Lokalt ekstremum
DiploMat 01905

Preben Alsholm
Institut for Matematik, DTU

26. oktober 2004

Definition 1 *Et stationært punkt for en funktion af flere variable f vil i disse noter blive kaldt et* egentligt *saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt minimum.*

Definition 2 *Lad f være en funktion af n variable. Antag, at f har partielle afledede af anden orden i punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hessematricen for f i punktet a er den matrix $H(a)$, hvis element (i, j) er*

$$f_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Er f en funktion af 2 variable x og y er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2)$ altså givet ved

$$H(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

Er f en funktion af 3 variable x, y og z er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2, a_3)$ givet ved

$$H(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) & f_{xz}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) & f_{yz}(a) \\ f_{zx}(a) & f_{zy}(a) & f_{zz}(a) \end{pmatrix}$$

Bemærkning 3 *Hessematricen er opkaldt efter tyskeren Ludwig Otto Hesse, 1811-1874. Da man normalt kan regne med, at de blandede afledede er ens, er Hessematricen altså symmetrisk. Denne kendsgerning er vigtig i det følgende.*

Vi skal bruge lidt lineær algebra om symmetriske matricer. Detaljer kan findes i Lay, *Linear Algebra*, §7.1, pp. 449-453.

Definition 4 *En matrix A kaldes symmetrisk, hvis $A^T = A$.*

Definition 5 *En matrix P kaldes ortogonal, hvis den opfylder $P^T P = P P^T = I$ (enhedsmatricen).*

Sætning 6 *Lad A være en reel symmetrisk matrix. Så gælder:*

1. *Samtlige løsninger til karakterligningen er reelle ("samtlige egenværdier er reelle").*

2. *Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er ortogonale.*

3. *A er diagonaliserbar, og der kan altid som diagonaliserende matrix P bestemmes en ortogonal matrix.*

Her følger nu kriteriet for lokalt ekstremum, i første omgang formuleret for en funktion af 2 variable:

Sætning 7 *Lad f være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet (a,b). Antag, at (a,b) er et stationært punkt for f. Lad $H(a,b)$ være Hessematricen for f i (a,b). Så gælder*

1. *Hvis egenværdierne for $H(a,b)$ begge er positive, så er (a,b) et egentligt minimumspunkt. Hvis egenværdierne begge er negative, er (a,b) et egentligt maksimumspunkt.*
2. *Hvis egenværdierne for $H(a,b)$ har forskellige fortegn, så er (a,b) et egentligt saddelpunkt.*
3. *Hvis én af egenværdierne er lig med nul og den anden er positiv, så kan* kun konkluderes*, at (a,b) ikke er et maksimumspunkt. Hvis én af egenværdierne er lig med nul og den anden er negativ, så kan* kun konkluderes*, at (a,b) ikke er et minimumspunkt. En nærmere undersøgelse må i øvrigt foretages.*
4. *Hvis begge egenværdier er lig med nul, må en nærmere undersøgelse foretages.*

For at kunne bevise sætningen behøver vi Taylors formel for en funktion af to variable, men kun til anden orden:

Lemma 8 *Lad f være en funktion af 2 variable. Antag, at f i en cirkelskive K med centrum i punktet $p=(a,b)$ har kontinuerte partielle afledede op til og med anden orden. Så gælder, at der til ethvert $q=(x,y)\in K$ eksisterer et tal $\xi\in[0,1]$, så*

$$f(q)=f(p+h)=f(p)+f_x(p)\,h_1+f_y(p)\,h_2+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(p+\xi h)\,h_1^2+2f_{xy}(p+\xi h)\,h_1h_2+f_{yy}(p+\xi h)\,h_2^2\right)$$

hvor vi af praktiske grunde har indført $h=q-p=(x-a,y-b)$.

