Komplekse tal

Preben Alsholm

Juli 2006

1 Talmængder og regneregler for tal

1.1 Talmængder

Indenfor matematikken optræder der forskellige klasser af tal:

Naturlige tal. N er mængden af naturlige tal, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Hele tal. Z er mængden af hele tal $\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Z er en udvidelse af N.

Rationale tal. Q er mængden af rationale tal, d.v.s. brøker og hele tal. Q er en udvidelse af Z.

Reelle tal. R er mængden af reelle tal, der sædvanligvis identificeres med mængden af punkter på en tallinie. R er en udvidelse af Q. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.

Komplekse tal. C er mængden af komplekse tal, hvorom dette skal handle. C er en udvidelse af R. De komplekse tal, der ikke er reelle, kaldes *imaginære*.

Begyndende med de naturlige tal kan vi sige, at hver klasse af tal er opnået ved udvidelse af den foregående klasse:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

1.2 Regneregler

Vi nævner her de egenskaber, som de *reelle* tal har. Disse består af regnereglerne (1)-(9) og egenskaben (10):

$$\begin{aligned}
a+b &= b+a \quad \text{(den kommutative lov for addition)} && (1)\\
(a+b)+c &= a+(b+c) \quad \text{(den associative lov for addition)} && (2)\\
ab &= ba \quad \text{(den kommutative lov for multiplikation)} && (3)\\
(ab)\,c &= a\,(bc) \quad \text{(den associative lov for multiplikation)} && (4)\\
a\,(b+c) &= ab+ac \quad \text{(den distributive lov)} && (5)\\
a+0 &= a && (6)\\
1a &= a && (7)\\
a+x &= 0 \quad \text{har præcis én løsning for } x && (8)\\
ax &= 1 \quad \text{har præcis én løsning for } x, \quad \text{når } a \neq 0 && (9)\\
& \text{Enhver Cauchy-følge har en grænseværdi} && (10)
\end{aligned}$$

Ved en *Cauchy-følge*[1] forstås en uendelig følge af tal $(x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ med den egenskab, at $x_n - x_m \to 0$ for $n, m \to \infty$. At enhver Cauchy-følge har en grænseværdi betyder, at man af $x_n - x_m \to 0$ for $n, m \to \infty$ kan slutte, at der findes et tal x, så $x_n \to x$ for $n \to \infty$. Det er denne ønskværdige egenskab, der gjorde det nødvendigt at udvide de rationale tal til de reelle tal. De rationale tal besidder nemlig ikke denne egenskab. Dette viser vi i eksempel 1 nedenfor. Eksemplet kan overspringes, hvis man vil hurtigt videre.
Vi bemærker, at N har egenskaberne $(1)-(5), (7)$ og (trivielt) (10). Z har egenskaberne $(1)-(8)$ og (trivielt) (10). Q har egenskaberne $(1)-(9)$, men ikke (10). R og C har egenskaberne $(1)-(10)$. C har desuden den meget vigtige egenskab, *at ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod.*

Eksempel 1 *Vi kan konstruere en følge af rationale tal $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, der approksimerer $\sqrt{2}$ vilkårligt godt på følgende måde: Vi begynder med at konstatere, at $\sqrt{2}$ er den positive løsning til ligningen $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$. Denne ligning kan skrives på formen $x = F(x)$, når $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$. Lad $x_1 = 2$. Beregn nu successivt $x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2), x_4 = F(x_3), \ldots$. Generelt for $n \geq 1$*

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Konkret finder vi ved hjælp af Maple:

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{17}{12}, x_4 = \frac{577}{408}, x_5 = \frac{665857}{470832}, x_6 = \frac{886731088897}{627013566048}$$

Kvadraterne af disse værdier giver ved omregning til decimalbrøk og ved brug af 14 betydende cifre:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 4., \quad x_2^2 = 2.2500000000000, \quad x_3^2 = 2.0069444444444, \quad x_4^2 = 2.0000060073049, \\ x_5^2 &= 2.0000000000045, \quad x_6^2 = 2.0000000000000 \end{aligned}$$

Det ses, at allerede x_3 må være en udmærket tilnærmelse til $\sqrt{2}$, men at de følgende hurtigt bliver meget bedre. Med 14 betydende cifre er x_6^2 faktisk lig med 2. Men x_6^2 er ikke lig med 2:

$$x_6^2 = \left(\frac{886731088897}{627013566048}\right)^2 = \frac{786\,292\,024\,016\,459\,316\,676\,609}{393\,146\,012\,008\,229\,658\,338\,304}$$

Udregner vi x_6^2 med 27 betydende cifre fås

$$x_6^2 = 2.00000000000000000000000254$$

Vi må dog sige, at

$$x_6 = \frac{886731088897}{627013566048}$$

er en fortrinlig rational *approksimation til $\sqrt{2}$. Følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kan relativt let vises at være en Cauchy-følge*[2]*. Denne er altså konvergent indenfor de reelle tal R. Grænseværdien x må være positiv og opfylde ligningen $F(x) = x$, som er ækvivalent med $x^2 = 2$. Grænseværdien er altså $\sqrt{2}$.*

[1] Efter franskmanden Augustin Louis Cauchy, 1789-1857.

[2] Bevis: (1) F afbilder $[1,2]$ ind i sig selv. (2) $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$ for alle $x \in [1,2]$. (3) Ifølge middelværdisætningen findes et tal $\xi \in [1,2]$ så $x_{n+1} - x_n = F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi)(x_n - x_{n-1})$.
(4) $|x_{n+1} - x_n| = |F'(\xi)| |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|$. (5) Gentagen anvendelse af uligheden i (4) giver: $|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|$.

Der kan imidlertid ikke være noget noget rationalt tal x, så $x^2 = 2$. Antag nemlig, at den uforkortelige brøk $x = \frac{p}{q}$ opfyldte ligningen. Så ville vi have, at $p^2 = 2q^2$. Men højresiden $2q^2$ er et lige tal, det er venstresiden p^2 altså også. Med så må p selv være lige, og p^2 derfor være delelig med 4. Men det er højresiden $2q^2$ altså også. Derfor må q^2 være lige og altså q lige. Men når nu både p og q er lige, er brøken $\frac{p}{q}$ ikke uforkortelig - i modstrid med antagelsen. Vi konkluderer, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Dette eksempel viser, at det for mængden af rationale tal Q ikke gælder, at enhver Cauchy-følge har en grænseværdi.

2 Beskrivelse af de komplekse tal

Vi vil konstruere de komplekse tal. C skal være mængden af punkter i planen. Med et koordinatsystem indlagt, identificeres et punkt med et talpar, så vi kan sige, at $C = R^2$. Desuden ønsker vi selvfølgelig at indføre en addition og en multiplikation.

Definition 2 *Komplekse tal (punkter i planen) adderes som deres stedvektorer, altså hvis $a = (a_1, a_2)$ og $b = (b_1, b_2)$, så er $a + b$ givet ved*

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Komplekse tal multipliceres med et reelt tal ligesom vektorer multipliceres med en skalar, altså hvis $s \in R$ så skal sa være givet ved

$$sa = (sa_1, sa_2)$$

Lad os give navne til tre af punkterne i planen:

$$\begin{aligned} e &= (1, 0) \\ i &= (0, 1) \\ o &= (0, 0) \end{aligned}$$

Vi har nu åbenbart, at ethvert komplekst tal $a = (a_1, a_2)$ kan skrives på formen

$$a = a_1 e + a_2 i$$

Bemærkning 3 *Vi ser, at det komplekse tal $o = (0, 0)$ agerer som et nulelement, dvs. $a + o = o + a = a$ for alle $a \in C$.*

Definition 4 *Produktet af to komplekse tal $a = (a_1, a_2) = a_1 e + a_2 i$ og $b = (b_1, b_2) = b_1 e + b_2 i$ er givet ved*

$$ab = (a_1 e + a_2 i)(b_1 e + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) e + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Produktets definition ser i hvertfald i første omgang en smule mærkelig ud. Men vi har jo også ambitioner om at kunne løse en ligning som $z^2 + 1 = 0$, så vi må finde os i det.

