

Design-MAT og gitre

Gitterkonstruktioner – matematik, analyse og design

Problemformulering – Afleveringsopgaver
01007 Design-MAT - 2008

1 Indledning

Det gennemgående tema for afleveringsopgaverne i kurset er analyse og design af såkaldte gitterkonstruktioner¹. Opgaverne er afgrænset ved primært at omhandle *plane gitterkonstruktioner*, der undergår små deformationer. Desuden regnes der med, at materialet i gitterkonstruktionen er lineært elastisk.

Temaerne for det samlede forløb er blandt andet:

- Statik: formulering med lineære ligninger, struktur af løsninger.
- Kinematik: tøjninger og matricer.
- Ligevægt i deformationer: Stivhedsmatricer og lineære ligninger.
- Stivhedsmatricer: Struktur, linearitet.
- Frie og tvungne svingninger af gitterkonstruktioner.
- Formulering af designproblemer: Funktioner af flere reelle variable.
- Store og små deformationer: Linearisering, approksimation.
- Optimering: Maksimering af stivhed.

Opgaverne vil blive løst ved brug af Maple, og der vil igennem kurset blive opbygget software (Maple-kode), der vil muliggøre detaljeret analyse og design af simple gitterkonstruktioner.

2 Gitterkonstruktioner - model og virkelighed

En gitterkonstruktion² er opbygget af *stænger*, hvis ender er indbyrdes forbundne i knudepunkter. Den enkelte knudepunktssamling tænkes udformet som et *charnier*, der kun kan overføre kræfter, ikke kraftmomenter. Som konstruktionsmateriale anvendes ofte *stål* (broer, el-master, tv-master) eller *træ* (spærfag).

Den virkelige gitterkonstruktion vil vi modelteknisk beskrive som værende sammensat af en række *punktmasser*, der er indbyrdes forbundne med *masseløse fjedre*. I en mere detaljeret model vil man også modellere en eventuel dæmpning ved at benytte *masseløse støddæmpere*, der forbindes til punktmasserne.

¹Se siderne 299–319 i bogen fra kurset *Mekanik og Materialer*, W.F. Riley, L.D. Sturges, D.H. Morris, “Statics and Mechanics of Materials”, John Wiley 2002. Se også slides (ved Ole Sigmund, MEK) tidligere benyttet i *Mekanik og Materialer*; disse kan findes på hjemmesiden.

²Dette afsnit kan overspringes, da det omhandler stof, der er dækket af undervisningen i kurset *Mekanik og Materialer*. Læg dog mærke til kommentarerne vedrørende modellering af gitternes masse – dette vil være relevant når vi til efteråret skal se på svingninger af gitre.

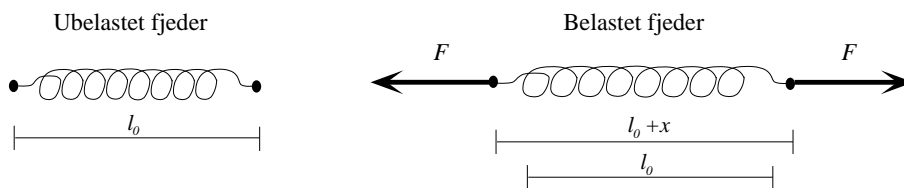


Figure 1: Ubelastet og belastet fjeder.

2.1 Punktmasse

Ved en punktmasse forstår vi en partikel, som er uden udstrækning, men alligevel besidder en given masse m . Det bemærkes, at der er tale om et ikke-fysisk begreb. For en punktmasse gælder, at den ikke har noget inertimoment om nogen akse gennem sit tyngdepunkt. Punktmassen kan således ikke besidde rotationsenergi og frembyder således mulighed for beregningsmæssige lettelser i mekanisk sammenhæng.

2.2 Masseløs fjeder – Stang

2.2.1 Fjeder

En (masseløs) fjeder har en længde og en retning, der er fastlagt ved dens endepunkters beliggenhed. I ubelastet tilstand har fjederen en vis hvilelængde l_0 . En fjeder må for at forlænges et stykke x i forhold til sin hvilelængde påvirkes af ydre kræfter F som vist på Figur 1. For sammenhængen mellem kraften F og forlængelsen x gælder:

$$F = kx \quad (1)$$

Proportionalitetsfaktoren k kaldes fjederens *fjederkonstant*. For sammenhørende positive værdier af deformationen x og kraften F anvendes betegnelserne *forlængelse* og *trækkraft*. De tilsvarende betegnelser for sammenhørende negative værdier af x og F er *sammentrykning* og *trykkraft*. Denne fortegnskonvention er standard. I det følgende beskrives, at også en stang kan være at opfatte som en fjeder.

2.2.2 Stang

En *stang* er et slankt, retlinet konstruktionselement med konstant tværsnitsareal. En stang anvendes til – i det væsentlige – at optage kræfter i sin længderetning. En stang, der påvirkes af en ydre kraft F (jvf. Figur 1), vil for passende små værdier af F deformeres som en fjeder med fjederkonstanten k givet ved

$$k = \frac{E A}{L} \quad (2)$$

hvor E er stangmaterialets *elasticitetsmodul* (Youngs modul), A er stangens tværsnitsareal i ubelastet tilstand, og L er stangens hvilelængde. Det ses af ligningerne (1) og (2), at stangens længde kun afhænger af den øjeblikkelige ydre kraft, og således er uafhængig af forhistorien. Stangen siges da at undergå *elastiske deformationer*. (Ved passende store værdier af F og efterfølgende aflastning kan der forekomme blivende deformationer. Ved ny belastning med passende små værdier af F kan det konstateres, at også elasticitetsmodulet kan undergå ændringer. For stål taler man da om koldhærdning.)

Det er en eksperimentel kendsgerning, at der findes stænger, som i et væsentligt virkeområde, med god nøjagtighed lader sig beskrive ved ligningerne (1) og (2).

Hvis det forekommer lidt overraskende, at stænger kan opfattes som fjedre, skyldes det formentlig, at de stænger, som omgiver os i dagligdagen, undergår deformationer, som ikke umiddelbart registreres med det menneskelige sansesystem. Det er endvidere væsentligt at gøre sig klart, at en lille ændring i en stangs længderetning meget vel kan resultere i en væsentligt større bevægelse på tværs heraf.

I det følgende skal vi betragte gitterkonstruktioner, der modelteknisk alle er opbygget af punktmasser og masseløse fjedre/stænger.

3 Gitterkonstruktioner: Standardeksempler i Design-MAT

Figurene 2–6 viser en række *plane* gitterkonstruktioner³ med $N+2$ knudepunkter og M stænger⁴.

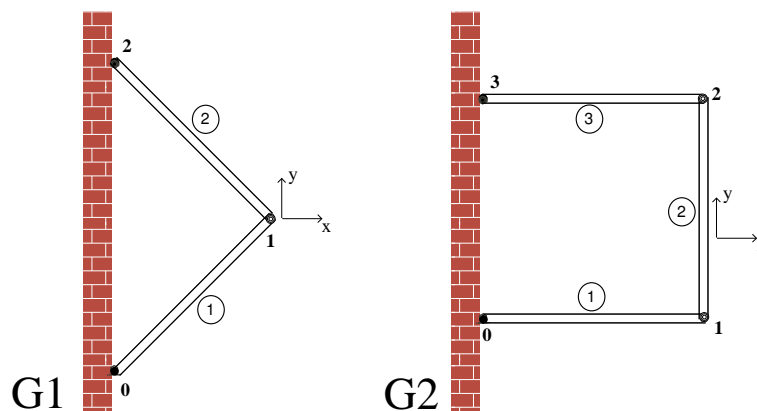


Figure 2: Definitionsskitse I. Vinklerne i knuderne er alle 90° .

