-3}*. Den maksimale fejl findes i et af endepunkterne i overensstemmelse med max-fejl-sætningen, idet* $f^{(4)}(x) = e^{\sin x}\cos x \sin x\,(3-\sin x)$ *ikke skifter fortegn andre steder end i udviklingspunktet* 0.

Eksempel 21 *Antag, at det vides, at en funktion* f *opfylder ligningen*

$$f(x)^3 + f(x) + 5x - 5 = 0 \tag{12}$$

for alle $x \in R$*. Vi vil egentlig gerne løse ligningen for* $f(x)$*. Dette kan da også godt lade sig gøre (prøv med Maple!), idet der er formler til bestemmelse af rødderne til polynomier af grad op til og med 4. Der er tre løsninger til vores ligning. De er alle ret grimme. Én af løsningerne er reel. Ifølge Maple ser den således ud*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}\sqrt[3]{540\,(1-x) + 12\sqrt{2037 - 4050x + 2025x^2}} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt[3]{540\,(1-x) + 12\sqrt{2037 - 4050x + 2025x^2}}} \end{aligned}$$

Denne løsnings 3.Taylorpolynomium P_3 *med udviklingspunkt 1 vil vi bestemme. Vi agter ikke at bruge dette eksplicitte udtryk for løsningen, men derimod ligning (12). Vi udnytter, at det kan vises, at der for ethvert* $x \in R$ *er præcis én reel løsning* $f(x)$ *til trediegradsligningen (12). Det ses ved indsættelse af* $x = 1$*, at* $f(1)$ *må opfylde ligningen* $f(1)^3 + f(1) = 0$*. Denne ligning har den reelle løsning* $f(1) = 0$*. Ved differentiation af ligning (12) fås*

$$3f(x)^2 f'(x) + f'(x) + 5 = 0 \tag{13}$$

altså opfylder f *differentialligningen*

$$f'(x) = -\frac{5}{1 + 3f(x)^2} \tag{14}$$

Da vi også kender begyndelsesværdien for f*, er vi nu i samme situation som tidligere. Vi finder umiddelbart, at* $f'(1) = -5$*. Ved differentiation af ligning (13) fås*

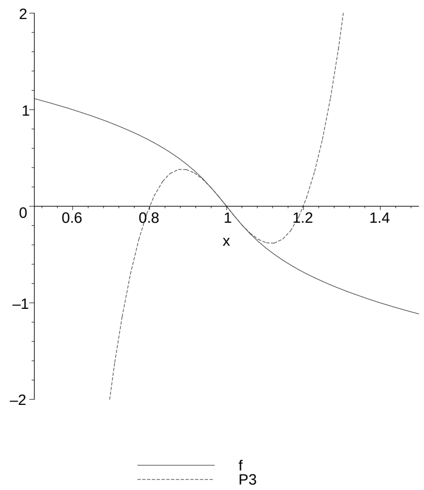
$$6f(x)f'(x)^2 + 3f(x)^2 f''(x) + f''(x) = 0 \tag{15}$$

Indsættelse af $x = 1$ *giver, at* $f''(1) = 0$*. Vi kunne i stedet have differentieret ligning (14), men foretrak at undgå brøker. Ved differentiation af ligning (15) fås*

$$6f'(x)^3 + 18f(x)f'(x)f''(x) + 3f(x)^2 f'''(x) + f'''(x) = 0$$

Indsættelse af $x = 1$ *giver, at* $f'''(1) = 750$*. Hermed har vi*

$$P_3(x) = -5\,(x-1) + 125\,(x-1)^3$$



Funktionen f og dens 3. Taylorpolynomium med udviklingspunkt 1.

1.2 Grænseværdibestemmelse ved brug af Taylorpolynomier

Ved grænseværdibestemmelse kan Taylorudvikling undertiden udnyttes. Idéen er at erstatte nogle (eller alle) de indgående funktioner med deres Taylorudviklinger inklusive restled. Da der imidlertid er tale om grænseværdibestemmelse, så indeholder restleddene alt for megen overflødig information. Derfor giver vi først en version af Taylors sætning, der egner sig til brug ved grænseværdibestemmelse.

Først må vi forklare store O-notationen. Den er en smule mærkelig og bør behandles *med megen varsomhed*.