Bemærkning 5 *Det følger af definitionen, at $i^2 = (-1) e$.*

Sætning 6 *Multiplikation med et reelt tal s er det samme som multiplikation med se, altså*

$$(se) a = sa \quad \text{for } s \in R, a \in C$$

For $s, t \in R$ gælder, at

$$\begin{aligned} se + te &= (s + t) e \\ (se)(te) &= (st) e \end{aligned}$$

Bevis. Vi viser den første. Med $a = a_1 e + a_2 i$ fås

$$(se)\,a = (se + 0i)\,(a_1 e + a_2 i) = (sa_1 - 0a_2)\,e + (sa_2 + 0a_1)\,i = sa_1 e + sa_2 i = s\,(a_1 e + a_2 i) = sa$$

Den sidste påstand følger af den første således

$$(se)\,(te) = s\,(te) = s\,(t, 0) = (st, 0) = (st)\,e$$

■

Lad $\mathcal{R}$ være den delmængde af de komplekse tal, der ligger på førsteaksen, altså $\mathcal{R} = \{(x, 0)\,|x \in R\} = \{xe\,|x \in R\}$. Både nulelementet o og ét-elementet e tilhører mængden $\mathcal{R}$. Desuden viser sætning 6, at tallene i $\mathcal{R}$ opfører sig som reelle tal, vi slæber bare rundt på et (synes det) overflødigt bogstav e. Vi kan derfor med god ret sige, at $\mathcal{R}$ er en kopi af de reelle tal. Da nu multiplikation med en skalar s og multiplikation med se giver samme resultat, kan vi i fremtiden dermed også totalt undlade at skrive e'erne, således at det komplekse tal $a = a_1 e + a_2 i$ nu vil blive skrevet

$$a = a_1 + a_2 i$$

eller ofte med foranstillet i:

$$a = a_1 + i a_2$$

med andre ord: vi erstatter e med et et-tal. I overensstemmelse med skrivemåden $a = a_1 + a_2 i$ vil vi i fremtiden skrive 0 i stedet for o.

Bemærkning 7 *Tidligere fandt vi, at $i^2 = (-1)\,e$. Dette vil nu blive skrevet som $i^2 = -1$. Vi har hermed fundet en løsning til ligningen $z^2 + 1 = 0$, nemlig $z = i$. En anden er $z = -i$.*

Sætning 8 *Regnereglerne for de reelle tal gælder også for de komplekse tal. For alle $a, b, c \in C$ gælder altså*

$$\begin{aligned}
a + b &= b + a \quad \textit{(den kommutative lov for addition)} \\
(a + b) + c &= a + (b + c) \quad \textit{(den associative lov for addition)} \\
ab &= ba \quad \textit{(den kommutative lov for multiplikation)} \\
(ab)\,c &= a\,(bc) \quad \textit{(den associative lov for multiplikation)} \\
a\,(b + c) &= ab + ac \quad \textit{(den distributive lov)} \\
a + 0 &= a \quad \textit{(0 fungerer som nul-element)} \\
1a &= a \quad \textit{(1 eller e fungerer som ét-element)} \\
a + z &= 0 \quad \textit{har præcis én løsning for } z \\
az &= 1 \quad \textit{har præcis én løsning for } z, \quad \textit{når } a \neq 0 \\
& \textit{Enhver Cauchy-følge har en grænseværdi}
\end{aligned}$$

Bevis. De første tre er simple og behøver ingen omtale. Den associative lov for multiplikationen følger ved simpel beregning af begge sider. Først $(ab)\,c$:

$$\begin{aligned}
(ab)\,c &= [(a_1 + a_2 i)\,(b_1 + b_2 i)] \cdot (c_1 + c_2 i) \\
&= [(a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i] \cdot (c_1 + c_2 i) \\
&= [(a_1 b_1 - a_2 b_2)\,c_1 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,c_2] + [(a_1 b_1 - a_2 b_2)\,c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,c_1]\,i \\
&= [a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1] + [a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2]\,i
\end{aligned}$$

Dernæst $a\,(bc)$:

$$\begin{aligned} a\,(bc) &= (a_1 + a_2 i) \cdot [(b_1 + b_2 i)\,(c_1 + c_2 i)] \\ &= (a_1 + a_2 i) \cdot [(b_1 c_1 - b_2 c_2) + (b_1 c_2 + b_2 c_1)\,i] \\ &= [a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1] + [a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2]\,i \end{aligned}$$

Den distributive lov bevises også ved simpel udregning. Først $a\,(b+c)$:

$$\begin{aligned} a\,(b+c) &= (a_1 + a_2 i) \cdot [(b_1 + b_2 i) + (c_1 + c_2 i)] \\ &= (a_1 + a_2 i) \cdot [(b_1 + c_1) + (b_2 + c_2)\,i] \\ &= [a_1\,(b_1 + c_1) - a_2\,(b_2 + c_2)] + [a_1\,(b_2 + c_2) + a_2\,(b_1 + c_1)]\,i \\ &= [a_1 b_1 + a_1 c_1 - a_2 b_2 - a_2 c_2] + [a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 c_2 + a_2 c_1]\,i \end{aligned}$$

Dernæst $ab + ac$:

$$\begin{aligned} ab + ac &= (a_1 + a_2 i)\,(b_1 + b_2 i) + (a_1 + a_2 i)\,(c_1 + c_2 i) \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i + (a_1 c_1 - a_2 c_2) + (a_1 c_2 + a_2 c_1)\,i \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_1 c_1 - a_2 c_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 c_2 + a_2 c_1)\,i \end{aligned}$$

At det komplekse tal e (som vi nu skriver som et almindeligt ettal) fungerer som ét-element følger af at multiplikation med en skalar s er det samme som multiplikation med se, som vi har set i sætning 6.
At ligningen $a + z = 0$ har en løsning (og præcis én) er klart ud fra definitionen af addition som addition af stedvektorer. Når $a = a_1 + a_2 i$, så er løsningen åbenbart $z = (-a_1) + (-a_2)\,i = (-1) \cdot a$, der vil blive betegnet med $-a$.
At ligningen $az = 1$ har en og præcis én løsning, når $a \neq 0$, følger af følgende regning. Sæt $z = z_1 + z_2 i$ og $a = a_1 + a_2 i$, og $\overline{a} = a_1 - a_2 i$ (den *kompleks konjugerede* af a). Bemærk først, at da vi allerede har vist den distributive lov, og da $i^2 = -1$, har vi

$$\overline{a}a = (a_1 - a_2 i)\,(a_1 + a_2 i) = a_1^2 - (i a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Dvs. at $\overline{a}a$ er et reelt og positivt tal. Vi har nu:

$$az = 1 \Rightarrow \overline{a} \cdot (az) = \overline{a} \Rightarrow (\overline{a}a) \cdot z = \overline{a}$$

Heraf følger nu ved multiplikation med det relle tal $\frac{1}{\overline{a}a}$ at

$$z = \frac{1}{\overline{a}a}\overline{a}$$

Hvis ligningen $az = 1$ altså overhovedet har en løsning, så er den nødvendigvis givet ved dette udtryk. At dette også løser ligningen ses ved indsættelse i ligningen:

$$az = za = \left(\frac{1}{\overline{a}a}\overline{a}\right) a = \frac{1}{\overline{a}a}\,(\overline{a}a) = 1$$

Vi har her benyttet både den kommutative og den associative regel, som vi jo allerede *har* vist.

Egenskaben, at enhver Cauchy-følge af komplekse tal er konvergent, arves umiddelbart fra de reelle tal. Er nemlig $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + i y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge, så følger at de reelle talfølger $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ begge er Cauchy-følger og derfor konvergente. Derfor er også $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent. ■

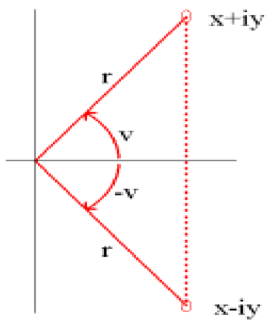
Bemærkning 9 *Løsningen til* $az = 1$ *(med* $a \neq 0$*) betegnes med* a^{-1}*. Ligningen* $az = b$ *(med* $a \neq 0$*) har nu åbenbart netop én løsning, nemlig* $z = a^{-1}b$*. Dette vil også blive skrevet som* $\frac{b}{a}$*. Herved er divisionen defineret.*

Nu gælder altså alle de sædvanlige regneregler, som vi kender fra de reelle tal. Regning med komplekse tal er derfor let: Regn som altid, men husk, at $i^2 = -1$.

Definition 10 *Lad* $a = a_1 + a_2 i$*, hvor* $a_1, a_2 \in R$*. Tallet* a_1 *kaldes realdelen af* a*, med symboler:* $a_1 = \mathrm{Re}\, a$*. Tallet* a_2 *kaldes imaginærdelen af* a*, med symboler:* $a_2 = \mathrm{Im}\, a$*. Den kompleks konjugerede af* a *er det komplekse tal* $a_1 - a_2 i$*, og det betegnes med* $\overline{a}$*, altså*

$$\overline{a_1 + a_2 i} = a_1 - a_2 i$$

Førsteaksen kaldes den reelle akse, andenaksen kaldes den imaginære akse. Tallet a *kaldes imaginært, hvis* $\mathrm{Im}\, a \neq 0$*. Det kaldes rent imaginært, hvis yderligere* $\mathrm{Re}\, a = 0$*, altså hvis det ligger på den imaginære akse.*



$x + iy$ og $x - iy$ er hinandens kompleks konjugerede

Eksempel 11 *Addition.* $(2 + 3i) + (-4 + 7i) = (2 + (-4)) + (3i + 7i) = -2 + 10i$.
Multiplikation. $(2 + 3i)(-4 + 7i) = 2(-4) + 3i \cdot 7i + 2 \cdot 7i + 3i(-4) = -8 - 21 + 14i - 12i = -29 + 2i$.
Division. Her bruges et simpelt trick, som også blev brugt i beviset for eksistensen af a^{-1}*, når* $a \neq 0$*. Vi forlænger med den kompleks konjugerede af nævneren:*