Knudepunkterne er nummereret fra 0 til $N+1$. Knudepunkterne ved de *ueftergivelige* vægge⁵ er tildelt nummer 0 og nummer $N+1$. De bevægelige knudepunkter har således numrene $1, \dots, N$. Hvert af de bevægelige knudepunkter kan bevæge sig i konstruktionens plan. Denne bevægelse kan opdeles i en vandret del regnet positiv mod højre og en lodret del regnet positiv opad, i alt $2N$ forskydningskomponenter (man siger at antallet af *forskydningsfrihedsgrader* er $2N$).

Lad j betegne knudepunktsnummeret. Den vandrette forskydningskomponent i et givet knudepunkt betegnes u_i , hvor $i = 2j - 1$. Den lodrette forskydningskomponent i et givet knudepunkt betegnes u_i , hvor $i = 2j$. Den samlede forskydning af hele gitterkonstruktionen er altså bekrævet ved en vektor u med ialt $2N$ elementer.

En tilsvarende fortegnskonvention og notation benyttes for kraftkomponenter i knuderne, vandret og lodret. Specielt er de ydre kræfter F i de frie knuder også en vektor med ialt $2N$ elementer.

³Man er velkommen til at benytte andre eksempler; benyt for eksempel nogle af de gitterkonstruktioner, der er behandlet i kurset Mekanik og Materialer.

⁴I de senere beregninger kan man selv vælge passende dimensioner for længder, materialedata og kræfter. Man kan vælge realistiske data eller man kan tage udgangspunkt i tallet 1.

⁵Knuderne er altså her fastholdt i både horisontal og vertikal retning – understøtningen af gitterkonstruktionerne er altså statisk ubestemt.

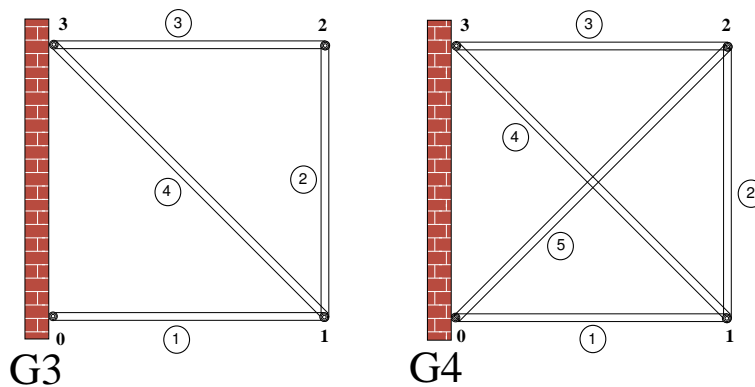


Figure 3: Definitionsskitse II. Alle vinkler er hele multipla af 45° .

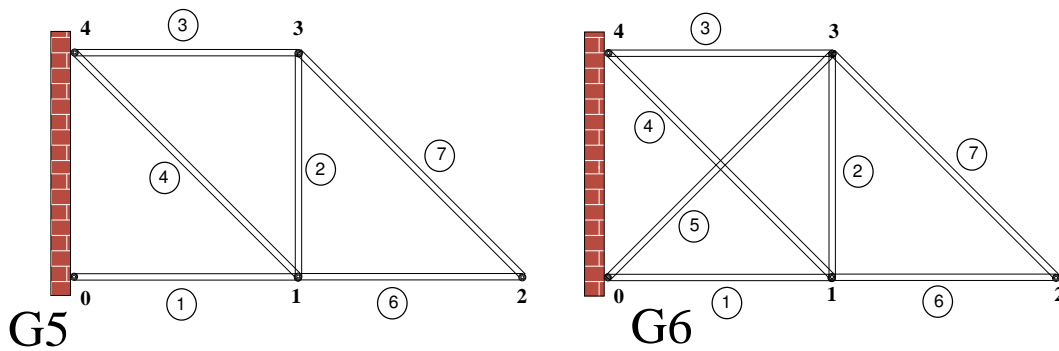


Figure 4: Definitionsskitse III. Alle vinkler er hele multipla af 45° .

Ovenstående nummerering af stænger, knuder og bevægelses- og kraftkomponenter er vilkårlig i den forstand, at den udgør én blandt *MANGE* ligeværdige muligheder.

4 Statik

Vi begynder med at betragte betingelser for statisk ligevægt opskrevet som lineære ligninger, som set i kurset i Mekanik og Materialer. Her vil vi dog hurtigt benytte os af den *matrix*-notation, som er en central del af kurset 01007 Design-MAT.

Her og i det følgende regner vi med, at gitterkonstruktionen deformeres forholdsvis lidt under de belastninger, der betragtes. Er dette tilfældet, tillader vi os at benytte de i hvilestillingen indgående vinkler ved projektion af stangkræfter på vandret og lodret⁶.

Opgave G 1 *Gør rede for at betingelsen for statisk ligevægt i de frie knuder kan skrives som et lineært ligningssystem i stangkræfternes størrelser $S_i, i = 1, \dots, M$, regnet med fortegn (positivt hvis fjederen er i træk og negativt hvis fjederen er i tryk).*

⁶Vi kommer i efteråret tilbage til en præcisering af, hvornår dette er en rimelig fremgangsmåde.

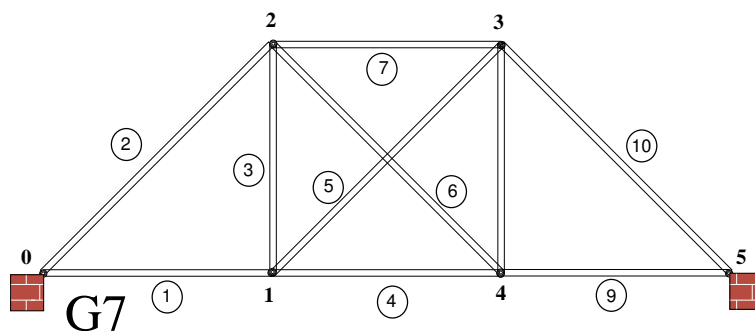


Figure 5: Definitionsskitse IV. Her er alle vinkler et helt multiplum af 45° . Man kan her selv bestemme en nummerering af stængerne.