Bevis. Lad g være givet ved $g(t)=f(a+th_1,b+th_2)$. Så er g differentiabel, og ifølge kædereglen har vi

$$g'(t)=f_x(a+th_1,b+th_2)\,h_1+f_y(a+th_1,b+th_2)\,h_2$$

Men også g' er differentiabel og igen ifølge kædereglen har vi

$$g''(t)=f_{xx}(a+th_1,b+th_2)\,h_1^2+2f_{xy}(a+th_1,b+th_2)\,h_1h_2+f_{yy}(a+th_1,b+th_2)\,h_2^2$$

Taylors formel for en funktion af én variabel kan nu anvendes på g. Med $t=1$ fås, at der eksisterer et tal $\xi\in[0,1]$, så

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(\xi)$$

Da $g(1)=f(p+h)$, $g(0)=f(p)$, $g'(0)=f_x(p)\,h_1+f_y(p)\,h_2$ og $g''(\xi)=f_{xx}(p+\xi h)\,h_1^2+2f_{xy}(p+\xi h)\,h_1h_2+f_{yy}(p+\xi h)\,h_2^2$ er lemmaet vist. ■

Vi kan nu bevise sætningen.

Bevis. Da $p = (a, b)$ er et stationært punkt, er de partielle afledede af første orden nul, så vi finder af Taylors formel

$$\begin{aligned} f(p+h) - f(p) &= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(p+\xi h)\, h_1^2 + 2 f_{xy}(p+\xi h)\, h_1 h_2 + f_{yy}(p+\xi h)\, h_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(p+\xi h) & f_{xy}(p+\xi h) \\ f_{xy}(p+\xi h) & f_{yy}(p+\xi h) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H(p+\xi h)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lad nu egenværdierne for $H(p+\xi h) = H(a+\xi h_1, b+\xi h_2)$ være λ_1 og λ_2. Disse egenværdiers størrelse må afhænge af ξ og $h = (h_1, h_2)$. Lad en diagonaliserende ortogonal matrix for $H(p+\xi h)$ være P. Denne matrix har søjler bestående af egenvektorer for $H(p+\xi h)$ og afhænger derfor også af ξ og h. Da P er ortogonal, gælder at $P^{-1} = P^T$. Derfor fås, når $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$, at

$$H(p+\xi h) = PDP^{-1} = PDP^T$$

Idet vi nu tænker på h som en søjlevektor: $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, finder vi

$$\begin{aligned} f(p+h) - f(p) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H(p+\xi h)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} h^T H(p+\xi h)\, h = \frac{1}{2} h^T P D P^T h \\ &= \frac{1}{2}\left(P^T h\right)^T D\left(P^T h\right) \end{aligned}$$

Idet vi sætter $v = P^T h$ har vi derfor med $v^T = (v_1, v_2)$, at

$$f(p+h) - f(p) = \frac{1}{2} v^T D v = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2\right)$$

Hvis nu egenværdierne for matricen $H(p)$ begge er positive, så er egenværdierne λ_1 og λ_2 for $H(p+\xi h)$ også begge positive, når blot h_1 og h_2 begge er små (numerisk set). Altså følger, at $f(p+h) - f(p) > 0$, når h_1 og h_2 begge er små. Men dette betyder, at f har et egentligt lokalt minimum i $p = (a, b)$. Hvis egenværdierne for matricen $H(p)$ begge er negative fås analogt, at $p = (a, b)$ er et egentligt lokalt maksimumspunkt.
Vi viser nu sætningens punkt 2 og 3 under ét. Lad $\lambda_{1,0} \neq 0$ være en egenværdi for matricen $H(p)$. Lad $h = su,\ s \in R$, være egenvektorerne for $H(p)$ hørende til egenværdien $\lambda_{1,0}$. Vi kan sørge for, at u er en enhedsvektor. Så har vi

$$h^T H(p)\, h = h^T(\lambda_{1,0} h) = \lambda_{1,0} h^T h = s^2 \lambda_{1,0}$$

Hermed har vi videre

$$\begin{aligned} f(p+h) - f(p) &= \frac{1}{2} h^T H(p+\xi h)\, h \\ &= \frac{1}{2} h^T H(p)\, h + \frac{1}{2} h^T\left(H(p+\xi h) - H(p)\right) h \\ &= \frac{1}{2} s^2 \lambda_{1,0} + \frac{1}{2} s^2 u^T\left(H(p+\xi h) - H(p)\right) u \\ &= \frac{1}{2} s^2\left(\lambda_{1,0} + u^T\left(H(p+\xi h) - H(p)\right) u\right) \end{aligned}$$