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-4+7i} &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4+7i)(-4-7i)} = \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4)^2 - (7i)^2} \\ &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{16+49} = \frac{13-26i}{65} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

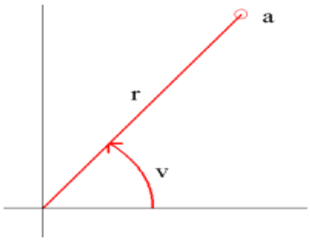
Sætning 12 *Lad* a *og* b *være komplekse tal. Så gælder*

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(a+b) &= \mathrm{Re}\, a + \mathrm{Re}\, b \\ \mathrm{Im}\,(a+b) &= \mathrm{Im}\, a + \mathrm{Im}\, b \\ \overline{a+b} &= \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{(ab)} &= \overline{a}\overline{b}\end{aligned}$$

Bevis. De tre første påstande er meget lette at vise. Det sker blot ved udregning af begge sider. Det samme gælder den sidste, som vi viser nu. Lad $a = a_1 + ia_2$ og $b = b_1 + ib_2$. Så fås

$$\begin{aligned}\overline{(ab)} &= \overline{(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)} = \overline{a_1 b_1 - a_2 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} \\ &= a_1 b_1 - a_2 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \overline{a}\overline{b} &= \overline{(a_1 + ia_2)} \cdot \overline{(b_1 + ib_2)} = (a_1 - ia_2)(b_1 - ib_2) = a_1 b_1 - a_2 b_2 - i(a_1 b_2 + ia_2 b_1)\end{aligned}$$

Vi konkluderer, at $\overline{(ab)} = \overline{a}\overline{b}$.



Polære koordinater r og v for punktet a

■

Definition 13 ***(Polære koordinater)*** *Modulus for et kompleks tal a er punktets afstand fra 0 (som begyndelsespunktet jo nu hedder). Betegnelse $|a|$. Vinklen fra den reelle akses positive del til linien fra 0 til a kaldes argumentet for a, betegnelse:* $\arg(a)$*. Dette regnes med fortegn. Argumentet er dog mangetydigt. Hvis v er et argument for a, så er også $v + p2\pi$, $p \in Z$, et argument for a. Med hovedargumentet, Arg (a), menes det argument, der ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$.*

Bemærkning 14 *Andre navne for modulus $|a|$ er numerisk værdi og absolutværdi.*

Bemærkning 15 *Hvis tallet (punktet) a har modulus r og argument v, så ligger det jo på en cirkel med radius r (og med centrum i 0), og tallet (punktet) ligger i retningen givet ved vinklen v, så vi har åbenbart følgende formel*

$$a = r \cdot (\cos v + i \sin v)$$

Hermed er tallet a skrevet på polær form*. Vi vil lidt senere ændre skrivemåden, når den komplekse eksponentialfunktion er blevet indført, så vil den polære form for a få udseendet re^{iv}.*

Sætning 16 *Lad $a, b \in C$. Så gælder, at absolutværdien af produktet ab er produktet af absolutværdierne for a og b:*

$$|ab| = |a|\,|b|$$

og ét af argumenterne for ab er summen af et argument for a og et argument for b:

$$\arg(ab) = \arg a + \arg b$$

Som en konsekvens gælder for alle $n \in N$, at

$$\begin{aligned} |a^n| &= |a|^n \\ \arg(a^n) &= n \arg a \end{aligned}$$

Yderligere gælder

$$\begin{aligned} |\overline{a}| &= |a| \\ \arg \overline{a} &= -\arg a \end{aligned}$$

hvor sidste udsagn skal forstås således, at ét af argumenterne for $\arg \overline{a}$ *er* $-\arg a$*.*

Bevis. Ved beviset får vi brug for de trigonometriske additionsformler

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \end{aligned}$$

Med $u = \arg a$ og $v = \arg b$ har vi nu:

$$\begin{aligned} ab &= |a|(\cos u + i \sin u) \cdot |b|(\cos v + i \sin v) \\ &= |a||b|(\cos u \cos v - \sin u \sin v + i(\cos u \sin v + \sin u \cos v)) \\ &= (|a||b|)(\cos(u+v) + i \sin(u+v)) \end{aligned}$$

Det sidste tal har åbenbart modulus $|a||b|$ og argument $u+v$.
Udsagnene om $\overline{a}$ fås enten ved en geometrisk betragtning eller således (hvor igen $\arg a = u$):

$$\overline{a} = \overline{|a|(\cos u + i \sin u)} = |a|(\cos u - i \sin u) = |a|(\cos(-u) + i \sin(-u))$$

Tallet på højre side har åbenbart modulus $|a|$ og argument $-u$. ■

Bemærkning 17 *De trigonometriske additionsformler kan bevises således: Afstanden mellem de to punkter på enhedscirklen med argumenter u og v (altså $\cos u + i \sin u$ og $\cos v + i \sin v$) kan kun afhænge af forskellen $u-v$, og må derfor være den samme som afstanden mellem punkterne $\cos(u-v) + i \sin(u-v)$ og 1. Derfor har vi*

$$|\cos u + i \sin u - (\cos v + i \sin v)| = |\cos(u-v) + i \sin(u-v) - 1|$$

Ved kvadrering fås, at dette er ensbetydende med

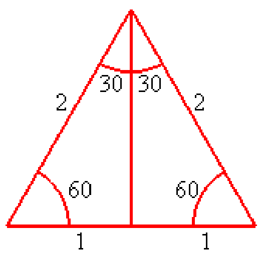
$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = (\cos(u-v) - 1)^2 + (\sin(u-v))^2$$

Heraf fås efter reduktion

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

Da denne relation gælder for alle $u, v \in R$, følger begge de ovenfor brugte formler. Øvelse*: Forklar hvordan!*

Eksempel 18 *Lad $a = 1 + i\sqrt{3}$ og $b = -3$. Vi vil finde produktet ab ved regning i polære koordinater. Vi finder modulus af a til $|a| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Et argument findes allerbedst ved at indtegne punktet a i den komplekse plan og så udnytte ens kendskab til trekantsberegning. Se figuren.*



To 30-60-trekanter udgør en ligesidet trekant

Vi finder $\arg a = \frac{\pi}{3}$. *For* b *findes* $|b| = 3$ *og* $\arg(b) = \pi$. *Altså fås* $|ab| = |a|\,|b| = 2 \cdot 3 = 6$ *og* $\arg(ab) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$ *således at*

$$ab = 6\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -3 - i \cdot 3\sqrt{3}$$

Af de polære koordinater ses, at ab *ligger i en afstand på* 6 *fra* 0 *og i retningen givet ved vinklen* $\frac{4\pi}{3}$.

Eksempel 19 *Vi vil finde* i^2. *Vi ved allerede, at det er* -1. *Men vi vil nu regne polært. Vi har* $|i| = 1$ *og* $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$. *Derfor har vi* $\left|i^2\right| = |i|^2 = 1$ *og* $\arg\left(i^2\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ *således at*

$$i^2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Bemærkning 20 *Indenfor de reelle tal findes (som bekendt) en ordning* $<$ *, der opfylder følgende krav: For hver to forskellige tal* a, b *gælder enten* $a < b$ *eller* $b < a$ *(ikke begge). Desuden gælder for alle* a, b, c*:*

$$\begin{aligned} a &< b \wedge b < c \Longrightarrow a < c \\ a &< b \Longrightarrow a + c < b + c \\ a &< b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc \end{aligned}$$

Her betyder $c > 0$ *selvfølgelig* $0 < c$. *En sådan ordning kan ikke indføres indenfor de komplekse tal. Antag nemlig en sådan ordning eksisterede. Så ville enten* $0 < i$ *eller* $i < 0$. *Hvis* $0 < i$*, så er ifølge sidste krav ovenfor også* $0 < i^2$ *(tag* $a = 0$ *og* $b = c = i$*). Da* $i^2 = -1$*, har vi hermed, at* $0 < -1$. *Dette ville ved samme regel medføre, at* $0 < (-1)^2 = 1$. *Men af midterste regel og* $0 < -1$ *følger ved addition af* 1*, at* $1 < 0$. *Vi har nu både* $0 < 1$ *og* $1 < 0$*, i modstrid med kravet om, at kun én af disse må gælde. Tilfældet* $i < 0$ *fører også til en modstrid, idet vi først af midterste krav får, at* $i + (-i) < 0 + (-i)$ *altså* $0 < -i$. *Herefter fås af sidste krav* $0 < (-i)^2 = -1$*, hvorefter vi kan fortsætte som før.*

Bemærkning 21 *Vi har udvidet de reelle tal repræsenteret ved tallinien til de komplekse tal repræsenteret ved planen. Det er da naturligt at spørge, om en yderligere udvidelse til det tredimensionale rum er mulig. Svaret er nej, og heller ikke engang hvis vi tillader, at multiplikationen ikke er kommutativ. Antag nemlig, at* k *var et tal, der ikke lå i* C. *Vi kan tænke os* C *som* $\{(x, y, 0)\,|x, y \in R\}$. *Lad som sædvanlig* i *betegne den imaginære enhed. Så ville produktet* ik *kunne skrives på formen*

$$ik = \alpha + \beta i + \gamma k$$

hvor α, β *og* $\gamma \in R$. *Ved multiplikation med* i *fra venstre fås*

$$-k = \alpha i - \beta + \gamma ik = \alpha i - \beta + \gamma(\alpha + \beta i + \gamma k)$$

hvoraf fås

$$\left(1 + \gamma^2\right)k = \beta - \gamma\alpha - (\alpha + \gamma\beta)\,i$$

hvilket strider mod at $k \notin C$.
Derimod er en udvidelse til et firedimensionalt rum mulig, men kun hvis vi tillader, at multiplikationen ikke er kommutativ. Herved opnås de såkaldte kvaternioner. Yderligere udvidelser er ikke mulige.[3]

[3]Se Svend Bundgaard, Tallene og den abstrakte algebras grundbegreber. 1942, pp. 158-163.

