Differentialligninger af første orden

Preben Alsholm

Februar 2006

1 Basale begreber. Eksistens og entydighed.

En differentialligning af første orden er en ligning, der sammenknytter differentialkvotienten af en funktion med funktionen selv og den uafhængige variable.

Eksempel 1 *Hver af ligningerne*

$$\begin{aligned} x'(t) + 2x(t) &= 5\sin t \\ e^t x'(t) + 7x(t)^2 &= 3t + 5 \\ x'(t) &= 4x(t) \\ x'(t) &= 3x(t)\sqrt{1 - x(t)} \end{aligned}$$

er en differentialligning af første orden. Den ubekendte i en differentialligning er en funktion, der i alle fire eksempler hedder x. Den uafhængige variable er t. Ofte underforstås den uafhængige variable i $x(t)$ og $x'(t)$, så differentialligningerne i stedet skrives således

$$\begin{aligned} x' + 2x &= 5\sin t \\ e^t x' + 7x^2 &= 3t + 5 \\ x' &= 4x \\ x' &= 3x\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

I stedet for x' benyttes meget ofte $\frac{dx}{dt}$ således at eksempelvis den sidste differentialligning skrives på formen

$$\frac{dx}{dt} = 3x\sqrt{1-x}$$

I alle fire differentialligninger ovenfor kan $x'(t)$ isoleres, ja faktisk er det allerede gjort i de to sidste. Vi skal altid forudsætte, at dette kan lade sig gøre. Hermed kan en differentialligning af første orden skrives på formen

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

Her er f en reel funktion af 2 variable defineret i en mængde i (t, x)-planen. Differentialligningen (1) kan skrives lidt mere udførligt på formen $x'(t) = f(t, x(t))$.

Eksempel 2 *For de fire ligninger ovenfor finder vi, at funktionen f i (1) er givet ved henholdsvis*

$$\begin{aligned} f(t,x) &= -2x + 5\sin t \\ f(t,x) &= e^{-t}\left(-7x^2 + 3t + 5\right) \\ f(t,x) &= 4x \\ f(t,x) &= 3x\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

Definition 3 *Differentialligningen (1) kaldes autonom, hvis $f(t,x)$ faktisk ikke afhænger af t.*

Vi ser, at de to sidste differentialligninger i Eksempel 2 er autonome. De to første er ikke.

Definition 4 *Ved en løsning til differentialligningen (1) forstås en differentiabel funktion ϕ defineret på et* interval *I, så*

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t))$$

for alle $t \in I$. Ved den fuldstændige løsning *til (1) forstås en formel for samtlige løsninger.*

Eksempel 5 *Differentialligningen $x' + 2x = 5\sin t$ har som en af sine løsninger funktionen ϕ givet ved $\phi(t) = -\cos t + 2\sin t$ for alle $t \in R$. At bevise denne påstand består blot i at erstatte x i differentialligningen med ϕ, og dernæst kontrollere, at vi opnår en identitet, dvs. en ligning opfyldt for alle t i et interval. Ved indsættelse i venstresiden af differentialligningen $x' + 2x = 5\sin t$ fås*

$$\frac{d}{dt}(-\cos t + 2\sin t) + 2(-\cos t + 2\sin t) = (\sin t + 2\cos t) + 2(-\cos t + 2\sin t)$$

hvilket netop er $5\sin t$, altså lig med højresiden i differentialligningen. Hermed er vist, at $\phi(t) = -\cos t + 2\sin t$ er løsning til differentialligningen $x' + 2x = 5\sin t$ for alle $t \in R$. Senere bliver vi i stand til at vise, at differentialligningens fuldstændige løsning er givet ved

$$x(t) = -\cos t + 2\sin t + Ce^{-2t} \tag{2}$$

hvor $t \in R$ og hvor C er en reel konstant. Betydningen af dette udsagn er, at for enhver værdi af konstanten C i (2) opnås en løsning, og for enhver løsning findes en konstant C, så løsningen kan skrives på formen (2). Man kalder C for en arbitrær *konstant. Med $C = 0$ opnås den løsning vi betragtede i begyndelsen af eksemplet.*

Eksempel 6 *Differentialligningen $x' = 2tx^2$ har som 3 af sine løsninger funktionerne*

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{4-t^2} \text{ defineret for } t \in \left]-\infty, -2\right[\\ \phi_2(t) &= \frac{1}{4-t^2} \text{ defineret for } t \in \left]-2, 2\right[\\ \phi_3(t) &= \frac{1}{4-t^2} \text{ defineret for } t \in \left]2, \infty\right[\end{aligned}$$