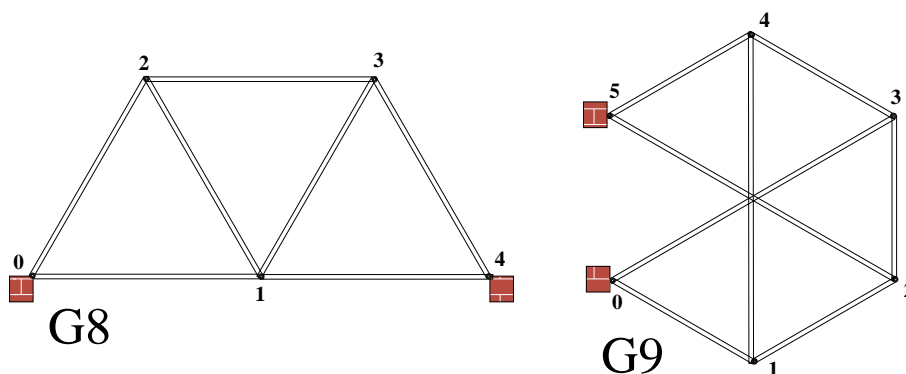


Figure 6: Definitionsskitse V. Alle vinkler er hele multipla af 60° . Man kan her selv bestemme en nummerering af stængerne.

1. Hvad er højresiderne i ligningerne?
2. Angiv koefficientmatricen for nogle af standard-gitrene og find stangkræfterne for nogle typiske valg af ydre kræfter.
3. Hvornår giver disse ligninger entydige løsninger?
4. Har ligningerne altid en løsning?

Læg mærke til, at vi her vælger at se bort fra ligevægtsbetingelserne i de fastgjorte knuder. Hvis man ønsker at finde reaktionskræfterne fra understøtningerne, kan dette altid gøres efterfølgende, efter man har bestemt alle stangkræfterkræfter (overvej hvorfor dette er muligt).

Opgave G 2 I opgave 1 er det vist, at statisk ligevægt kan udtrykkes som et lineært ligningssystem i de variable $S_i, i = 1, \dots, M$. Dette ligningssystem skriver vi nu med matrixnotation på formen:

$$\widehat{B}S = -F \tag{3}$$

hvor F er de ydre kræfter i de frie knuder og S er stangkræfterne.

1. Angiv dimensionen af \widehat{B} for ethvert af standard-gitrene.
2. Angiv dimensionen af \widehat{B} for en vilkårlig gitterkonstruktion.
3. Gør rede for, hvordan søjlerne i \widehat{B} er konstrueret. Hvilken information om gitterkonstruktionen indgår i koefficientmatricen?
4. Angiv rangen af \widehat{B} for 3 af standard-gitrene (vælg selv).
5. (**)⁷ Overvej hvordan man for eksempel med Maple eller et andet programmeringssprog vil opskrive \widehat{B} direkte på basis af information om stangnumre og knudepunktsplaceringer. Lav eventuelt et lille program, der kan gøre dette.

En gitterkonstruktion siges at være statisk bestemt, hvis stangkræfterne S kan bestemmes entydigt ud fra kravet om statisk ligevægt, og hvis dette er muligt for enhver ydre last F .

Opgave G 3 1. Hvilke af standard-gitrene $G1-G4$ er statisk bestemt? Undersøg eventuelt også standard-gitrene $G5-G9$.

2. Overvej hvilke betingelser antallet af stænger og antallet af knuder skal opfylde for, at en gitterkonstruktion kan være statisk bestemt. Og hvad skal der gælde om rangen af \widehat{B} ?
3. Man kan have situationer, hvor en gitterkonstruktion ikke kan være i ligevægt med enhver mulig last, men godt nogle. Overvej hvornår det kan ske (benyt 2-3 af standard-gitrene som eksempler). Udtryk dette i termer af antallet af stænger og antallet af knuder og rangen af \widehat{B} . Overvej, om sådanne gitterkonstruktioner kan have interesse.

5 Stivhedsmatricen I

Som vi har set ovenfor, kan man kun finde stangkræfterne alene ud fra betingelsen om statisk ligevægt, når gitterkonstruktionen er statisk bestemt. Man er derfor nødt til at tage en *konstitutiv* lov ind i betragtningerne – denne vil tillade at opskrive en relation mellem forskydninger af knuderne og stangkræfterne. Til dette er man først nødt til at finde en relation mellem knudepunktsforskydningerne (eller knudepunktsflytningerne) og stangforlængelserne, idet man herefter kan benytte sammenhængen (1) mellem en stangkraft og en forlængelse.

5.1 En tilnærmelse

I hvad man betegner *lineær* teori for deformation af en gitterkonstruktion benytter man sig af følgende udtryk for en stangs forlængelse

$$\Delta L = -u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta + v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \quad (4)$$

hvor notationen fremgår af Figur 7. Bemærk, at θ er vinklen mellem vandret og stangen, aflæst i den knude hvor forskydningen er givet som (u_1, u_2) (i henholdsvis vandret og lodret). I den anden knude er forskydningen tilsvarende givet som (v_1, v_2)

⁷De to stjerner (**) betyder, at opgaven i Design-MAT skal løses på et senere tidspunkt i forhold til den rækkefølge, der angives her.

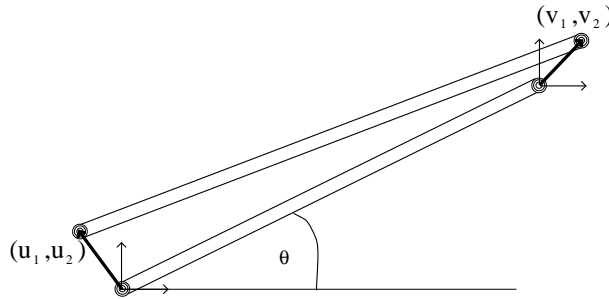


Figure 7: Deformation af en stang.

Opgave G 4 1. Vis, at brug af udtrykket (4) betyder at man for den samlede gitterkonstruktion har en sammenhæng

$$\varepsilon = Bu \quad (5)$$

hvor ε omfatter samtlige stangforlængelser og u indeholder samtlige bevægelseskomponenter. Her er stangforlængelserne nummereret efter samme forskrift som stangkræfterne.

2. Vis, at

$$B^T = -\hat{B} \quad (6)$$

3. (**) Undersøg om udtrykket (4) er en rimelig god approksimation for forlængelsen af en gitterstang. Prøv med en af de simple standardgitre. Simplere endnu kan man blot undersøge en vandret stang, der er fastholdt i den ene ende. Man kan her plote afvigelsen fra den korrekte stangforlængelse som funktion af de to forskydninger af den frie knude. Undersøg for eksempel hvor meget man kan flytte den frie knude, hvis afvigelsen skal være mindre end 5%.

4. (**) Er det muligt, at $Bu = 0$? I givet fald, hvad er den fysiske betydning af dette? Overvej om der er relevante gitterkonstruktioner, hvor dette er tilfældet (undersøg for eksempel de simple standardgitre).

5. (**) Overvej eventuelt hvordan formel (4) kan tolkes rent geometrisk (som passende projektioner). Betragt eventuelt en situation, hvor man i (4) har, at $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

Bemærk, at vi tidligere har antaget at forskydningerne er forholdsvis små således, at den statiske ligevægt kunne udtrykkes ved vinkler udregnet for den ubelastede konstruktion.

5.2 Ligevægt udtrykt i forskydninger

Vi skal nu opskrive betingelsen for statisk ligevægt i termer af knudepunktsforskydningerne, idet stangkræfterne er givet via Hookes lov (1) og stangforlængelserne er givet via udtrykket (5).