3 Den komplekse eksponentialfunktion

Vi erindrer først om den sædvanlige og velkendte reelle eksponentialfunktion. Vi skal undertiden finde det nyttigt, at kalde den exp. Selvfølgelig har vi

$$\exp x = e^x$$

men skrivemåden $\exp x$ har den fordel, at tankerne ledes i retning af funktionsbegrebet: $\exp x$ er eksponentialfunktionen exp anvendt på x, ganske svarende til, at $\sin x$ er sinusfunktionen anvendt på x. Skrivemåden e^x har også fordele, idet det bliver let at huske den fundamentale regel, at $e^{x+y} = e^x e^y$, der jo blot er en af potensreglerne. Vi tænker her på e^x som tallet e opløftet til tallet x. Reglen $e^{x+y} = e^x e^y$ ser således ud, når vi benytter funktionsskrivemåde

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$$

I denne form minder den jo også mere om logaritmereglen

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

hvor gangetegn og additionstegn er byttet om sammenlignet med exp-reglen.

Vi vil nu udvide eksponentialfunktionens definitionsområde fra R til C. Herunder vil den fundamentale exp-regel blive bevaret.

Definition 22 *For $x, y \in R$ sættes*

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

hvor $\exp x$ på højre side er den sædvanlige reelle eksponentialfunktion anvendt på x. Anderledes skrevet:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Tallet e^{x+iy} har altså modulus e^x og argument y:

$$\begin{aligned} \left|e^{x+iy}\right| &= e^x \\ \arg\left(e^{x+iy}\right) &= y \end{aligned}$$

Bemærkning 23 *Da vi ikke tidligere har lavet definitioner af, hvad eksponentialfunktionen skulle gøre ved imaginære tal, kan man med en vis ret sige, at vi kan definere, hvad vi vil. Vi må dog kontrollere, om der skulle være mulige konflikter med definitionen i det reelle tilfælde. Vi ønsker jo kun en udvidelse af definitionsområdet, ikke en omdefinition. Sætter vi $y = 0$, bliver tallet $x + iy$ reelt, og $\exp(x + iy)$ bør derfor blot være den sædvanlige eksponentialfunktion anvendt på x. Med $y = 0$ på højre side fås $\exp x \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = \exp x \cdot (1 + 0) = \exp x$. Der er altså ingen konflikt med tidligere definitioner.*

Man kan med rette spørge, hvorfor den udvidede funktion exp fortjener at blive kaldt en eksponentialfunktion. Svaret er, at den fundamentale exp-regel stadig gælder:

Sætning 24 *For alle $z_1, z_2 \in C$ gælder*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Bevis. Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, hvor $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$, så har vi:

$$\begin{aligned}
\left|e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right| &= \left|e^{z_1}\right| \cdot \left|e^{z_2}\right| = \left|e^{x_1+iy_1}\right| \cdot \left|e^{x_2+iy_2}\right| = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\
&= e^{x_1+x_2} = \left|e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right| = \left|e^{z_1+z_2}\right| \\
\arg\left(e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right) &= \arg\left(e^{z_1}\right) + \arg\left(e^{z_2}\right) = \arg\left(e^{x_1+iy_1}\right) + \arg\left(e^{x_2+iy_2}\right) \\
&= y_1 + y_2 = \arg\left(e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right) = \arg\left(e^{z_1+z_2}\right)
\end{aligned}$$

Tallene $e^{z_1+z_2}$ og $e^{z_1}e^{z_2}$ har altså samme modulus og samme argument. De er derfor ens. ■

Bemærkning 25 *Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev tidligere skrevet $a = r(\cos v + i \sin v)$. Den vil i fremtiden blive skrevet således:*

$$a = r\exp(iv) = re^{iv}$$

Eksempel 26 *Den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$ er $2\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right)$, idet modulus er $\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. (For at indse dette, kan man indtegne tallet i den komplekse plan og ræsonnere på en passende trekant, en 30-60-trekant.)*

Sætning 27 *Moivre's formel. For $n \in N$ og $x \in R$ gælder*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Bevis. Vi har $(\cos x + i \sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$. ■

Formlen skyldes franskmanden Abraham de Moivre (1667-1754).

Eksempel 28 *Lad $x \in R$. Vi vil finde en formel, der udtrykker $\cos 3x$ ved $\cos x$ (og $\sin x$ om nødvendigt). Vi udnytter Moivres formel og finder*

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \mathrm{Re}\left(\cos 3x + i \sin 3x\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

3.1 Den komplekse logaritmefunktion

Når nu den reelle eksponentialfunktion har en omvendt funktion, nemlig logaritmefunktionen, hvad så med den komplekse eksponentialfunktion, har den en omvendt, og er denne en slags kompleks logaritmefunktion?

Svaret er, at den komplekse eksponentialfunktion ikke har en omvendt funktion, men at der alligevel er noget, der kaldes en kompleks logaritmefunktion. Den komplekse eksponentialfunktion har ingen omvendt funktion, da den ikke er injektiv, dvs. ikke en-entydig, Vi har jo for alle $z \in C$ og $p \in Z$, at

$$\exp(z + ip2\pi) = \exp z \cdot \exp(ip2\pi) = \exp z \cdot (\cos(p2\pi) + i \sin(p2\pi)) = \exp z$$

Dvs. at for ethvert komplekst tal z er der uendeligt mange andre, der har samme exp-værdi som z. Ikke desto mindre defineres en kompleks logaritme som følger:

Definition 29 *Lad* $z \in C$. *Et tal* $w \in C$, *der opfylder* $\exp w = z$, *kaldes en logaritme til* z, *og betegnes med* $\ln z$.

Sætning 30 *Lad* $z \in C$ *og antag, at* $z \neq 0$. *Så har* z *følgende logaritmer*

$$\ln z = \ln |z| + i\left(\arg z + p2\pi\right) = \ln |z| + i \arg z + ip2\pi$$

hvor $p \in Z$, *og* $\arg z$ *er et vilkårligt argument for* z, *og hvor den logaritme, der optræder på højre side (* $\ln |z|$ *), er den reelle velkendte logaritme af et positivt tal. Bemærk, at to forskellige logaritmer afviger fra hinanden med et helt multiplum af* $2\pi i$. *Tallet* 0 *har ingen logaritme.*

Bevis. Vi skal løse ligningen $\exp w = z$ for w. Vi sætter $w = w_1 + iw_2$og $z = re^{iv}$, hvor $r > 0$ og $v \in R$. Så har vi altså

$$e^{w_1}e^{iw_2} = e^{w_1+iw_2} = \exp\left(w_1 + iw_2\right) = \exp w = z = re^{iv}$$

Yderste højre og yderste venstre side er begge polære former for samme tal, så vi har

$$e^{w_1} = r, \quad w_2 = v + p2\pi, \quad p \in Z$$

men hermed har vi, at w_1 er den sædvanlige reelle logaritme af det positive tal r, altså $w_1 = \ln r = \ln |z|$, således at $w = w_1 + iw_2 = \ln |z| + i\left(v + p2\pi\right) = \ln |z| + i\left(\arg z + p2\pi\right)$.

At tallet 0 ikke har nogen logaritme, følger af ovenstående regninger, idet vi nu har $r = 0$, således at vi nu skal løse ligningen $e^{w_1} = r = 0$ for det reelle tal w_1. Men for reelle tal w_1 er $e^{w_1} > 0$. ■

Eksempel 31 *Vi vil finde samtlige logaritmer til tallet* $a = \sqrt{3} - i$. *Da* $|a| = 2$ *og* $\arg a = -\frac{\pi}{6}$ *fås (med* $p \in Z$*):*

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6} + p2\pi i$$

Eksempel 32 *Samtlige logaritmer til det negative tal* -5 *er givet ved* $\ln(-5) = \ln 5 + i\pi + p2\pi i$, *hvor* $p \in Z$.