Definition 22 *Hvis der eksisterer et positivt tal C, så*

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)| \tag{16}$$

for alle x i en omegn af tallet a, så vil vi skrive

$$f(x) = O(g(x)) \text{ for } x \to a$$

Hvis (16) i stedet gælder for alle x større end et tal x_0, så vil vi skrive

$$f(x) = O(g(x)) \text{ for } x \to \infty$$

Hvis $f(x) - h(x) = O(g(x))$ vil vi også skrive $f(x) = h(x) + O(g(x))$.

Bemærkning 23 *I denne definition optræder $O(g(x))$ kun på højre side af lighedstegnet. Hvis $f(x) = O\left(x^4\right)$ for $x \to 0$, så gælder også $f(x) = O\left(x^3\right)$ for $x \to 0$, idet jo $|f(x)| \leq Cx^4$ for alle x i en omegn af 0 medfører, at $|f(x)| \leq Cx^3$ for alle x i en omegn af 0. Dette ses undertiden lidt forvirrende skrevet som $O\left(x^4\right) = O\left(x^3\right)$ for $x \to 0$. Det er imidlertid ikke sådan at $O\left(x^3\right) = O\left(x^4\right)$ for $x \to 0$. Man ser, hvorfor varsomhed er påkrævet!*

Bemærkning 24 *Der findes også en lille o-notation. At* $f(x) = o(g(x))$ *for* $x \to a$ *betyder, at* $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ *for* $x \to a$. *Vi skal ikke gøre brug af lille o-notationen.*

Eksempel 25 *Der gælder*

$$\sin x = O(x) \text{ for } x \to 0$$

idet der gælder uligheden

$$|\sin x| \le |x|$$

for alle x *i en omegn af* 0 *(ja faktisk for alle* $x \in R$*).*

Eksempel 26 *Der gælder*

$$\sin x - x = O\left(x^3\right) \text{ for } x \to 0$$

eller anderledes skrevet

$$\sin x = x + O\left(x^3\right) \text{ for } x \to 0$$

Ifølge Taylors formel gælder nemlig

$$\sin x = P_2(x) + \frac{1}{3!}(-\cos \xi)\, x^3$$

hvor ξ *ligger mellem* 0 *og* x. *Da* $P_2(x) = P_1(x) = x$ *har vi*

$$|\sin x - x| = \left|\frac{1}{3!}(-\cos \xi)\, x^3\right| = \frac{1}{6}|\cos \xi|\, |x|^3 \le \frac{1}{6}|x|^3$$

i en omegn af 0 *(som i eksemplet ovenfor faktisk for alle* $x \in R$*).*

Idéen i ovenstående eksempel udnytter vi i følgende sætning:

Sætning 27 ***Taylors Sætning på store O-form****. Antag, at* f *er* $n+1$ *gange differentiabel i et interval om* a, *og at* $f^{(n+1)}$ *er begrænset i* I. *Så gælder*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right) \quad (17)$$

for $x \to a$.

Bevis. At $f^{(n+1)}$ er begrænset i I betyder, at der findes et tal C_1 så $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le C_1$ for alle $x \in I$. Ifølge (9) i Korollar (12) gælder derfor, at

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!}C_1 \left|(x-a)^{n+1}\right| = C\left|(x-a)^{n+1}\right|$$

hvor $C = \frac{1}{(n+1)!}C_1$ og hvor P_n er det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt a. ■

Bemærkning 28 *I forhold til (6) indeholder (17) betydeligt mindre information om restleddet. Men ved grænseværdibestemmelse er informationen i (17) tilstrækkelig.*

Eksempel 29 *Grænseværdien*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{1 - \cos x}$$

ønskes bestemt. Vi har åbenbart et "$\frac{0}{0}$*-problem. Vi kunne bruge l'Hospitals regel, men vil i stedet bruge Taylors sætning på O-form.*
Vi har allerede fundet Taylorpolynomier for $\sin x, \cos x$ *og* $\ln(1+x)$. *Vi har nu*

$$\begin{aligned}\sin x &= x + O\left(x^3\right)\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right)\\ \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)\end{aligned}$$

for $x \to 0$. *Derfor har vi*

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x) - \sin x}{1 - \cos x} &= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right) - \left(x + O\left(x^3\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right)\right)}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right)} = \frac{-\frac{1}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O\left(x^2\right)} \to -1\end{aligned}$$

Bemærk, at de to $O\left(x^3\right)$*-bidrag i tælleren ikke går ud med hinanden, og at der ikke er nogen forskel på at skrive* $O\left(x^4\right)$ *og* $-O\left(x^4\right)$.