Opgave G 5 1. Vis, at ligevægtsbetingelsen for en gitterkonstruktion kan skrives som

$$Ku = F \quad (7)$$

Her er K den såkaldte stivhedsmatrix, der kan udtrykkes som

$$K = B^T DB \quad (8)$$

hvor D er en diagonalmatrix.

2. Angiv diagonalelementerne i D for en generel gitterkonstruktion.
3. Angiv dimensionen af K for enhver af standard-gitrene.
4. Angiv dimensionen af K for en vilkårlig gitterkonstruktion.
5. Angiv K og dens rang for nogle af standard-gitrene. Find knudepunktsforskydningerne for nogle typiske valg af ydre kræfter.
6. Diskutér hvornår ligningen (7) kan løses (hvornår findes der en løsning, og er denne entydig eller ej?).
7. Overvej hvordan mulighederne for løsning af (7) hænger sammen med egenskaberne af B og D .
8. Hvad er den fysiske betydning af, at der eventuelt er uendelig mange løsninger?
9. (**) Overvej hvordan man for eksempel med Maple eller et andet programmeringssprog vil opskrive K direkte på basis af information om stangnumre, knudepunktsplaceringer og materialedata (E og A) for stængerne. Lav eventuelt et program, der kan gøre dette.

6 System med én masse og én fjeder

Som en indledende analyse af svingninger i gitterkonstruktioner betragtes først et system bestående af én masse og én fjeder (Figur 8). Massens størrelse betegnes m og fjeder-konstanten er k . Systemet tænkes ophængt, således at det kun kan bevæge sig *longitudinalt*.

Når massen svinger, vil der foregå en hvis *dæmpning* af bevægelsen. Her modelleres dæmpningen som en såkaldt *viskos dæmpning*. Det antages således, at massen påvirkes af en kraft $c\dot{x}$ modsat rettet bevægelsesretningen⁸. Her er c en dæmpningsfaktor, der for eksempel afhænger af egenskaberne af en støddæmper, der er forbundet til punktmassen.

Systemet er yderligere påvirket af en periodisk kraft med størrelsen $f \cos(\Omega t)$, der virker på massen (Figur 8).

Differentialligningen for massen bliver således:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \cos(\Omega t) \quad (9)$$

hvor $\ddot{(\)}$ betyder differentitation 2 gange mht. til tidsvariablen t . Her er $m > 0$, $k > 0$, og $c \geq 0$.

Opgave G 6 1. Betragt den til (9) svarende homogene differentialligning med nul på højresiden og med $m = k = 1$.

Find for $c = 0$, $c = 0.5$, $c = 2$ og $c = 5$ den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Benyt Maple og kontrollér nogle af løsningerne i hånden.

Vælg begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0.1$ og $\dot{x}(0) = 0$, og find de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i Maple.

2. Find den generelle form for løsningen til den homogene differentialligning. Man kan her antage, at $c \geq 0$. Undersøg hvilke betingelser parametrene k , m , c skal opfylde, hvis systemet skal udføre harmoniske (eventuelt dæmpede) svingninger. Forklar bevægelsen af massen, hvis svingninger ikke kan forekomme.

⁸ $\dot{(\)}$ betyder differentitation én gang mht. t .

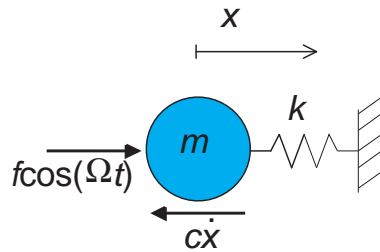


Figure 8: System med en masse, en fjeder, en dæmper og en harmonisk belastning.

Opgave G 7 Vi betragter nu den inhomogene differentiallygning (9), hvor vi sætter $m = k = 1$ og $f = 1$, $\Omega = 1$.

Vælg begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0.1$ og $\dot{x}(0) = 0$, og find for $c = 0$, $c = 0.5$, $c = 2$ og $c = 5$ de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i Maple.

Opgave G 8 1. Regn opgave 15 fra ugesedlerne om de komplekse tal.

2. Find en partikulær løsning til ligning (9) ved at bruge den komplekse gætte-metode og udtryk denne på formen (benyt kompleks notation og gerne Maple)

$$x_p(t) = A_{MP} \cos(\Omega t + \phi) \quad (10)$$

hvor A_{MP} (amplituden) og ϕ (faseforskydningen) afhænger af k, m, c og Ω . Hvad betyder A_{MP} og ϕ rent fysisk?

3. Plot for nogle valgte værdier af k, m, c en såkaldt amplitudekarakteristik og en såkaldt fasekarakteristik, dvs. A_{MP} henholdsvis ϕ som funktion af frekvensen Ω .
4. Find den frekvens Ω for hvilken $A_{MP}(\Omega)$ har et maksimum (udtrykkes generelt i termer af k, m, c). Sammenlign med udtrykket for frekvenserne af de frie svingninger (både for udæmpede (dvs. $c = 0$) og for dæmpede svingninger).

5. Antag nu, at $c > 0$. Vis, at der for en vilkårlig løsning $x_0(t)$ til den homogene differentiallygning gælder, at

$$x_0(t) \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow \infty \quad (11)$$

Vis også, at der for en vilkårlig løsning $x_1(t)$ til den inhomogene differentiallygning gælder, at

$$|x_1(t) - x_p(t)| \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow \infty \quad (12)$$

Sidstnævnte egenskab gør, at man kalder $x_p(t)$ for det stationære svar, og at man for en tvungen svingning normalt primært interesserer sig for egenskaber ved $x_p(t)$. Hvorfor?

7 Stivhedsmatricen II

7.1 Stivheden af en konstruktion

Et mål for stivheden af en konstruktion kan fås ved, at udregne forskydningen i retningen af den last gitterkonstruktionen udsættes for. Dette mål kaldes konstruktionens eftergivelse, på engelsk "compliance", og i det følgende betegnet C . Vi beregner altså C som

$$C = F^T u \quad (13)$$

hvor u er forskydningen for den givne last F .

Opgave G 9 1. Vis, at stivhedsmatricen er symmetrisk, dvs. at

$$K^T = K \quad (14)$$

Benyt her, at K er givet ved ligningen (8).

2. Vis, at

$$C = u^T K u \quad (15)$$

hvor u er forskydningen for den givne last F .

3. Vis, at eftergiveligheden C aldrig er negativ.

4. Hvad er betingelsen for, at C er strengt positiv? Benyt her (15) sammen med (8).

5. Vis, at hvis stivhedsmatricen er regulær, da har vi, at

$$C = F^T K^{-1} F \quad (16)$$

Opgave G 10 Beregn eftergiveligheden C for nogle af standard-gitrene. Benyt dimensioner og lasttilfælde, som gør, at det giver mening at sammenligne disse forskellige designs ved hjælp af beregningen af C . Hvilken er bedst?

7.2 Linearitet

Vi skal nu se på egenskaber ved stivhedsmatricen for en gitterkonstruktion og hvordan disse egenskaber kan udnyttes.

Opgave G 11 1. Vis, at stivhedsmatricen afhænger lineært af stangarealerne $A_i, i = 1, \dots, M$.
Det vil sige, at med al anden data fastholdt, da er afbildningen

$$A \mapsto K \quad (17)$$

en lineær afbildning fra \mathbb{R}^M til $\mathbb{R}^{2N \times 2N}$.