Bemærkning 33 *Hovedlogaritmen til* $z \in C\setminus\{0\}$ *defineres som den logaritme, der svarer til at man bruger hovedargumentet for* z*:*

$$Ln\left(z\right) = \ln |z| + i \cdot Arg\left(z\right)$$

Eksempel 34 *Vi har* $Ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6}$ *og* $Ln\left(-5\right) = \ln 5 + i\pi$

Bemærkning 35 *Prøver man i Maple at finde det ubestemte integral* $\int \frac{1}{x}dx$ *så får man*

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

Accepterer man kun reelle tal, må man enten forudsætte, at $x > 0$ *eller rette formlen til*

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln |x|$$

Computeralgebraprogrammer som Maple og Mathematica gør uhæmmet brug af komplekse tal og funktioner, herunder den komplekse logaritme.

4 Rødder i polynomier

4.1 Den binome ligning

Et polynomium er et udtryk med mange led (*poly* kommer af græsk og betyder mange). Et binomium er et udtryk med to led. En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a$$

hvor $n \in N$ og $a \in C$. Vi ønsker at løse denne ligning for den ubekendte z. Denne opgave kan også formuleres således: Vi ønsker at bestemme samtlige komplekse n'te rødder af a. Ved en kompleks n'te rod af a vil vi forstå et tal som opløftet til n'te giver a.

Bemærkning 36 *Det skal vise sig, at antallet af komplekse n'te rødder af et tal a altid er n, når undtages $a = 0$, der kun har én n'te rod, nemlig 0. Man bør derfor være varsom ved brugen af rodtegn til angivelse af en rod. Vær opmærksom på, at det er en strengt overholdt konvention, at hvis $a \in R_+$,så betyder $\sqrt[n]{a}$ dét positive reelle tal, der opløftet til n'te, giver a. Eksempelvis har ligningen $z^2 = 2$ to løsninger, den ene er $\sqrt{2}$, den anden er $-\sqrt{2}$. Den første af disse er positiv (og lig med ca. $1.414\,2$), den anden negativ. Men begge kan betragtes som komplekse kvadratrødder af 2.*

Sætning 37 *Rødderne i den binome ligning $z^n = a$, hvor $a = re^{iv}, r \geq 0, v \in R$, er givet ved*

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Bevis. Vi skriver også den ubekendte z på polær form $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in R$. Ved indsættelse af $z = \rho e^{i\theta}$ og $a = re^{iv}$ i ligningen $z^n = a$, fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv}$$

Ved brug af sædvanlige regneregler (der jo gælder!) fås

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

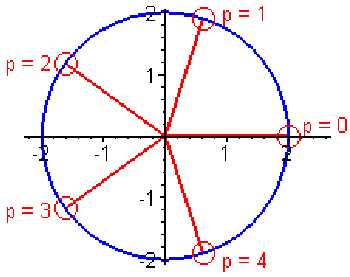
De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in Z$. Da $\rho \geq 0$ fås heraf, at $\rho = \sqrt[n]{r}$, hvor rodtegnet angiver den konventionelle positive rod af et positivt tal. Desuden finder vi, at $\theta = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}$. Bemærk, at vi kun behøver betragte $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, idet flere p-værdier blot vil give θ-værdier, der afviger fra en allerede betragtet θ-værdi med et multiplum af 2π. ■

Man bør specielt bemærke, at samtlige rødder i den binome ligning $z^n = a = re^{iv}$ har modulus $\sqrt[n]{r}$ og således i den komplekse plan ligger på en cirkel med denne radius og centrum i 0. Desuden bemærker man, at to på hinanden følgende rødder har argumenter, der afviger fra hinanden med $\frac{2\pi}{n}$. Rødderne er altså jævnt fordelt på den omtalte cirkel. Har man fundet én rod, så er de andre let placeret. Vi noterer os dette resultat:

Korollar 38 *Er z_0 en rod i ligningen $z^n = a$, så er samtlige rødder givet ved*

$$z = z_0 e^{ip\frac{2\pi}{n}}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Eksempel 39 *Vi vil løse ligningen $z^5 = 32$. Vi bemærker, at én rod kan gættes, nemlig 2 Men ligningen er jo binom, så de andre 4 rødder ligger derfor på en cirkel med radius 2 (og centrum i 0). To på hinanden følgende rødder ligger desuden på cirklen i en vinkelafstand på $\frac{2\pi}{5}$. Vi kan altså indtegne røddernes placering i den komplekse plan før vi overhovedet har fundet et udtryk for mere end én af dem.*



Rødderne i $z^5 = 32$

For at finde et udtryk for rødderne kan vi bruge korollar 38 ovenfor og finder så

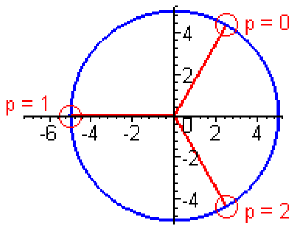
$$\begin{aligned} z &= 2e^{ip\frac{2\pi}{5}} \\ &= 2\left(\cos\left(p\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(p\frac{2\pi}{5}\right)\right) \end{aligned}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. *Idet vi nummererer rødderne efter deres p-værdier finder vi*

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \\ z_1 &= 2e^{i\frac{2\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{z_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ z_4 &= 2e^{i\frac{8\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{z_1} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Som det ses er det let at finde rødderne på polær form, hvorimod det ikke altid er let at finde eksakte værdier for den tilsvarende rektangulære form. Vi har brugt Maple i dette tilfælde.

Eksempel 40 *Find de 3 komplekse tredierødder af* -125. *Anderledes sagt: Løs den binome ligning* $z^3 = -125$. *Én løsning er åbenbart* -5, *de to andre ligger på en cirkel med radius* 5 *og centrum i* 0. *Rødderne ligger i en vinkelafstand fra hinanden på* $\frac{2\pi}{3}$. *For hurtigt at finde et udtryk for rødderne laves en figur og der ræsonneres på en passende valgt trekant (en 30-60-trekant). Man finder, at de to andre rødder er* $\frac{5}{2} \pm i\frac{5}{2}\sqrt{3}$.



Rødderne i $z^3 = -125$

Bemærkning 41 *Man bør hér bemærke, at beder man Maple om* $(-125)\hat{}(1/3)$*, så får man roden* $\frac{5}{2}+i\frac{5}{2}\sqrt{3}$*. Vil man have* -5*, skal man bede om surd(−125, 3); Selvfølgelig kan man bare bede Maple om at løse ligningen vha.* solve. *Da ligningen er polynomial, fås samtlige 3 rødder.*

Eksempel 42 *Komplekse kvadratrødder får man let styr på. Der er jo kun 2, og de ligger jævnt fordelt på en cirkel. Så hvis den ene rod er* $x+iy$*, så må den anden være* $-x-iy$*. Vi prøver at løse ligningen* $z^2=-4i$*. Bruges formlen i sætning 37, skrives først* $-4i=4e^{-i\frac{\pi}{2}}$*. Herefter har vi*

$$z=2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+p\pi\right)}$$

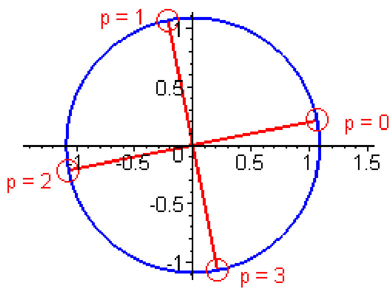
hvor $p=0,1$*. Løsningerne er altså*

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ z_1 &= -z_0=-\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Eksempel 43 *Lad os løse ligningen* $z^4=1+i$*, og nøjes med at give løsningerne på polær form. (Der er god grund til denne nøjsomhed!). Vi har* $|1+i|=\sqrt{2}$*og* $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$*, så løsningerne er ifølge sætning 37 givet ved*

$$z=\sqrt[8]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{16}+p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

hvor $p=0,1,2,3$*. Rødderne ligger på en cirkel med radius* $\sqrt[8]{2}$*, og de deler cirkelbuen i 4 lige store stykker. Den ene af rødderne ligger i første kvadrant i en vinkelafstand fra x-aksen på* $\frac{\pi}{16}$*.*



Rødderne i $z^4=1+i$

4.2 Andengradsligningen

Betragt andengradsligningen

$$az^2+bz+c=0$$

hvor $a,b,c\in C$, og $a\neq 0$. Vi vil vise, at ligningen kan løses på sædvanlig vis. Omskriv venstresiden således:

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Løsningerne til andengradsligningen opfylder derfor følgende ligning

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

som vi kan anse for binom, hvis vi midlertidigt opfatter $w=z+\frac{b}{2a}$ som den ubekendte. Den binome ligning

$$w^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

har som enhver anden binom ligning af anden grad 2 løsninger, nemlig de 2 komplekse kvadratrødder af $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, som vi kan skrive på formen $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Altså kan løsningerne til andengradsligningen skrives

$$z=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

der også kan skrives på den traditionelle form

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hvilke af de to komplekse kvadratrødder $\sqrt{b^2-4ac}$ refererer til, behøver vi ikke tage stilling til, da vi med $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ jo skal have dem begge.