Vælges s passende lille og dermed h lille, vil forskellen mellem de to matricers tilsvarende elementer kunne gøres lille nok til at fortegnet for parentesen i den sidste højreside bestemmes helt af fortegnet for $\lambda_{1,0}$ Langs en linie gennem $p = (a, b)$ med retningsvektor u har f altså minimum i (a, b) hvis $\lambda_{1,0} > 0$, og maksimum, hvis $\lambda_{1,0} < 0$. Hvis altså $H(a, b)$ har 2 egenværdier med forskellige fortegn, må (a, b) være et egentligt saddelpunkt. Punkt 3 følger også heraf.
At nærmere undersøgelser er påkrævede, når mindst én af egenværdierne er nul, vil blive vist i en række eksempler. ■

Der gælder en ganske lignende sætning for funktioner af flere end to variable:

Sætning 9 *Lad f være en funktion af n variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Antag, at a er et stationært punkt for f. Lad $H(a)$ være Hessematricen for f i a. Så gælder*

1. *Hvis egenværdierne for $H(a)$ alle er positive, så er a et egentligt minimumspunkt. Hvis egenværdierne alle er negative, er a et egentligt maksimumspunkt.*

2. *Hvis to af egenværdierne for $H(a)$ har forskellige fortegn, så er a et egentligt saddelpunkt.*

3. *Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og resten er positive, så kan* kun konkluderes*, at a ikke er et maksimumspunkt. Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og resten er negative, så kan* kun konkluderes*, at a ikke er et minimumspunkt. En nærmere undersøgelse må i øvrigt foretages.*

4. *Hvis alle egenværdierne er lig med nul, må en nærmere undersøgelse foretages.*

Eksempel 10 *Lad f være givet ved*

$$f(x, y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$$

for alle $(x, y) \in R^2$. De partielle afledede af f er givet ved $f_x(x, y) = 2x - 2xy = 2x(1 - y)$ og $f_y(x, y) = -x^2 + 4y$. Heraf finder vi, at de stationære punkter er $(0, 0)$ og $(\pm 2, 1)$. Vi finder videre

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 - 2y \\ f_{xy}(x, y) &= -2x \\ f_{yy}(x, y) &= 4 \end{aligned}$$

Hessematricen er altså givet ved

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

I de 3 punkter fås

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(-2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for $H(0, 0)$ er åbenbart 2 og 4, altså positive, så $(0, 0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt. Matricerne $H(2, 1)$ og $H(-2, 1)$ har de samme egenværdier, nemlig $2 \pm 2\sqrt{5}$.Den ene er dermed positiv, den anden negativ. Punkterne $(\pm 2, 1)$ er egentlige saddelpunkter.

Vi nævner et andet nyttigt resultat fra Lineær Algebra.

Sætning 11 *Lad $n \times n$-matricen A have egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Så gælder, at*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ Spor(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \end{aligned} \quad (1)$$

hvor vi erindrer om, at sporet for A er defineret *som summen af diagonalelementerne.*

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n) \\ &= (-1)^n \left[\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n\right] \end{aligned} \quad (2)$$

hvor vi ved sidste udregning kun har interesseret os for koefficienterne til λ^n, λ^{n-1} og λ^0. Sætter vi $\lambda = 0$ får vi umiddelbart, at $\det(A) = (-1)^{2n} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.
Bemærk, at koefficienten til λ^{n-1} i den kantede parentes i (2) er $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$. For nu at vise udsagnet om sporet af A betragter vi udregningen af det karakteristiske polynomium for A ved udvikling langs første række. Vi viser her udregningen for en 3×3-matrix:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &\quad - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Vi interesserer os kun for bidragene til koefficienten til λ^n og til λ^{n-1} (dvs. her lig med λ^3 og λ^2) og dermed er det kun det første led der bidrager:

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \ldots$$

Vi interesserer os stadig kun for bidragene til koefficienten til λ^3 og λ^2 så

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + \ldots \\ &= (-1)^3 \lambda^3 + (-1)^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \lambda^2 + \ldots \\ &= (-1)^3 \left[\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \lambda^2 + \ldots\right] \end{aligned}$$