1.3 Bestemmelse af lokalt ekstremum

Sætning 30 *Lad f være defineret i intervallet I og lad a være et indre punkt i I. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder*

1. *Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt for f.*
2. *Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.*
3. *Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.*
4. *Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) = 0$, så gælder, at hvis $f^{(4)}(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis $f^{(4)}(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt f.*
5. *Generelt gælder: Antag, at $f^{(k)}(a) = 0$ for $k = 1, 2, \ldots, n-1$ og $f^{(n)}(a) \neq 0$. Hvis n er ulige, har f ikke lokalt ekstremum i a. Hvis n er lige har f egentligt lokalt minimum i a, hvis $f^{(n)}(a) > 0$, og egentligt lokalt maksimum i a, hvis $f^{(n)}(a) < 0$.*

Bevis. Det er åbenbart nok at bevise det generelle tilfælde. Ifølge Taylors formel med Lagranges restled (6) har vi for et tal ξ mellem x og a

$$\begin{aligned}f(x) - f(a) &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots\\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n\\ &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n\end{aligned}$$

Da $f^{(n)}(a) \neq 0$ og da $f^{(n)}$ er kontinuert i a, er $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ og af samme fortegn som $f^{(n)}(a)$, når blot x (og dermed ξ) er tæt nok på a. Fortegnet for $f(x) - f(a)$ er altså det samme som fortegnet for $f^{(n)}(a)(x-a)^n$. Heraf aflæses resultatet umiddelbart. ■

Eksempel 31 *Lad* $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$. *Vi ser, at* $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, *mens* $f^{(4)}(0) = 1$. *Altså har* f *egentligt minimum i 0.*

Eksempel 32 *Lad* $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^5$. *Vi ser, at* $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, *mens* $f^{(5)}(0) = 120$. *Altså har* f *ikke ekstremum i 0.*

2 Taylorrækker

Lad f være vilkårligt ofte differentiabel i et interval omkring punktet a. Det n'te Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt a for f er som set ovenfor givet ved

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

og ifølge Taylors sætning med Lagranges restled har vi, at der til ethvert givet x findes et tal ξ mellem x og a, så

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Her er $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ *restleddet* i Taylors sætning. Hvis nu det viser sig, at $R_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$, så har vi altså, at $P_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$. Hvis dette er tilfældet, vil vi skrive

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^n$$

En sådan sum bestående af uendeligt mange led vil vi kalde en uendelig række (engelsk: *infinite series*).

Eksempel 33 *Udtrykket*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots$$

er en uendelig række. Der gælder for ethvert $n \geq 0$, *at*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Altså ser vi, at

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \to 2$$

for $n \to \infty$. *Vi skriver derfor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

Eksempel 34 *Det n'te Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt 0 for eksponentialfunktionen* exp *blev ovenfor fundet til*

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Vi vil vise, at

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Af Taylors sætning med Lagranges restled får vi, da den $(n+1)$'te afledede af exp *er* exp *selv, at*

$$e^x - P_n(x) = R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1}$$

hvor ξ ligger mellem x og 0. Bemærk, at ξ vil afhænge af både x og n. Hermed har vi, da $\xi \leq |x|$, at

$$|e^x - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} |x|^{n+1}$$

Vi vil i et lemma nedenfor vise, at

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

for $n \to \infty$. Når det er vist, har vi vist, at $e^x - P_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ og dermed, at $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Lemma 35 *For ethvert positivt tal a gælder, at $\frac{a^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$.*

Bevis. Vælg til det givne a et positivt helt tal m, så $a \leq \frac{1}{2}m$. Sæt $b_n = \frac{a^n}{n!}$. For $n \geq m$ har vi

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a}{n+1} \leq \frac{\frac{1}{2}m}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Ved gentagne brug af denne ulighed fås for alle $p \geq 1$

$$b_{m+p} \leq \frac{1}{2} b_{m+p-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 b_{m+p-2} \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p b_m = 2^{-p} b_m$$

Men af $0 \leq b_{m+p} \leq 2^{-p} b_m$ følger, at $b_{m+p} \to 0$ for $p \to \infty$, hvormed vi også har vist, at $b_n \to 0$ for $n \to \infty$. ■

Bemærkning 36 *På ganske tilsvarende måde kan vises, at $\sin x$ og $\cos x$ er lig med deres Taylorrækker for alle $x \in R$, således at*

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Desuden gælder (se (10) og (11)), at