Eksempel 44 *Vi løser ligningen $z^2-2z+(1+i)=0$. Vi finder*

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,(1+i)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4i}}{2}$$

I et tidligere eksempel har vi imidlertid løst den binome ligning $w^2=-4i$, dvs. fundet de to komplekse kvadratrødder $\pm\sqrt{-4i}$. Resultatet var $\pm\sqrt{-4i}=\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$. Altså finder vi

$$z=\frac{2\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1-i)=\begin{cases}1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\\1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Eksempel 45 *Vi vil løse ligningen $z^2+z+1=0$. Vi finder*

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

idet de to løsninger til den binome ligning $w^2=-3$ er $w=\pm i\sqrt{3}$.

4.3 Polynomier generelt

Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

hvor *koefficienterne* $a_0,a_1,\ldots,a_n$ er tal (i dette afsnit komplekse). Bemærk, at eksponenterne til z alle er ikke-negative hele tal. Hvis $a_n\neq 0$, vil vi kalde a_n for *den ledende koefficient* og sige, at polynomiets *grad* er n. Et polynomium af 0'te grad er blot et tal $a_0\neq 0$. Nulpolynomiet er blot udtrykket 0. Når dette overhovedet tillægges en grad, siger man, at den er $-\infty$.

Eksempel 46 *Udtrykkene* $2z^3 - z + 11$, $-\pi z^6 + 5z^5 + (5+3i)\, z^2 + z$ *og* 7 *er polynomier i den variable* z *af grader henholdsvis 3, 6 og 0. Udtrykkene* $4z^{-2} + 6z^{-1} - 8 + z + \frac{1}{2}z^2$ *og* $5z^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{2}}$ *er* ikke *polynomier i den variable* z*. Et udtryk med uendeligt mange led som* $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots$ *er ikke et polynomium, men kaldes en uendelig række.*

Vi skal i dette afsnit behandle rødder i polynomier. I det foregående afsnit viste vi, at den sædvanlige formel til bestemmelse af rødderne i et andengradspolynomium stadig gælder, når blot kvadratroden tolkes som bestemmelse af en kompleks kvadratrod. Der findes også formler til bestemmelse af rødderne i et tredie- og fjerdegradspolynomium. Disse formler er ret komplicerede og kan ikke generelt anbefales brugt. Det interessante er imidlertid, at formlerne overhovedet findes. Det kan nemlig vises, at rødderne i et polynomium af femte eller højere grad ikke generelt kan udtrykkes ved brug af endeligt mange af følgende symboler: De naturlige tal N, polynomiets koefficienter, $+, -, /$ og rodtegn. Dette resultat går tilbage til 1826 og skyldes nordmanden Niels Henrik Abel (1802-29). Påstanden om manglen på formler skal ikke overfortolkes. Husk, at bestemmelsen af rødderne i polynomiet $z^n - a$ jo blot er bestemmelsen af samtlige n'te rødder af a. Franskmanden Evariste Galois (1811-32) gav et kriterium for, om rødderne i et givet polynomium kan udtrykkes ved rodtegn.

På trods af manglen på formler for rødderne i et generelt polynomium af grad ≥ 5 har disse polynomier rødder indenfor C. Der gælder nemlig følgende sætning, der går tilbage til Carl Friedrich Gauss (1777-1855):

Sætning 47 ***Algebraens Fundamentalsætning***. *Ethvert polynomium af grad* ≥ 1 *har mindst én rod indenfor de komplekse tal.*

Bevis. Beviset er indviklet, hvis det skal føres uden forudgående kendskab til kompleks funktionsteori. Vi vil ikke give noget bevis hér. ■

Definition 48 *Et tal* $z_1 \in C$ *som er rod i polynomiet* p *siges at have multipliciteten* $k \in N$*, hvis* $p(z) = (z - z_1)^k\, q(z)$*, hvor* $q(z)$ *er et polynomium og hvor* z_1 *ikke er rod i* $q(z)$*. Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være simpel.*

Eksempel 49 *Polynomiet* $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640$ *kan faktoriseres til* $5(z+2)(z-4)^3$*. Vi ser derfor, at* 4 *er rod af multiplicitet 3, og* -2 *er rod af multiplicitet 1.* -2 *er altså en simpel rod.*

Korollar 50 *Polynomiet* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$*, hvor* $n \geq 1$ *(og* $a_n \neq 0$*) kan skrives som et produkt af* a_n *og* n *førstegradsfaktorer:*

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ *har altså* n *rødder, hvis disse regnes med multiplicitet.*

Bevis. Da $n \geq 1$ har polynomiet en rod $z_1 \in C$. Polynomiers division af $p(z)$ med førstegradsfaktoren $z - z_1$ vil give en rest på 0, divisionen går op. Altså $p(z) = (z - z_1)\, q_1(z)$, hvor q_1 er et polynomium af grad $n - 1$. Hvis $n = 1$ er $q_1(z)$ blot en konstant, der nødvendigvis må være $a_n = a_1$. Hvis $n > 1$, må $q_1(z)$ have en rod z_2. Ved polynomiers division fås da, at $q_1(z) = (z - z_2)\, q_2(z)$, hvor q_2 er et polynomium af grad $n - 2$. Hvis $n = 2$ er $q_2(z)$ blot en konstant, der nødvendigvis må være $a_n = a_2$. Hvis $n > 2$, må $q_2(z)$ have en rod z_3. Således fortsættes og vi finder

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_1)\, q_1(z) = (z - z_1)(z - z_2)\, q_2(z) \\ &= \ldots = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_n)\, q_n(z) \end{aligned}$$

hvor nu $q_n(z)$ har grad nul, altså er en konstant, og denne er nødvendigvis a_n. ■

Sætning 51 *Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in C$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.*

Bevis. Lad polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ have reelle koefficienter, altså $a_k \in R$, for $k = 0, 1, \ldots, n$. Da z_1 er rod har vi

$$a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0 = p(z_1) = 0$$

Ved kompleks konjugation fås

$$\overline{a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0} = \overline{0} = 0$$

Vi udnytter egenskaberne for kompleks konjugation ($\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ og $\overline{(ab)} = \overline{a}\overline{b}$), og får først

$$\overline{a_n}\overline{z_1^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z_1^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\overline{z_1} + \overline{a_0} = 0$$

og dernæst, da koefficienterne er reelle og da $\overline{z_1^k} = (\overline{z_1})^k$:

$$a_n (\overline{z_1})^n + a_{n-1} (\overline{z_1})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_1} + a_0 = 0$$

men venstre side er jo $p(\overline{z_1})$, hvorfor vi altså har $p(\overline{z_1}) = 0$. ■

Korollar 52 *Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ og med reelle koefficienter kan skrives som et produkt af reelle første- og andengradsfaktorer.*

Bevis. Et sådant polynomium kan jo skrives som et produkt af komplekse førstegradsfaktorer. Nogle af disse kan være reelle. De imaginære førstegradsfaktorer kommer i par af formen $(z - z_1)(z - \overline{z_1})$. Med $z_1 = a + ib$, $a, b \in R$, fås

$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - \overline{z_1}) &= (z - (a + ib))(z - (a - ib)) \\ &= ((z - a) - ib)((z - a) + ib) \\ &= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2za + a^2 + b^2\end{aligned}$$

og dette andengradspolynomium har jo reelle koefficienter. ■

Bestemmelse af rødder i polynomier gøres naturligvis lettest ved brug af computer:

Eksempel 53 *Den følgende Maple-kode frembringer et tilfældigt polynomium af grad højst 100 og med heltallige koefficienter mellem -99 og 99. Vi har også sorteret polynomiet, så leddene kommer i aftagende gradsrækkefølge*

```
with(RandomTools):
p:=sort(Generate(polynom(integer(range=-99..99),z,degree=100)));
```

Vi viser kun en meget lille del af det lange udtryk:

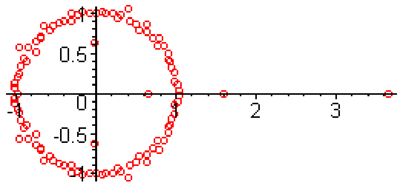
$$p := -18z^{100} + 78z^{99} - 26z^{98} - 64z^{97} - 8z^{96} + \ldots - 87z^4 - 75z^3 + 47z^2 - 16z + 38$$

Rødderne kan findes ved en numerisk metode således:

```
r:=fsolve(p=0, z, complex):
```

De 100 rødder, som polynomiet har, viser vi kun på en figur. Dette kan gøres således:

```
plots[complexplot]( [r], style=point, symbol=circle, scaling=constrained);
```



Rødderne for vores 100.-gradspolynomium

Det er bemærkelsesværdigt, at mange (de fleste!) af rødderne ligger meget tæt på enhedscirklen. Dette fænomen er mindre udtalt, når den maksimale grad vælges mindre.