Generelt fås på denne måde

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \left[\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \ldots\right]$$

Ved sammenligning med (2) fås $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, hvilket skulle bevises.
■

Bemærkning 12 *Se også Lay, Linear Algebra: p. 318, opgave 19 og p. 334, opgave 25 og 26. I opgave 26 skal man give et bevis for (1), når det antages, at A er diagonaliserbar. Den forudsætning har vi ikke brugt ovenfor.*

For en funktion af 2 variable kan en egentlig bestemmelse af egenværdierne for Hesse-matricen undgås ved udnyttelse af følgende sætning:

Sætning 13 *Lad f være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet (a,b). Antag, at (a,b) er et stationært punkt for f. Lad $H(a,b)$ være Hessematricen for f i (a,b). Så gælder*

1. *Hvis* $\det(H(a,b)) > 0$*, så er (a,b) et egentligt ekstremumspunkt. Hvis Spor $(H(a,b)) > 0$, så er (a,b) et egentligt minimumspunkt. Hvis Spor $(H(a,b)) < 0$, er (a,b) et egentligt maksimumspunkt.*

2. *Hvis* $\det(H(a,b)) < 0$*, så er (a,b) et egentligt saddelpunkt.*

3. *Hvis* $\det(H(a,b)) = 0$ *må en nærmere undersøgelse foretages.*

Bevis. Ifølge sætning 11 gælder, hvis egenværdierne for $H(a,b)$ er λ_1, λ_2 at

$$\begin{aligned} \det(H(a,b)) &= \lambda_1\lambda_2 \\ \mathit{Spor}(H(a,b)) &= \lambda_1+\lambda_2 \end{aligned}$$

Er determinanten derfor negativ, er punktet et egentligt saddelpunkt.
Er determinanten positiv, har λ_1 og λ_2 samme fortegn, og dermed er punktet et egentligt ekstremum. Fortegnet for λ_1 og λ_2 afgøres derefter af fortegnet for $\lambda_1+\lambda_2 = \mathit{Spor}(H(a,b)) = f_{xx}(a,b)+f_{yy}(a,b)$. ■

Bemærkning 14 *Når* $\det(H(a,b)) > 0$*, så har $f_{xx}(a,b)$ og $f_{yy}(a,b)$ nødvendigvis samme fortegn, altså kan fortegnet af egenværdierne for $H(a,b)$ afgøres alene ud fra fortegnet for den ene af $f_{xx}(a,b)$ og $f_{yy}(a,b)$.*

Eksempel 15 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = \left(1+2x+2y-2y^2\right)e^{-x^2-2xy-2y^2}$$

De stationære punkter findes til $(-1,0), \left(\frac{1}{2},0\right), \left(\frac{1}{2},-1\right)$ og $\left(-\frac{3}{2},1\right)$. Hessematricerne er

$$\begin{aligned} H(-1,0) &= e^{-1}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad H\left(\frac{1}{2},0\right) = e^{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{bmatrix} \\ H\left(\frac{1}{2},-1\right) &= e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}, \quad H\left(-\frac{3}{2},1\right) = e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi prøver at bruge Sætning 13. Idet vi udnytter, at for en $n \times n$-matrix A og et tal k gælder, at $\det(kA) = k^n \det A$*, finder vi determinanterne til*

$$\begin{aligned} \det H(-1,0) &= \det\left(e^{-1}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = e^{-2}\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0 \\ \det H\left(\frac{1}{2},0\right) &= \det\left(e^{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 48e^{-\frac{1}{2}} > 0 \\ \det H\left(\frac{1}{2},-1\right) &= \det\left(e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{vmatrix} = 32e^{-\frac{5}{2}} > 0 \\ \det H\left(-\frac{3}{2},1\right) &= \det\left(e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 32e^{-\frac{5}{2}} > 0 \end{aligned}$$