2. Vis, at stivhedsmatricen afhænger lineært af stængernes elasticitetsmoduler $E_i, i = 1, \dots, M$.
Det vil sige, at afbildningen

$$E \mapsto K \quad (18)$$

er en lineær afbildning fra \mathbb{R}^M til $\mathbb{R}^{2N \times 2N}$ (al anden data er fastholdt).

3. Vis, at det samlede volumen af materiale i en gitterkonstruktion afhænger lineært af stangarealerne og lineært af stængernes længder.

4. Ovenstående information kan benyttes ved simple dimensioneringsovervejelser for gitre.

(a) Det viser sig, at en given gitterkonstruktion udsættes for dobbelt så store belastninger, som først antaget. Hvordan kan man simpelt vælge et nyt design, således at udbøjningerne (forskydningerne) forbliver de samme som først beregnet?

- (b) Det viser sig praktisk at benytte et allerede kendt design til en ny opgave. Den nye gitterkonstruktion skal dog være tre gange så stor, forstået på den måde at alle knudeafstande skal forøges med en faktor 3. Hvordan kan man simpelt vælge stangarealerne, således at forskydningerne forbliver de samme som først beregnet (for samme last). Hvad kan man vælge, hvis man accepterer forskydninger, der relativt set er uændrede.
- (c) Det viser sig, at en given gitterkonstruktion udsættes for dobbelt så store belastninger, som først antaget. Hvordan kan man simpelt vælge et nyt design, således at eftergivigheden C forbliver den samme som først beregnet.
- (d) Overvej hvordan en "ståbi" over gitterkonstruktioner kan struktureres under hensyntagen til ovenstående; findes der et slags dimensionsløst katalog?

7.3 Nogle lineære afbildninger

Vi har tidligere set hvordan for eksempel matricen \hat{B} giver en relation mellem stangkræfter og ydre belastninger. Inden for rammerne af teorien for lineære afbildninger skal vi nu se på denne relation, relationen mellem stangforlængelser og kundepunktsflytninger givet ved B samt relationen mellem kundepunktsflytninger og ydre belastninger givet ved K .

- Opgave G 12**
1. Gør rede for, at mængden af ydre kræfter V_Y , mængden af stangkræfter V_S , mængden af stangforlængelser U_{st} og mængden af knudepunktsforskydninger U_k er reelle vektorrum, og angiv dimensionen af rummene og en mulig (naturlig) basis.
 2. Gør rede for, at udtrykket (3) definerer en lineær afbildning f fra V_S ind i V_Y . Angiv kernen $\ker(f)$ og billedrummet $\text{Im}(f)$ for f . Hvad betyder det rent fysisk hvis $\ker(f) \neq \{0\}$ og hvis $\text{Im}(f) \neq V_Y$?
 3. Gør rede for, at udtrykket (5) definerer en lineær afbildning g fra U_k ind i U_{st} . Angiv kernen $\ker(g)$ og billedrummet $\text{Im}(g)$. Hvad betyder det rent fysisk hvis $\ker(g) \neq \{0\}$ og hvis $\text{Im}(g) \neq U_{st}$?
 4. Gør rede for, at matricen D fra (8) definerer en lineær afbildning h_{Hooke} fra U_{st} ind i V_S . Angiv kernen $\ker(h_{\text{Hooke}})$ og billedrummet $\text{Im}(h_{\text{Hooke}})$ for h_{Hooke} . Hvad betyder dette?
 5. Gør rede for, at udtrykket (7) definerer en lineær afbildning h fra U_k ind i V_Y . Angiv kernen $\ker(h)$ og billedrummet $\text{Im}(h)$ for h for det tilfælde, hvor K er regulær.

8 Egenverdier for gitre I

8.1 Stivhedsmatricen III

Vi har tidligere set (jf opgave G9), at stivhedsmatricen K for et gitter er symmetrisk og at der for en vilkårlig forskydning u gælder, at $u^T K u$ aldrig er negativ.

- Opgave G 13**
1. Vis, at de reelle egenverdier for K aldrig er negative, uafhængigt af data.
 2. Hvornår kan en reel egenverdi være lig nul? (jf opgave G9).

3. Find samtlige egenverdier og egenvektorer for nogle af standardgitrene (med passende valg af data). Undersøg ved inspektion af disse resultater om stivhedsmatricen K kan diagonaliseres⁹. Undersøg ligeledes værdierne $u^T u$ for egenvektorer u_i og u_j hørende til forskellige egenverdier λ_i og λ_j , $\lambda_i \neq \lambda_j$.

9 Frie, udæmpede svingninger I

I det følgende skal vi betragte dynamik af gitterkonstruktioner, der modelteknisk er opbygget af punktmasser forbundet med de masseløse fjedre/stænger. Sidstnævnte har været grundlaget for den statiske analyse, der har været temaet hidtil. Vi skal først behandle løsningsteknikker for systemer med flere frihedsgrader¹⁰ og dernæst analysere egentlige gitterkonstruktioner.

Ved *frie* svingninger forstås svingninger uden ydre kraftpåvirkning, det vil sige at det tilhørende differentialligningssystem er *homogent*.

Ved *udæmpede* svingninger forstås svingninger, hvor den mekaniske energi ikke mindskes som følge af friktionskræfter. Dette betyder at de opstillede differentialligningssystemer *ikke indeholder første afledede af deformationen med hensyn til tiden*.

9.1 To punktmasser, tre fjedre

To punktmasser m_1 og m_2 bevæger sig langs en ret linie¹¹. Med tre masseløse fjedre med fjederkonstanterne k_1, k_2 og k_3 er punktmasserne såvel indbyrdes forbundet som forbundet med ueftergivelige vægge som vist i Figur 9.

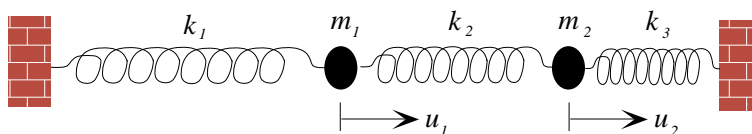


Figure 9: Definitionsskitse: To punktmasser, tre fjedre.

Lad u_1 og u_2 betegne punktmassernes udsving i forhold til den position, hvor der er statisk ligevægt. Da vi nu interesserer os for *dynamikken* af systemet afhænger u_1 og u_2 af tiden t .

Opskrives Newton's anden lov for de to delsystemer bestående af punktmasserne m_1 og m_2 fås et differentialligningssystem, der samlet kan skrives på formen

$$M \ddot{u} + K u = F \quad (19)$$

hvor $\ddot{(\)}$ betyder differentitation 2 gange mht. til tidsvariablen t , og hvor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

⁹Vi skal senere i kurset se nærmere på egenskaber ved reelle, symmetriske matricer, se LA bogen, Kapitel 8. Det viser sig at en reel, symmetriske matrix A altid kun har reelle egenverdier og at A kan diagonaliseres, idet der findes en basis bestående af egenvektorer.

¹⁰Se eventuelt også afsnit 4.1-4.3 af bogen D.J. Inman: "Engineering Vibration" – bogen benyttes i kurset om Dynamik og Svingninger

¹¹Se eventuelt også eksempel 4.2.5 i D.J. Inman: "Engineering Vibration".