Skulle man ønske at bestemme rødderne i et polynomium i hånden er følgende sætning undertiden nyttig:

Sætning 54 *Lad polynomiet* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *med* $a_n \neq 0$*, have hele koefficienter, altså* $a_k \in Z$ *for* $k = 0, 1, \ldots, n$*. Antag polynomiet har en rational rod* $z_1 = \frac{p}{q}$*,* $\quad p, q \in Z$*, hvor brøken er uforkortelig. Så gælder, at* $p \,|a_0$ *og* $q \,|a_n$*.*

Bevis. Vi har

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplikation med q^n på begge sider giver

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

der også kan skrives

$$\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) p + a_0 q^n = 0$$

Vi ser, at p går op i første led, p må derfor også gå op i andet led $a_0 q^n$. Men p og q har ingen fælles primtalsfaktorer, så p går ikke op i q^n. Derfor må p gå op i a_0. Beviset for, at $q\,|a_n$ forløber ganske analogt. ■

Korollar 55 *Har et polynomium* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *med* $a_n \neq 0$*, hele koefficienter, skal evt. rationale rødder søges blandt*

$$\pm \frac{\text{divisorer i } a_0}{\text{divisorer i } a_n}$$

Med denne skrivemåde menes her at alle kombinationer skal undersøges.

Eksempel 56 *Vi vil finde rødderne i polynomiet* $p(z) = 5z^4 - 30z^3 + 65z^2 + 30z - 520$*, og samtidigt faktorisere polynomiet. Polynomiet har hele koefficienter. Da divisorerne i 520 er temmelig mange, og da* $\frac{1}{5} p(z)$ *har de samme rødder som* $p(z)$ *og stadig hele koefficienter, finder vi rødderne i* $\frac{1}{5} p(z) = z^4 - 6z^3 + 13z^2 + 6z - 104$*. Divisorer i* 104 *er* $2, 4, 8, 13, 26, 52, 104$*. Den ledende koefficient er 1. De mulige rationale rødder er derfor* $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 13, \pm 26, \pm 52, \pm 104$*. Hvis* *vi begynder afprøvningen nedefra, finder vi først, at* -2 *er rod. Ved polynomiers division af* $z^4 - 6z^3 + 13z^2 + 6z - 104$ *med* $z + 2$ *fås* $z^3 - 8z^2 + 29z - 52$*. Vi skal nu bestemme rødder i dette polynomium. Mulige rationale rødder er* $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 13, \pm 26, \pm 52$*. Bemærk dog, at polynomiet ikke kan have en negativ rod pga. de alternerende fortegn. De mulige rationale rødder er derfor* $1, 2, 4, 8, 13, 26, 52$*. Afprøvning nedefra viser, at 4 er rod. Polynomiers division af* $z^3 - 8z^2 + 29z - 52$ *med* $z - 4$ *giver* $z^2 - 4z + 13$*. Dette andengradspolynomium har ingen rationale rødder, til gengæld har vi en formel for rødderne. Vi finder, at disse er*

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Rødderne i det givne polynomium er altså $-2, 4, 2 \pm 3i$*. Polynomiet kan faktoriseres i komplekse førstegradsfaktorer således*

$$p(z) = 5(z+2)(z-4)(z-(2+3i))(z-(2-3i))$$

I reelle første- og andengradsfaktorer ser faktoriseringen således ud

$$p(z) = 5(z+2)(z-4)\left(z^2 - 4z + 13\right)$$

Eksempel 57 *Vi vil finde rødderne i polynomiet* $p(z) = z^6 - 7z^5 + \frac{49}{4}z^4 + 4z^2 - 28z + 49$*, og samtidigt faktorisere polynomiet. Polynomiet har ikke hele koefficienter, men det har polynomiet* $4p(z) = 4z^6 - 28z^5 + 49z^4 + 16z^2 - 112z + 196$*, der jo har de samme rødder. Vi bemærker med det samme, at polynomiet ikke har negative rødder. Divisorerne i* 196 *er* $1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196$*. Divisorer i den ledende koefficient* (4) *er* $1, 2, 4$*. De mulige rationale rødder er herefter:*

$$1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{49}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{49}{4}$$

Ved afprøvning finder man, at $\frac{7}{2}$ *er rod. Polynomiers divison af* $4z^6 - 28z^5 + 49z^4 + 16z^2 - 112z + 196$ *med* $2\left(z - \frac{7}{2}\right) = 2z - 7$ *giver* $2z^5 - 7z^4 + 8z - 28$*. Dette polynomium har (selvfølgelig) heller ingen negative rødder. Divisorer i 28 er* $1, 2, 4, 7, 14, 28$ *og divisorer i den ledende koefficient er* $1, 2$*. Mulige rationale rødder er derfor*

$$1, 2, 4, 7, 14, 28, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

Ved kontrol ses det, at $\frac{7}{2}$ *er rod (hermed er den altså dobbeltrod i det oprindelige polynomium). Polynomiers division af* $2z^5 - 7z^4 + 8z - 28$ *med* $2z - 7$ *giver* $z^4 + 4$*. Bestemmelse af rødderne i* $z^4 + 4$ *betyder løsning af den binome ligning* $z^4 = -4 = 4e^{i\pi}$*. Den sædvanlige formel giver de fire løsninger* $1 \pm i$ *og* $-1 \pm i$*. Rødderne i det oprindelige polynomium er altså* $\frac{7}{2}$ *(med multiplicitet 2),* $1 \pm i$ *og* $-1 \pm i$*. Polynomiet kan faktoriseres i komplekse førstegradsfaktorer således*

$$p(z) = (2z-7)^2 (z-(1+i))(z-(1-i))(z-(-1+i))(z-(-1-i))$$

og i reelle første- og andengradsfaktorer således

$$(2z-7)^2 \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

5 Eulers formler. De komplekse trigonometriske funktioner.

Ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion har vi for $v \in R$

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-iv} &= \cos v - i \sin v \end{aligned}$$

Ved addition af disse formler og efter division med 2 fås

$$\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$$

Tilsvarende fås ved subtraktion og division med $2i$

$$\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$$

Disse to formler kaldes Eulers formler efter schweitzeren Leonhard Euler (1707-83). Deres nytte ligger i, at eksponentialfunktionen er let at regne med.

Eksempel 58 *Vi ønsker* $\sin^4 x$ *udtrykt ved* $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$. *Vi bruger den ene af Eulers formler:*

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

En sådan formel er eksempelvis nyttig ved integration. Skal integralet $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$ *beregnes, finder vi*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^4 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

Højresiderne i Eulers formler $\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$ og $\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$ giver mening for alle $v \in C$. Vi kan derfor bruge Eulers formler til en udvidelse af definitionsområdet for de trigonometriske funktioner. Vi definerer altså blot, at $\cos v$ og $\sin v$ for $v \in C \backslash R$ skal være givet ved Eulers formler. For $v \in R$ er der ikke tale om en definition.

Eksempel 59 *Vi vil beregne* $\sin\left(\frac{\pi}{6} + i \ln 2\right)$. *Vi finder*

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right) &= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right)\right) - \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{6} - \ln 2\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{6} + \ln 2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-\ln 2} - e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{\ln 2}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Bemærkning 60 *De hyperbolske funktioner* sinh *og* cosh *defineres for* $z \in C$ *ved*

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \\ \cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \end{aligned}$$

Bemærk, at for $z \in R$ *har disse funktioner reelle værdier. Der er åbenbart følgende sammenhæng mellem de hyperbolske funktioner og de trigonometriske. For alle* $z \in C$*:*

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \cos z \\ \sinh(iz) &= i \sin z \end{aligned}$$

6 Funktioner med komplekse værdier

Her kan enten være tale om funktioner defineret på en delmængde (interval) af R, men med værdier i C, eller om funktioner defineret i en delmængde D af C og med værdier i C. Vi omtaler begge i de følgende to afsnit.

6.1 Kompleks funktion af reel variabel

Lad f være en funktion defineret på intervallet $I \sqsubseteq R$ og med værdier i C. Dette skrives kort således: $f\colon I \longrightarrow C$. For ethvert $t \in I$ er billedet $f(t)$ altså et komplekst tal (ikke nødvendigvis imaginært, altså ikke-reelt). Da $f(t)$ er et komplekst tal kan det skrives (entydigt) på formen $f(t) = u(t) + iv(t)$, hvor $u(t), v(t) \in R$. Herved defineres to reelle funktioner u og v, som vi vil kalde realdelen og imaginærdelen af f, henholdsvis. Altså $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$. Hvis vi træder et skridt baglæns og erindrer, at $i = (0, 1)$, så kan vi skrive $f(t) = (u(t), v(t))$. Vi kan altså også tænke på f som en vektorfunktion. Er t tiden, så kan $f(t)$ være positionen til tiden t.

Eksempel 61 *Lad* $f(t) = e^{3t+i7t}$ *for alle* $t \in R$*. Anderledes skrevet:* $f(t) = e^{3t}(\cos 7t + i \sin 7t)$*. Med betegnelserne fra før har vi altså* $u(t) = e^{3t}\cos 7t$ *og* $v(t) = e^{3t}\sin 7t$*.*

Vi definerer nu begrebet grænseværdi for funktion. Hvis man er fortrolig med definitionen i det tilfælde, hvor $f\colon I \longrightarrow R$, så er der i og for sig ikke meget nyt.