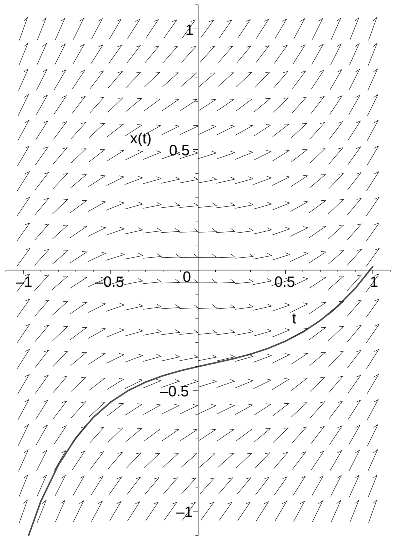
Bemærk altså, at selv om regneforskrifterne for ϕ_1, ϕ_2 og ϕ_3 er den samme, så regnes de 3 løsninger for forskellige, idet de er definerede på forskellige intervaller. Verificeringen af påstanden er den samme for alle 3, så vi udfører den kun for den første:

$$\phi_1'(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{4-t^2} = -\frac{1}{\left(4-t^2\right)^2} \cdot (-2t) = 2t\frac{1}{\left(4-t^2\right)^2} = 2t \cdot \phi_1(t)^2$$

faktisk gyldig når blot $t \neq \pm 2$.

Husk på, at $\phi'(t)$ er hældningen for tangenten til grafen for ϕ i punktet $(t, \phi(t))$. Udsagnet $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ siger derfor, at hældningen for tangenten til løsningen kan beregnes udfra kendskab til den øjeblikkelige position $(t, \phi(t))$. At have givet en differentialligning $\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$ i et område af (t, x)-planen er altså at have givet et *hældningsfelt*.

Man kan sige, at løsning af differentialligningen $x' = f(t, x)$ består i bestemmelse af kurver, der i ethvert punkt (t, x) har den rigtige hældning $f(t, x)$.



Figur 1. Hældningsfeltet for $x' = t^2 + x^2$ med den løsning, der opfylder $x(0) = -0.4$

Definition 7 *Ved* begyndelsesværdiproblemet *for differentialligningen (1) forstås bestemmelsen af den eller de løsninger til (1), der også opfylder en begyndelsesbetingelse af formen* $x(t_0) = x_0$.

Eksempel 8 *Vil vi bestemme den løsning til differentialligningen* $x' + 2x = 5\sin t$*, der opfylder begyndelsesbetingelsen* $x(0) = 2$*, så finder vi først den fuldstændige løsning, som i dette tilfælde er (2). I denne indsætter vi* $t = 0$*:*

$$x(0) = -\cos 0 + 2\sin 0 + Ce^0 = -1 + C$$

Da $x(0) = 2$ *fås* $C = 3$*. Den søgte løsning er hermed:*

$$x(t) = -\cos t + 2\sin t + 3e^{-2t}$$

Et presserende spørgsmål er nu, om begyndelsesværdiproblemet for differentialligningen (1) overhovedet har nogen løsning, og i givet fald om der er mere end én. Svaret er, at *hvis funktionen f i differentialligningen (1) er tilstrækkelig "pæn", så har begyndelsesværdiproblemet for (1) præcis én løsning.* At sige, at en funktion er pæn, er jo ikke særligt præcist. Man vil forstå, hvorfor vi siger det på den måde, når vi nu for god ordens skyld bringer to præcise sætninger herom:

Sætning 9 *Eksistenssætning. Lad* D *være en åben delmængde af* R^2 *og lad* $(t_0, x_0) \in D$*. Antag, at* f *er en kontinuert funktion defineret på* D*. Så har begyndelsesværdiproblemet* $x(t_0) = x_0$ *for differentialligningen* $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ *mindst én løsning.*

Bemærkning 10 *Vi beklager, at der optræder begrebet kontinuitet af funktion af 2 variable, et begreb, som læseren på dette tidspunkt ikke formodes at have kendskab til. Da læseren dog har kendskab til kontinuitetsbegrebet for funktion af én variabel, kan man håbe, at det indtryk efterlades, at næsten alle begyndelsesværdiproblemer for differentialligninger af første orden har mindst én løsning.*

I afsnittet om separable differentialligninger gives et eksempel på en differentialligning, der opfylder betingelserne i eksistenssætningen, men som har mere end én løsning gående gennem et givet punkt (faktisk uendeligt mange). De differentialligninger vi skal møde opfylder dog næsten alle betingelserne i den næste sætning:

Sætning 11 *Eksistens- og entydighedssætning. Lad D være en åben delmængde af R^2. Lad f være en kontinuert funktion defineret på D, og antag, at f har en kontinuert partiel afledet mht. x i D. Lad $(t_0, x_0) \in D$. Så har begyndelsesværdiproblemet $x(t_0) = x_0$ for differentialligningen $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ netop én løsning.*

Bemærkning 12 *Det er i eksistens- og entydighedssætningen underforstået, at der tales om* maksimale løsninger. *En løsning kaldes* maksimal, *hvis dens definitionsinterval ikke kan udvides til et større interval. Eksempelvis er hver af de i Eksempel 6 givne tre løsninger maksimale.*