Desuden betegner F de ydre kræfter på masserne, der ligesom vektoren u afhænger af tiden. Vi skal dog her primært se på det *homogene* system med $F = 0$, idet vi vil undersøge systemets frie svingninger, dvs finde løsninger til systemet

$$M \ddot{u} + K u = 0 \quad (21)$$

Matricerne M og K betegnes som henholdsvis *massematricen* og *stivhedsmatricen* (sidstnævnte i overensstemmelse med betegnelsen for generelle gitre).

Opgave G 14 1. Gør rede for, at M og K er symmetriske og regulære matricer med positive egenverdier (Maple!). Man kan her eventuelt sætte $k_1 = k_3$ for at simplificere udtrykkene.

2. Gør rede for, at $M^{-1}K$ har to lineært uafhængige egenvektorer, og at $M^{-1}K$'s egenverdier alle er positive reelle tal. Brug gerne Maple og evt. at $k_1 = k_3$.

Opgave G 15 Lad Λ være en diagonalmatrix, hvis diagonalelementer er $M^{-1}K$'s egenverdier λ_1 og λ_2 . Lad Q være en kvadratisk matrix (af samme type som K, M og Λ), som søjle for søjle indeholder egenvektorerne u_1 og u_2 hørende til de i Λ anførte egenverdier.

Substitutionen $u = Qw$, fører nu til at (21) bliver et ukoblet differentiaalligningsystem, hvorfra $w = [w_1 \ w_2]^T$ umiddelbart kan findes.

Vis, at

$$u(t) = u_1 \cos(\sqrt{\lambda_1}t) \quad \text{og} \quad u(t) = u_2 \cos(\sqrt{\lambda_2}t)$$

er løsninger til systemet (21). Her er $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2$ systemets egen(vinkel)frekvenser med tilhørende egensvingningsformer u_i , $i = 1, 2$.

Opgave G 16 Lad de to punktmasser have den samme masse m og de tre fjederkonstanter have den samme fjederkonstant k .

Vis, ved hjælp af ovenstående, at den fuldstændige løsning til ligning (21) kan skrives

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \phi_1\right) + A_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \phi_2\right)$$

sammenlign eventuelt med Maples *dsolve*. Skitsér (eller plot eller lav en animation) de to egensvingningsforløb (med passende valg af m og k).

Det bemærkes, at svingningen er karakteriseret som værende en linearkombination af netop to harmoniske svingninger, hvis egen(vinkel)frekvenser er fastlagt af de indgående punktmasser og fjederkonstanter.

9.2 Generaliseret egenverdiproblem

Opgave G 17 1. Vis, at egenverdiproblemet

$$(M^{-1}K)u = \lambda u \quad (22)$$

er ensbetydende med, at der gælder

$$Ku = \lambda Mu \quad (23)$$

Dette betegnes som et det udvidede matrixegenverdiproblem¹²

¹²Se også hjælpen til Maples *Eigenvalues*.

2. Vis, at med den invertible matrix

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

gælder der, at (23) er ensbetydende med at

$$\tilde{K}y = \lambda y \quad (25)$$

hvor

$$\tilde{K} = LKL \quad (26)$$

er en symmetrisk matrix, og hvor $u = Ly$. Vis også, at $z^T \tilde{K}z$ altid er positiv, for enhver z .

Ud fra egenskaberne for symmetriske matricer ved man hermed – uden yderligere beregning – at egenverdierne for alle tre problemer (22), (23) og (25) er de samme positive reelle tal, samt at både $M^{-1}K$ og \tilde{K} kan diagonaliseres.

9.3 Dæmpning

Når masserne svinger, vil der foregå en hvis *dæmpning* af bevægelsen. Her vil vi modellere dæmpningen som en såkaldt *viskos dæmpning*. Det antages, at hver masse påvirkes af en kraft $c\dot{u}_i$; modsat rettet bevægelsesretningen, hvor c er en dæmpningsfaktor, der blandt andet afhænger af massernes form og det omgivende medies viskositet.

Bevægelsesligningen kan skrives som (sammenlign med (21))

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (27)$$

hvor C er en *dæmpningsmatrix*, der er givet ved

$$C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (28)$$

Opgave G 18 1. Vis, at bevægelsesligningerne (27) ligeledes kan skrives som et system af første-ordens differentialligninger, som på matrixform er givet som

$$\dot{q} = Aq + \tilde{F} \quad (29)$$

hvor forskydningerne og hastighederne v_1, v_2 af de 2 masser er samlet i vektoren $q = [u_1, u_2, v_1, v_2]^T$. Angiv et udtryk A og \tilde{F} .

2. Lad de to punktmasser have den samme masse $m = 1$ og de tre fjederkonstanter have den samme fjederkonstant $k = 1$. Find for et antal værdier af c egenverdierne og egenvektorerne for A og find hermed samtlige løsninger til (29) for det tilfælde, hvor de ydre kræfter er nul (frie svingninger).

Sammenlign egenverdierne for varierende værdier af c med egenverdierne fundet for det udæmpede system. Hvordan kan man fortolke henholdsvis den reelle og den imaginære del af egenverdierne?

Skitsér (eller plot eller lav en animation) de to egensvingningsforløb for forskellige værdier af c .

10 Frie, udæmpede svingninger II

Vi skal nu bruge samme teknikker som ovenfor på nogle af standardgitrene. Først fordeles gitterkonstruktionens masse nu i punktmasser i knudepunkterne, herunder også de 2 faste knudepunkter. Dette gøres (pragmatisk) ved at fordele den enkelte stangs masse med halvdelen til hvert knudepunkt i stangens ender. Hermed kommer masserne i modellen til at afhænge af stangarealerne, stanglængderne og massefylden ρ_i af materialet i stængerne.

Opskrives Newtons anden lov for hver af de frie knuder fås $2N$ differentiaalligninger, der samlet skrives på formen

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (30)$$

hvor forskydningerne u og de ydre kræfter F nu er tidsafhængige. I det statiske tilfælde hvor u ikke afhænger af tiden har man, at $\ddot{u} = 0$ og ligningen (30) reducerer til statikligningen (7).

Opgave G 19 1. Angiv massematricen M for nogle af standardgitrene.

2. Beregn for passende valg af data egen(vinkel)frekvenserne for nogle af standardgitrene. For de to laveste egen(vinkel)frekvenser bedes de tilhørende egensvingninger illustreret, f.eks. ved at vise konstruktionens hvilestilling og de maksimale udsving (passende skaleret) på samme figur. I Maple kan man benytte animation.

11 Funktioner af flere reelle variable

11.1 Potentiel energi

Den potentielle energi for en gitterkonstruktion¹³ beregnes som

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}u^T Ku - F^T u \quad (31)$$

Opgave G 20 1. Udregn gradienten af Φ som funktion af u . Hvad er værdien af gradienten, når u er forskydningen u_0 i ligevægtspositionen?

2. Udregn de anden-afledede $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}$.
3. Plot Φ som funktion af u for standardgitteret $G1$ (med passende valgt data) (3D-plot og konturplot), og angiv positionen af ligevægtspunktet. Hvad karakteriserer øjensynligt ligevægtspunktet?