Vi konkluderer, at $(-1,0)$ *er et egentligt saddelpunkt, hvorimod de tre andre stationære punkter er egentlige lokale ekstremumspunkter. Sporene for de sidste tre er*

$$\begin{aligned} Spor\left(H\left(\frac{1}{2},0\right)\right) &= -20e^{-\frac{1}{4}} < 0, \quad Spor\left(H\left(\frac{1}{2},-1\right)\right) = 28e^{-\frac{5}{4}} > 0 \\ Spor\left(H\left(-\frac{3}{2},1\right)\right) &= 12e^{-\frac{5}{4}} > 0 \end{aligned}$$

så vi konkluderer, at $\left(\frac{1}{2},0\right)$ *er et egentligt lokalt maksimumspunkt og punkterne* $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ *og* $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ *er egentlige lokale minimumspunkter.*
Vi kunne selvfølgelig i stedet have fundet egenværdierne for de 4 matricer.

Bemærkning 16 *For en funktion af n variable er det normalt ikke nok at få oplysninger om sporet og determinanten. Vi skal dog i et eksempel senere se, at det* undertiden *er tilstrækkeligt.*

Eksempel 17 *Lad f være funktionen givet ved*

$$f(x,y,z) = 12\left(y+z^2\right)e^{-x} + 8yz^3 + 5y^4$$

Vi vil bestemme stationære punkter og deres type. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -12\left(y+z^2\right)e^{-x} \\ f_y(x,y,z) &= 12e^{-x} + 8z^3 + 20y^3 \\ f_z(x,y,z) &= 24ze^{-x} + 24yz^2 \end{aligned}$$

Det eneste stationære punkt er (efter lidt regning - eller ifølge Maple) $(0,-1,1)$*. Vi finder Hessematricen:*

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12\left(y+z^2\right)e^{-x} & -12e^{-x} & -24ze^{-x} \\ -12e^{-x} & 60y^2 & 24z^2 \\ -24ze^{-x} & 24z^2 & 24e^{-x}+48yz \end{pmatrix}$$

I det stationære punkt fås

$$H(0,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \\ -12 & 60 & 24 \\ -24 & 24 & -24 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for denne matrix er med 4 betydende cifre -41.00, 5.929 *og* 71.07*. To er altså positive, en negativ. Punktet er et saddelpunkt. Dette forhold kunne være afgjort uden at finde egenværdierne således. Vi bruger Sætning 11. Vi finder*

$$\begin{aligned} \det(H(0,-1,1)) &= -17280 \\ Spor(H(0,-1,1)) &= 36 \end{aligned}$$

Vi har derfor, at

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -17280 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 36 \end{aligned}$$

Af den første af disse ligninger konkluderes, at en eller tre af egenværdierne er negative. Af den anden følger dernæst, at de ikke alle kan være negative. Altså er netop én egenværdi negativ, og to dermed positive.

Eksempel 18 *Lad f være funktionen givet ved*

$$f(x,y,z) = \left(1 - 2y^2 + z\right) e^{-x^2-y^2-z^2}$$

Vi vil bestemme stationære punkter og deres type. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -2x\left(1 - 2y^2 + z\right) e^{-x^2-y^2-z^2} \\ f_y(x,y,z) &= -2y\left(3 - 2y^2 + z\right) e^{-x^2-y^2-z^2} \\ f_z(x,y,z) &= \left(1 - 2z - 2z^2 + 4zy^2\right) e^{-x^2-y^2-z^2} \end{aligned}$$

Der er 4 stationære punkter, nemlig $\left(0,0,-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ og $\left(0, \pm\frac{1}{4}\sqrt{22}, -\frac{1}{4}\right)$. Vi finder Hessematricen $H(x,y)$ ganget med $\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2}$ altså $\frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}H(x,y)$ til

$$\begin{bmatrix} \left(1-2x^2\right)\left(-1-z+2y^2\right) & 2xy\left(3+z-2y^2\right) & x\left(-1+2z+2z^2-4y^2z\right) \\ 2xy\left(3+z-2y^2\right) & -3-z+2y^2\left(6+z-2y^2\right) & y\left(-1+6z+2z^2-4y^2z\right) \\ x\left(-1+2z+2z^2-4y^2z\right) & y\left(-1+6z+2z^2-4y^2z\right) & -1-3z+2y^2+2z^2\left(1+z-2y^2\right) \end{bmatrix}$$

