Lokalt ekstremum
DiploMat 01905

Preben Alsholm
Institut for Matematik, DTU

27. april 2004

Definition 1 *Et stationært punkt for en funktion af flere variable f vil i disse noter blive kaldt et* egentligt *saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt minimum.*

Definition 2 *Lad f være en funktion af 2 variable. Antag, at f har partielle afledede af anden orden i punktet (a, b). Matricen*

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

vil vi kalde Hesse-matricen for f i (a, b). Er f en funktion af 3 variable defineres Hessematricen i punktet (a, b, c) således

$$H(a,b,c) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

Sætning 3 *Lad f være en funktion af n variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Antag, at a er et stationært punkt for f. Lad $H(a)$ være Hessematricen for f i a. Så gælder*

1. *Hvis egenværdierne for $H(a)$ alle er positive, så er a et egentligt minimumspunkt. Hvis egenværdierne alle er negative, er a et egentligt maksimumspunkt.*
2. *Hvis to af egenværdierne for $H(a)$ har forskellige fortegn, så er a et egentligt saddelpunkt.*
3. *Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og hvis resten har samme fortegn, så må der en nærmere undersøgelse til.*

Eksempel 4 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$$

Vi har $f_x(x,y) = 2x - 2xy = 2x(1-y)$ og $f_y(x,y) = -x^2 + 4y$. Heraf finder vi, at de stationære punkter er $(0, 0)$ og $(\pm 2, 1)$. Vi finder videre

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 - 2y \\ f_{xy}(x,y) &= -2x \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

Hessematricen er altså givet ved

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

I de 3 punkter fås

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for $H(0,0)$ *er åbenbart 2 og 4, altså positive, så* $(0,0)$ *er et egentligt lokalt minimumspunkt. Matricerne* $H(2,1)$ *og* $H(-2,1)$ *har de samme egenværdier, nemlig* $2 \pm 2\sqrt{5}$.*Den ene er dermed positiv,den anden er negativ. Punkterne* $(\pm 2, 1)$ *er egentlige saddelpunkter.*

Bemærkning 5 *Hesse-matricen er en symmetrisk matrix og har derfor reelle egenværdier.*

Bemærkning 6 *For en funktion af to variable er en egentlig bestemmelse af størrelsen af egenværdierne ikke nødvendig. Vi ved jo, at produktet af egenværdierne er lig med determinanten af matricen. Er determinanten derfor negativ, er punktet et egentligt saddelpunkt. Er determinanten positiv, har egenværdierne samme fortegn, og dermed er punktet et egentligt ekstremum. Om punktet er et minimum eller et maksimum afgøres nu af sporet, idet summen af egenværdierne er lig med sporet, som er* $f_{xx}(a,b) + f_{yy}(a,b)$. *Når determinanten er positiv, har* $f_{xx}(a,b)$ *og* $f_{yy}(a,b)$ *nødvendigvis samme fortegn, så fortegnet af egenværdierne afgøres alene af den ene af* $f_{xx}(a,b)$ *og* $f_{yy}(a,b)$.