11.2 Stivhed som funktion af stangarealer

Vi har tidligere (formel (13)) defineret eftergiveligheden C af en gitterkonstruktion. Værdien af C er bestemt af den eksterne last og af data for gitterkonstruktionen. Sidstnævnte omfatter arealer, længder og Youngs modul for stængerne. Her her stanglængderne egentlig givet ud fra knudepunktsernes koordinater.

Opgave G 21 Vi betragter her standardgitteret $G1$, med given knudepunktspacering og given materialedata, samt given last (vælg selv data).

¹³For det tilfælde vi behandler her – dvs. lineær elastisk opførsel og små tøjninger og deformationer

1. Bestem ved direkte beregning i Maple C som en funktion af stangarealerne (a_1, a_2) og plot $C(a_1, a_2)$. Bestem gradienten af $C(a_1, a_2)$. Hvad er fortegnet på $\frac{\partial C}{\partial a_i}$ og er dette i overensstemmelse med ens intuition?
2. Vis, at stivhedsmatricen kan skrives på formen

$$K = a_1 K_1 + a_2 K_2 \quad (32)$$

hvor K_1 og K_2 ikke afhænger af (a_1, a_2) . Angiv K_1 og K_2 .

3. Man kan vise (se nedenfor), at

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = -u^T K_i u \quad (33)$$

hvor u er forskydningen beregnet for den givne last F og for de værdier af arealerne for hvilke man søger tallene $\frac{\partial C}{\partial a_i}(a_1, a_2)$.

Stemmer denne formel overens med resultatet beregnet i forrige spørgsmål?

Fordelen ved formel (33) er, at man for store gitterkonstruktioner ikke behøver differentiere et stort vanskeligt udtryk for C , men kan finde de afledede ved at løse ligevægtsligningen (en lineær ligning) og så foretage et par multiplikationer.

Opgave G 22 Vi betragter her standardgitteret $G4$, med given knudepunktspacering og given materialedata, samt given last (vælg selv data). Af æstetiske årsager vælger man at have det samme stangareal a_1 i stængerne 1, 2 og 3, og samme stangareal a_2 i stængerne 4 og 5. Eftergiveligheden C er derfor nu en funktion af de to variable (a_1, a_2) . Plot $C(a_1, a_2)$ og bestem gradienten af $C(a_1, a_2)$.

11.3 Egenværdier som funktion af stangarealer

Når man betragter svingende konstruktioner, er man ofte interesseret i at kunne finde designs med egenfrekvenser, som er i passende afstand fra frekvenser af udefra kommende kilder (for eksempel for at undgå resonans).

Et ofte anvendt kriterium for design af konstruktioner er at søge et design, som har så høje egenfrekvenser som muligt¹⁴. Dette kan udtrykkes som at den laveste egenværdi λ_{\min} af matricen $M^{-1}K$ (jf (30)) er så stor som mulig. (Alternativt findes λ_{\min} som den mindste egenværdi for problemet $Ku = \lambda Mu$).

Som for eftergiveligheden er værdien af λ_{\min} bestemt af data for gitterkonstruktionen, dvs. her arealer, længder, Youngs modul og massefylde for stængerne.

Opgave G 23 Vi betragter her standardgitteret $G4$, med given knudepunktspacering og given materialedata, samt given last (vælg selv data). Af æstetiske årsager vælger man at have det samme stangareal a_1 i stængerne 1, 2 og 3, og samme stangareal a_2 i stængerne 4 og 5. Værdien λ_{\min} er derfor en funktion af de to variable (a_1, a_2) . Plot $\lambda_{\min}(a_1, a_2)$. Giver det mening at bestemme gradienten?

11.4 Forskydninger som funktion af stangarealer

Opgave G 24 Vi betragter igen her standardgitteret $G1$, med given knudepunktspacering og given materialedata, samt given last (vælg selv data).

¹⁴Dette er også et slags mål for hvor stiv konstruktionen er.

1. Bestem deformationerne u_1 og u_2 som en funktion af stangarealerne (a_1, a_2) og plot $u_1(a_1, a_2)$ og $u_2(a_1, a_2)$. Bestem også disse funktioners gradienter.

2. Produktreglen anvendt på ligningen $Ku = F$ giver, at

$$\frac{\partial K}{\partial a_i} u + K \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0 \quad (34)$$

hvorved vi har, at de afledede af deformationerne kan findes som

$$\frac{\partial u}{\partial a_i} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial a_i} u \quad (35)$$

Formel (32) betyder, at vi direkte har, at $\frac{\partial K}{\partial a_i} = K_i$ og resultatet kan simplificeres til

$$\frac{\partial u}{\partial a_i} = -K^{-1} K_i u \quad (36)$$

Stemmer denne formel overens med resultatet beregnet i forrige spørgsmål?

3. Vis, at produktreglen anvendt på $C = F^T u$ giver, at

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = F^T \frac{\partial u}{\partial a_i} \quad (37)$$

Indsætter man her udtrykket fra (35) og bruger, at $F^T K^{-1} = u^T$, fås udtrykket

$$\frac{\partial C}{\partial a_i} = -u^T K_i u \quad (38)$$

omtalt ovenfor.

12 Linearisering

Vi har hidtil konsekvent arbejdet med lineære modeller. Taylorudvikling tillader, at vi kan forstå de benyttede formler som passende approksimationer.

12.1 Taylorudvikling af en stangforlængelse

Opgave G 25 Vis, at udtrykket (4) for forlængelsen af en stang kan fås ud fra af det sande udtryk for stangforlængelsen ved Taylorudvikling til første grad i de variable (u_1, u_2, v_1, v_2) (brug Maple).

12.2 Taylorudvikling af en stangkraft

Ved opstilling af den statiske ligevægt (jf (3) benyttedes de i hvilestillingen indgående vinkler ved projektion af stangkræfter på vandret og lodret.

Opgave G 26 1. Undersøg ved hjælp af Taylorudvikling relationen mellem projektionen af stangkræfter ud fra hvilestillingen og ud fra den deformerede position. Dette kan fx gøres ved at betragte \cos og \sin til retningsvinklen for den deformerede stilling og derefter foretage en Taylorudvikling i de variable (u_1, u_2, v_1, v_2) .

2. Opskriv et udtryk for projektionen af en stangkraft ud fra den deformerede position, hvor stangkraften er udregnet ud fra det sande udtryk for stangforlængelsen. Vis, at en Taylorudvikling til første grad i de variable (u_1, u_2, v_1, v_2) resulterer i de udtryk, som fremgår af ligevægtbetingelsen (7).

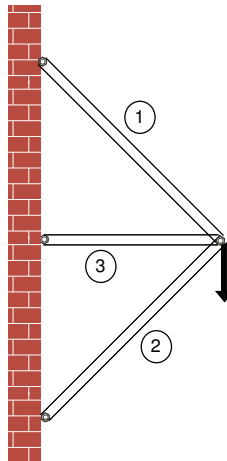


Figure 10: En simpel gitterkonstruktion med tre stænger og med en ydre last.