Indsættes de stationære punkter og bestemmes herefter egenværdierne fås for begge punkterne $\left(0, \pm\frac{1}{4}\sqrt{22}, -\frac{1}{4}\right)$, at Hessematricen har egenværdierne $0.89, 0.95, 2.8$ (med 2 betydende cifre). Alle tre egenværdier er altså positive. Punkterne $\left(0, \pm\frac{1}{4}\sqrt{22}, -\frac{1}{4}\right)$ er altså egentlige lokale minimumspunkter. For punktet $\left(0,0,-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ findes egenværdierne for Hessematricen til $-5.9, -3.0, -2.4$. Alle tre negative: Punktet er et egentligt lokalt maksimumspunkt. For punktet $\left(0,0,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ findes egenværdierne for Hessematricen til $-0.51, 0.11, 0.54$. Begge fortegn optræder: Punktet er et saddelpunkt.

De næste 5 eksempler er meget simple, men medtages for at vise, at når det for et stationært punkt (a,b) gælder, at den Hessematricens ene egenværdi er 0, så kan på dette grundlag typen ikke bestemmes helt. Når begge egenværdier er nul, kan intet konkluderes om typen.

Eksempel 19 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^4 + y^4$. Da $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$ for $(x,y) \neq (0,0)$, er $(0,0)$ åbenbart et egentligt minimumspunkt (endog globalt). Men Hessematricen er nulmatricen, der jo kun har egenværdien 0.*

Eksempel 20 *Lad f være givet ved $f(x,y) = -x^4 - y^4$. Da $f(x,y) = -x^4 - y^4 < 0 = f(0,0)$ for $(x,y) \neq (0,0)$, er $(0,0)$ åbenbart et egentligt maksimumspunkt (endog globalt). Men Hessematricen er nulmatricen med 0 som eneste egenværdi.*

Eksempel 21 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^4 - y^4$. Vi ser hurtigt, at $(0,0)$ er et stationært punkt. Da $f(x,0) = x^4 > 0 = f(0,0)$ for $x \neq 0$, har f åbenbart et egentligt minimumspunkt langs x-aksen i punktet $(0,0)$. Da $f(0,y) = -y^4 < 0 = f(0,0)$ for $y \neq 0$, har f åbenbart et egentligt maksimumspunkt langs y-aksen i punktet $(0,0)$. Altså er $(0,0)$ et egentligt saddelpunkt. Men Hessematricen er nulmatricen med 0 som eneste egenværdi.*

Eksempel 22 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^3 + y^4$. Vi ser, at $(0,0)$ er et stationært punkt. Da $g(t) = f(th,tk) = t^3h^3 + t^4k^4$ har $g''(0) = 0$ og $g'''(0) = 18h^3 \neq 0$ for $h \neq 0$ har g ikke (og dermed f ikke) ekstremum i retninger (h,k) med $h \neq 0$. Da for $h = 0$ vi har, at $g^{(4)}(0) = 24k^4 > 0$ for $k \neq 0$, har f åbenbart et egentligt maksimumspunkt langs y-aksen i punktet $(0,0)$. Punktet er altså hverken et ekstremumspunkt eller et egentligt saddelpunkt. Men Hessematricen er nulmatricen med 0 som eneste egenværdi.*

Eksempel 23 *Funktionerne* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *og* $g(x,y) = x^2 - y^4$ *har begge* $(0,0)$ *som stationært punkt. Hessematricens egenværdier er i begge tilfælde* 2 *og* 0*. Men* f *har et egentligt minimumspunkt i* $(0,0)$*, hvorimod* g *har et egentligt saddelpunkt i* $(0,0)$*.*

Eksempel 24 *Lad* f *være givet ved* $f(x,y) = 2y^2 - 2yx^2 + x^4$*. Udtrykket kan omskrives til* $f(x,y) = \left(y - x^2\right)^2 + y^2$*, så det følger heraf, at* $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ *for alle* $(x,y) \neq (0,0)$*. Altså er* $(0,0)$ *et egentligt globalt minimumspunkt. Vi vil dog prøve vores typekriterium og bruger udtrykkets oprindelige form. Vi finder*