Definition 62 *Lad* $f\colon I \longrightarrow C$*. Lad* a *være et punkt i* I *eller et af* I*'s endepunkter. Så siges* $f(t)$ *at have en grænseværdi for* $t \to a$*, hvis der findes et tal* $A \in C$*, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal* ε *eksisterer et positivt tal* δ*, så hvis blot* t *er indenfor en afstand af* δ *fra* a*, så er* $f(t)$ *indenfor en afstand af* ε *fra* A*. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \text{så} \;\; 0 < |t - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolet $\forall$ *skal læses: "for ethvert" (eller "for alle"). Symbolet* $\exists$ *skal læses "der eksisterer". Har* $f(t)$ *grænseværdien* A *for* $t \to a$*, så skriver man*

$$\lim_{t \to a} f(t) = A$$

Bemærkning 63 *Forskellen fra den tidligere kendte definition er (når bortses fra tidligere definitioners evt. mangel på præcision), at numerisk-tegnet i udtrykket* $|f(t) - A|$ *nu betyder modulus af det komplekse tal* $f(t) - A$*.*

Definition 64 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Lad $a \in I$. Funktionen f siges at være kontinuert i a, hvis*

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$

Sætning 65 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Skriv $f = u + iv$, hvor $u, v\colon I \longrightarrow R$. Lad a være et punkt i I eller et af I's endepunkter. Så har $f(t)$ grænseværdien $A = A_1 + iA_2$, $A_1, A_2 \in R$, for $t \to a$, hvis og kun hvis $u(t)$ og $v(t)$ har grænseværdierne A_1 og A_2, henholdsvis, for $t \to a$. Hvis $a \in I$, er f kontinuert i a, hvis og kun hvis u og v begge er kontinuerte i a.*

Bevis. Selv om denne sætning ikke er svær at vise, springer vi beviset over. ■

Definition 66 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Lad $a \in I$. Funktionen f siges at være differentiabel i a, hvis der findes et tal $A \in C$, så*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \to A$$

for $t \to a$. Tallet A vil blive kaldt differentialkvotienten, og vi skriver $f'(a) = A$.

Sætning 67 *Lad $f, g\colon I \longrightarrow C$ begge være differentiable i $a \in I$. Lad $k \in C$ være en konstant. Så gælder som for reelle funktioner, at kf, $f + g$, fg samt (forudsat at $g(a) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ alle er differentiable, og*

$$\begin{aligned}
(kf)'(a) &= kf'(a) \\
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\
(fg)'(a) &= f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{g(a)\,f'(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}
\end{aligned}$$

Bevis. Beviserne som de kendes fra reelle funktioner, kan overtages i deres helhed. ■

Bemærkning 68 *Bemærk, at sammensætning af to funktioner af den givne type ikke nævnes. Dette skyldes jo, at $f(g(t))$ ikke giver mening med mindre $g(t) \in I$. Den kendte regel for differentiation af sammensat funktion gælder imidlertid i følgende form:*

Sætning 69 *Lad $g\colon I \longrightarrow J \subseteq R$ og $f\colon J \longrightarrow C$. Er g differentiabel i $a \in I$ og er f differentiabel i $g(a)$, så er $f \circ g$ differentiabel i a og*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Bevis. Beviset er igen som for to reelle funktioner. ■

Sætning 70 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Skriv $f = u + iv$, hvor $u, v\colon I \longrightarrow R$. Lad $a \in I$. Så er f differentiabel i a med $f'(a) = A = A_1 + iA_2$, $A_1, A_2 \in R$, hvis og kun hvis u og v begge er differentiable i a med differentialkvotienterne A_1 og A_2, henholdsvis. Altså $u'(a) = A_1$ og $v'(a) = A_2$.*

Bevis. Igen ikke nogen kompliceret sag at vise, men vi springer over beviset. ■

Eksempel 71 *Lad $f(t) = e^{(3+i7)t}$ for alle $t \in R$. Da realdel og imaginærdel af f er givet ved $u(t) = e^{3t}\cos 7t$ og $v(t) = e^{3t}\sin 7t$, henholdsvis, og da disse er differentiable for alle værdier af $t \in R$, gælder det samme for f. Vi finder*

$$\begin{aligned}
u'(t) &= 3e^{3t}\cos 7t - 7e^{3t}\sin 7t \\
v'(t) &= 3e^{3t}\sin 7t + 7e^{3t}\cos 7t
\end{aligned}$$

således at

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t) + iv'(t) = 3e^{3t}\cos 7t - 7e^{3t}\sin 7t + i\left(3e^{3t}\sin 7t + 7e^{3t}\cos 7t\right) \\ &= (3+7i)\left(e^{3t}\cos 7t\right) + (-7+3i)\,e^{3t}\sin 7t \\ &= (3+7i)\left(e^{3t}\cos 7t + ie^{3t}\sin 7t\right) = (3+7i)\,e^{(3+7i)t} \end{aligned}$$

I et konkret tilfælde har vi her set, at $\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$*, når* $\lambda \in C$.

Bemærkning 72 *Det var fristende, at sige at funktionen* $f(t) = e^{\lambda t}$ *jo blot er sammensat af funktionerne* $t \mapsto \lambda t$ *og eksponentialfunktionen* $z \mapsto e^z$*. Differentiation af disse to er en simpel sag. Problemet er dog, at vi ikke har defineret differentiabilitet af funktion af kompleks variabel og vist, at* exp *er differentiabel som en sådan (med den forventede afledede).*

6.2 Kompleks funktion af kompleks variabel

Lad nu f være en funktion defineret i en delmængde D af den komplekse plan C og med værdier i C. Dette skrives kort således: $f\colon D \longrightarrow C$. For ethvert $z \in D$ er billedet $f(z)$ altså et komplekst tal.

Eksempel 73 *Den komplekse eksponentialfunktion* exp*, altså* $f(z) = e^z$ *for alle* $z \in C$ *er af denne type. Det samme er de komplekse trigonometriske funktioner. Polynomier kan betragtes som komplekse funktioner af en kompleks variabel.*

Som i afsnittet ovenfor defineres begrebet grænseværdi for funktion analogt med tidligere. Der er dog ét problem: Hvor funktionens definitionsmængde ovenfor antoges at være et interval, og $\lim_{x\to a} f(x)$ blev defineret for punkter a i intervallet eller i et af dets endepunkter, så er funktionens definitionsområde nu en delmængde D af den komplekse plan. Det vil være for restriktivt at indskrænke de tilladte mængder D til rektangler eller cirkelskiver (f.eks.). Vi får derfor brug for begrebet *akkumulationspunkt.*

Definition 74 *Punktet* $a \in C$ *kaldes et akkumulationspunkt for mængden* D*, hvis enhver cirkelskive med centrum i* a *indeholder uendeligt mange punkter fra* D.

Definition 75 *Lad* $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$*. Lad* a *være et akkumulationspunkt for* D*. Så siges* $f(z)$ *at have en grænseværdi for* $z \to a$*, hvis der findes et tal* $A \in C$*, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal* ε *eksisterer et postivt tal* δ*, så hvis blot* $z \in D$ *er indenfor en afstand af* δ *fra* a*, så er* $f(z)$ *indenfor en afstand af* ε *fra* A*. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \text{så} \quad 0 < |z-a| < \delta \wedge z \in D \Longrightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

Har f *grænseværdien* A *for* $z \to a$*, så skriver man*

$$\lim_{z\to a} f(z) = A$$

Definition 76 *Lad* $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$*. Lad* $a \in D$*. Funktionen* f *siges at være kontinuert i* a*, hvis*

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

Definition 77 *Lad* $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$*. Lad* $a \in D$*. Funktionen* f *siges at være differentiabel i* a*, hvis der findes et tal* $A \in C$*, så*

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \to A$$

for $z \to a$*. Tallet* A *vil blive kaldt differentialkvotienten, og vi skriver* $f'(a) = A$.

Definition 78 *En funktion* $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$*, der er differentiabel i ethvert punkt af den åbne mængde* D *kaldes analytisk i* D*. (En alternativ glose er holomorf).*

Eksempel 79 *Vi nævner uden bevis, at* $\exp, \sin, \cos$ *og ethvert polynomium er analytiske funktioner i hele* C*.*

Bemærkning 80 *Analytiske funktioner har overraskende stærke egenskaber. Kravet om differentiabilitet i ethvert punkt af en åben delmængde af* C *er meget stærkt. Der er en omfattende teori om analytiske funktioner. Denne teori kræver en hel bog og et helt kursus ("Kompleks Funktionsteori"). Der gælder bl.a. det overraskende resultat, at hvis en funktion er analytisk i hele* C *og er begrænset, d.v.s. at der findes et tal* M*, så* $|f(z)| \leq M$ *for alle* $z \in C$*, så er funktionen faktisk konstant! Det er denne sætning, der kan bruges til at give et simpelt bevis for algebraens fundamentalsætning: Har polynomiet* $p(z)$ *nemlig ingen rødder, så må* $\frac{1}{p(z)}$ *være begrænset, men derfor altså konstant. Dette er jo kun tilfældet, hvis* $p(z)$ *er konstant, altså har grad nul.*