13 Optimering og Analyse

13.1 Potentiel energi

Opgave G 27 *Vis, at deformationen i ligevægt udgør et minimum for den potentielle energi for en gitterkonstruktion, jf afsnit 11.1. Benyt fx direkte udregning af $\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0)$, hvor u_0 er forskydningen i ligevægtspositionen, og hvor h er vilkårlig.*

13.2 Egenverdier

Opgave G 28 *Vi betragter igen her standardgitteret $G1$, med given knudepunktspacering og given materialedata, samt med arealer 1.0 henholdsvis 2.0 (vælg selv anden data og enheder). Lad nu funktionen Ψ som funktion af deformationerne (u_1, u_2) være givet som*

$$\Psi(u) = \frac{u^T K u}{u^T u}, u \neq 0 \quad (39)$$

1. *Vis, at et stationært punkt for Ψ er en egenvektor for matricen K . Bestem værdien af Ψ i de stationære punkter.*
2. *Vis, at den mindste egenværdi for K er minimumsværdien for Ψ og at den største egenværdi er maksimumsværdien for Ψ (plot funktionen Ψ).*

Udtrykket (39) kaldes Raleighs kvotient. At den mindste egenværdi for K kan findes ved at minimere Ψ gælder generelt for konstruktioner, der kan modelleres med en tilsvarende matematiske model.

14 Optimering og Design

I det følgende skal vi betragte muligheden for at variere på blandt andet godstykkelserne af en gitterkonstruktion for at opnå hvad man kunne kalde "et optimalt design". For at disse

overvejelser skal give mening, underforstår vi i det følgende, at der er en begrænset mængde materiale til rådighed.

14.1 Optimering af stivhed

Opgave G 29 Overvej nogle designproblemer, der involverer den statiske opførsel af gitterkonstruktioner. Angiv gode forslag til dimensionering af nogle af standard-gitrene (eller eventuelt nogle i bogen fra Mekanik og Materialer). Man kan for eksempel her forsøge at minimere eftergivigheden for en eller flere givne laste.

Hvis man her benytter godstykkelser (stang-arealer) som variable, kan det være praktisk at arbejde med grupper af stænger, der afhænger af én variabel; herved kan man reducere antallet af variable, således at de optimale værdier kan findes ved hjælp af Maples `contourplot`. Man skal også huske at antallet af variable kan reduceres ved at benytte at den totale masse af materiale vil være foreskrevet.

Man kan specielt tillade, at nogle af stængerne kan have arealet nul. Herved ændrer gitterkonstruktionen topologi som et resultat af den optimale dimensionering. For eksempel kan man forsøge at finde den optimale gitterkonstruktion med tre stænger, jf. Figur 10, hvor alle stænger kan have forskelligt tværsnitsareal (der eventuelt er nul). For denne konstruktion kan det også være interessant at finde den optimale placering af knude nr. 2.

14.2 Optimering af dynamikken: dimensionering af en regulator

Vi vender her tilbage til systemet med to punktmasser behandlet i afsnit 9.1 og 9.3 og skal se på hvordan man kan søge at begrænse svingninger i konstruktioner ved hjælp af hvad man kalder aktiv styring eller regulering; på engelsk benyttes ordet “control”, ofte i sammenhængen “structural control”:

THE FIELD OF STRUCTURAL CONTROL¹⁵

Elements of the infrastructure such as buildings, bridges, TV towers, tall chimneys, pipelines, communication centers, computer facilities, sensitive manufacturing facilities, hospitals, emergency command centers, etc., are subjected to forces of nature such as earthquake and wind, and also to man-made actions. In addition, there are structures where the actions are small and do not threaten the survivability but do produce unacceptable motions; for example, wind-induced swaying of high-rise buildings, or micro-tremor induced motion of precision manufacturing facilities.

The usual procedure is to design structures and facilities to have adequate strength to resist the actions, even though this may be costly. An alternate approach that has attracted attention is to modify the structure so as to reduce the motions and stresses. Some buildings in seismic regions have been supported on flexible foundation elements (base isolation) that will reduce the seismic forces transmitted to the structure; on the east coast of the U.S. some high-rise buildings that had objectionable sway during breezy weather are controlled by installing dynamic vibration absorbers on the top floor. It is also possible to control motions by providing counteracting forces. Structural control research studies the potential and practicality of various active/passive methods of control, including effectiveness, cost, and reliability.

Vi skal her arbejde med denne type problemstilling og bygger videre på den simple formulering, der er behandlet i afsnit 5.8 (s. 410-412) i bogen D.J. Inman: “Engineering Vibration”.

Vi forestiller os nu, at systemet i Figur 9 kan påvirkes med en ydre kraft f_A , der påvirker masse 1. Denne kan for eksempel genereres af en eller flere elektromagneter (jf kurset i Dynamik og Svingninger).

¹⁵Fra http://www.usc.edu/dept/civil_eng/structural/uspanel_about.html.

For at få en automatisk aktiv dæmpning af svingningerne i konstruktionen benyttes her en simpel såkaldt proportional, lukket-sløjfe regulator (herved undgås at en operatør skal forsøge at følge med i hvad der foregår – i praksis er det en umulig opgave). I engelsk litteratur omtales dette som en “feedback control law”, jf afsnit 5.8, D.J. Inman: “Engineering Vibration”.

Ved at måle for eksempel hastigheder af de to masser sætter man den ydre kraft til at være en lineær funktion af hastighederne¹⁶:

$$f_A = -G_1\dot{u}_1 - G_2\dot{u}_2 \quad (40)$$

hvor konstanterne G_i , $i = 1, 2$, er forstærkningerne (på engelsk “gains”).

Herved bliver modellen for det *regulerede system* modificeret fra formen givet i (19) til formen (jf (27)) (vi ser bort fra andre ydre kræfter):

$$M\ddot{u} + \tilde{C}\dot{u} + Ku = 0 \quad (41)$$

hvor \tilde{C} er givet ved

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Opgave G 30 *Undersøg egensvingningerne for det regulerede system for forskellige værdier af forstærkningerne. Benyt her metodikken fra afsnit 9.3.*

14.2.1 Polplacering

Vi skal nu prøve at finde “gode” værdier af af forstærkningerne G_i , $i = 1, 2$. Vi vil her benytte, at værdierne af realdelen af egenværdierne for matricen A i et system på formen (29) spiller en afgørende rolle, hvis man skal afgøre, hvor godt dæmpet systemet er: jo mere negative disse værdier er, jo bedre er systemet dæmpet¹⁷.

Opgave G 31 *Undersøg hvordan realdelen af egenværdierne for det regulerede system afhænger af forstærkningerne.*

Opgave G 32 *Forsøg at finde værdier af forstærkningerne således at egenværdierne for det regulerede system har de bedst mulige værdier (med henblik på dæmpning). Her kan man passende benytte Maples `plot3d` til en “visuel optimering” af en passende valgt funktion, der beskriver det man ønsker at opnå.*

Undersøg derefter systemets opførsel med disse valg af forstærkninger.

¹⁶For at gøre dette i praksis kræves bl.a. noget elektronik.

¹⁷I løsninger til det homogene system indgår termer af formen $e^{\mu t}$, hvor μ er realdelen af egenværdierne. Hvis μ er negativ vil bevægelsen “dø ud”, og det sker hurtigere jo mere negativ μ er. Se også afsnit 3.8 i Inman.