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4xy + 4x^3 = -4x\left(y - x^2\right) \\ f_y(x,y) &= 4y - 2x^2 \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow \left(x = 0 \vee y = x^2\right) \wedge 2y - x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

altså, at $(0,0)$ *er eneste stationære punkt. For Hessematricen finder vi*

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -4y + 12x^2 & -4x \\ -4x & 4 \end{pmatrix}$$

hvormed

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Denne matrix har egenværdierne 0 og 4. Vores kriterium siger altså intet. Vi vil nu betragte f *langs enhver ret linie gennem* $(0,0)$*. Sæt altså* $g(t) = f(th, tk)$*, hvor* $(h,k) \neq (0,0)$*. Så finder vi, at* $g''(0) = 4k^2$*. Heraf ser vi, at når blot* $k \neq 0$ *har* f *egentligt lokalt minimum langs linien med retningsvektoren* (h,k)*. Tilbage er altså kun at betragte retningen* $(1,0)$*, dvs. x-aksen. Her finder vi så med* $(h,k) = (1,0)$*, at* $g''(0) = 0, g'''(0) = 0$ *og* $g^{(4)}(0) = 24 > 0$*. Altså har* f *også egentligt lokalt minimum langs x-aksen. Det er fristende på dette grundlag at konkludere, at* f *har egentligt lokalt minimum i* $(0,0)$*.*
Selvom om denne påstand er sand, er konklusionen draget på et utilstrækkeligt grundlag, hvilket næste eksempel viser.

Eksempel 25 *Lad* f *være funktionen*

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)^2 + y^2 - 2x^2y$$

Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x\left(2y - x^2\right) \\ f_y(x,y) &= 4\left(y - x^2\right) \end{aligned}$$

hermed har vi

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow \left(x = 0 \vee 2y = x^2\right) \wedge y = x^2 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

så $(0,0)$ *er det eneste stationære punkt. Det vises uden besvær ligesom i eksemplet ovenfor, at* f *har egentligt lokalt minimum i* $(0,0)$ *langs enhver linie gennem* $(0,0)$*. Men* f *har ikke lokalt* *minimum i* $(0,0)$, *hvilket ses af, at på parablen* $y = x^2$, *der går gennem* $(0,0)$, *har* f *værdier givet ved*

$$f\left(x, x^2\right) = -x^4 < 0$$

for alle $x \neq 0$. *Vi bemærker, at* f *har egentligt maksimum langs denne parabel. Det stationære punkt* $(0,0)$ *er hverken et ekstremumspunkt eller et egentligt saddelpunkt.*

Bemærkning 26 *Man kunne fristes til at tro, at hvis* f *har netop ét stationært punkt i* R^2, *og dette er et egentligt lokalt minimumspunkt, så har* f *også nødvendigvis globalt minimum i dette punkt (med forudsætninger om eksistens af kontinuerte partielle afledede overalt). Den tilsvarende påstand gælder nemlig for funktioner af én variabel: Har en differentiabel funktion* g *netop ét stationært punkt* a *i intervallet* I, *og har* g *egentligt lokalt minimum i* a, *så er* a *også globalt minimumspunkt for* g. *Antag nemlig, at der fandtes et punkt* $c \in I$ *med* $g(c) < g(a)$. *Så må* g *antage et maksimum i et punkt* $d \neq a$ *i intervallet mellem* a *og* c. *Men i et sådan punkt har vi* $g'(d) = 0$ *i modstrid med antagelsen om, at* a *var eneste stationære punkt. Eksemplet*

$$f(x, y) = e^{2y} - 2\left(x^2 - 1\right)^2 e^y$$

der på nær et fortegn er taget fra Hellesen og Oddershede Larsen, Matematik for Ingeniører *(bind 2, 6.udgave (2000), side 113), viser, at det tilsvarende resultat er galt for funktioner af to variable. Denne funktion har et egentligt lokalt minimum i* $(0,0)$, *der også er det eneste stationære punkt. Men* $f(x,0) \to -\infty$ *for* $x \to \infty$, *så* f *har intet globalt minimum.*