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{18}$$

men kun for $x \in]-1,1]$. *Det er ikke overraskende, at vi behøver* $x > -1$, *eftersom* $\ln(1+x) \to -\infty$ *for* $x \downarrow -1$. *Grunden til restriktionen* $x \leq 1$ *er, at den uendelige række på højre side er divergent for* $x > 1$, *dvs. at*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

ikke har nogen grænseværdi for $n \to \infty$. *Umiddelbart kan rækken (18) altså kun benyttes til bestemmelse af værdier for* $\ln a$, *når* $a \in]0,2]$. *Da imidlertid logaritmefunktionen opfylder den fundamentale regel* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ *kan rækken (18) alligevel benyttes til bestemmelse af alle værdier for logaritmen. For ethvert givet* $a > 1$ *kan vi nemlig vælge et helt tal* $p \geq 1$, *så* $2^{p-1} < a \leq 2^p$ *og udnytte, at*

$$\ln a = \ln\left(2^p \cdot \left(2^{-p}a\right)\right) = p \ln 2 + \ln\left(2^{-p}a\right)$$

Her gælder nu, at $\frac{1}{2} < 2^{-p}a \leq 1$, *således at* $-\frac{1}{2} < 2^{-p}a - 1 \leq 0$ *og* $\ln(2^{-p}a) = \ln(1 + (2^{-p}a - 1))$ *kan derfor findes ved brug af den uendelige række.*

3 Generelle rækkeudviklinger for funktioner

En Taylorrække for en funktion er en uendelig sum af led af formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Denne rækkes *afsnit*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \ldots + a_n (x-a)^n$$

er polynomier. Når det ikke kan lade sig gøre at skrive en given funktion som en sådan Taylorrække, kan man evt. lede efter en rækkeudvikling, i hvilken forekommer led af andre typer end $a_k (x-a)^k$. F.eks. blot ved også at tillade negative eksponenter, altså negative værdier af k. Sådanne rækker kaldes Laurentrækker.

3.1 Laurentrækker

Eksempel 37 *Funktionen* f *defineret ved* $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ *for* $x \neq 0$ *har selvfølgelig ikke nogen Taylorudvikling udfra* 0, *idet funktionen ikke kan defineres i* 0 *uden at den bliver diskontinuert. Funktionen har en singularitet i* 0. *Imidlertid har vi, at funktionen* g *givet ved*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & for \quad x \neq 0 \\ 0 & for \quad x = 0 \end{cases}$$

er vilkårligt ofte differentiabel, og man kan vise, at $g(x)$ *er lig med sin Taylorrække udfra* 0 *for* $|x| < \pi$. *De første led i Taylorudviklingen for* g *er*

$$\frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \frac{73}{3421440}x^9 + \ldots$$

Hermed har vi følgende rækkeudvikling for $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ *(der iøvrigt kaldes cosecans af* x *og betegnes med* $\csc x$*):*

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \frac{73}{3421440}x^9 + \ldots$$

gældende for $0 < |x| < \pi$.

Eksempel 38 *Der gælder, at* $\arctan x$ *er lig med sin Taylorrække for* $-1 < x \leq 1$:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

For $x > 0$ *har vi, at*

$$\arctan x + \arctan\left(x^{-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Når $x \geq 1$, *gælder at* $0 < x^{-1} \leq 1$, *så vi har*

$$\begin{aligned} \arctan x &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(x^{-1}\right)^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-2k-1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} - \frac{x^{-5}}{5} + \frac{x^{-7}}{7} + \dots \end{aligned}$$

3.2 Fourierrækker

For en periodisk funktion f kan det undertiden være nyttigt at have den omskrevet til en sum af sinus- og cosinus-funktioner. Der gælder herom følgende sætning.

Sætning 39 *Lad* f *være en stykkevis kontinuert og stykkevis differentiabel periodisk funktion med periode* 2π. *Så gælder, hvis* f *er kontinuert i* x, *at*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

hvor koefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

I et punkt a, *i hvilket* f *har en diskontinuitet, gælder i stedet, at rækkens sum er*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \uparrow a} f(x) + \lim_{x \downarrow a} f(x)\right)$$

Eksempel 40 *Den periodiske funktion* f *med periode* 2π, *der på intervallet* $]-\pi, \pi]$ *er givet ved* $f(x) = x(\pi - x)$, *har følgende Fourierrække*

$$-\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx + \frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Funktionsværdien $f(x)$ *er lig med Fourierrækkens værdi for* $x \neq (2k+1)\pi, k \in Z$.