2 Løsningsmetoder for specielle klasser af differentialligninger

I gennem de godt 300 år man har arbejdet med differentialligninger har man forsøgt at finde løsningsmetoder for differentialligninger. Man ønsker meget gerne formeludtryk for løsningerne. Der findes da også en mængde metoder, der hver for sig kan klare en klasse af differentialligninger. Men der findes ikke nogen enkelt metode, der kan bruges i alle tilfælde. Tværtimod er situationen den, at for langt de fleste differentialligninger har man ikke andet at ty til end eksistens- og entydighedssætningen. Dvs. det viser sig umuligt at bestemme en formel for den løsning, som man dog véd findes. En lignende situation møder vi ved bestemmelsen af integraler. Eksempelvis er funktionen $f : t \longmapsto 1/(t + \ln t)$ jo kontinuert på intervallet $[1,2]$ og derfor eksisterer det bestemte integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t+\ln t} dt$$

Skal vi udregne integralet på sædvanlig måde, må vi have fat i en stamfunktion til f. En sådan er imidlertid ikke lige til at finde! Faktisk kan Maple heller ikke. Det er muligt, at en stamfunktion til f slet ikke kan udtrykkes ved allerede kendte funktioner. Vi er dermed overladt til en numerisk bestemmelse af integralet. Bruger vi en numerisk metode finder vi

$$\int_1^2 \frac{1}{t+\ln t} dt = 0.5715168780$$

med 10 betydende cifre.

Faktisk er integrationseksemplet ikke helt ved siden af. Bestemmelsen af en stamfunktion til f kan betragtes som et spørgsmål om at løse differentialligningen $x'(t) = f(t)$, altså i vores tilfælde løse differentialligningen

$$x' = \frac{1}{t+\ln t}$$

Vi må altså forvente, at skulle bruge numeriske metoder ved bestemmelsen af løsninger til mange af de differentialligninger, som vi møder i anvendelserne.

Vi skal i de næste to afsnit betragte to vigtige klasser af differentialligninger for hvilke der kan gives løsningsmetoder i den forstand, at *løsning kan reduceres til stamfunktionsbestemmelse.* Metodernes *endelige* succes afhænger dermed af muligheden af at finde stamfunktioner til visse funktioner.

2.1 Separable differentialligninger

En separabel differentialligning er en differentialligning, der kan skrives på formen

$$\frac{dx}{dt} = h(t)\,g(x) \tag{3}$$

hvor højresiden altså kan skrives som et produkt af to faktorer, hvor den ene ikke indeholder x og den anden ikke indeholder t (uden gennem $x(t)$).

Eksempel 13 *Differentialligningerne*

$$\frac{dx}{dt} = 2t(1-x)^2$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(1-x)}{1+t^2}$$

er begge separable. Vi løser dem senere i dette afsnit.

Løsning af separable differentialligninger er jo pensum i gymnasiet, så vi forudsætter en vis erfaring med løsningen af sådanne. Her følger dog en noget voldsomt udseende sætning, der siger, hvordan løsningerne kan findes.

Sætning 14 *Betragt differentialligningen (3), hvor h er kontinuert på det åbne interval I og g kontinuert på det åbne interval J. Så gælder:*

1. *Lad ϕ være en funktion, der på intervallet I opfylder $g(\phi(t)) \neq 0$ for alle $t \in I$. Så er $x = \phi(t)$ løsning til differentialligningen (3) på intervallet I, hvis og kun hvis $x = \phi(t)$ på intervallet I er løsning til ligningen*

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)\,dt + k \tag{4}$$

   for en eller anden konstant k.

2. *Den konstante funktion $x = \phi(t) = x_0$, $t \in I$, er en løsning til (3), hvis og kun hvis $g(x_0) = 0$ (forudsat at h ikke er identisk lig nul i I).*

3. *Hvis begyndelsesværdiproblemet for (3) har entydigt bestemte løsninger gennem ethvert punkt i $I \times J$, så består den fuldstændige løsning til (3) af de løsninger, der findes ved separation af de variable (altså de løsninger, der implicit er givet ved (4)) samt af eventuelle konstante løsninger.*

Bevis. Vi tager de tre dele i rækkefølge:

1. Lad $x = \phi(t)$ være en løsning til differentialligningen (3) på intervallet I med $g(\phi(t)) \neq 0$ for alle $t \in I$. Så har vi

$$\phi'(t) = g(\phi(t))\,h(t)$$

for alle $t \in I$. Ved division med $g(\phi(t))$ fås

$$\frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} = h(t)$$

Ved ubestemt integration mht. t fås, at der findes en konstant k, så

$$\int \frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} dt = \int h(t)\, dt + k$$

I integralet på venstre side indfører vi substitutionen $x = \phi(t)$. Vi finder så $dx = \phi'(t)\, dt$, hvormed vi har

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)\, dt + k$$

hvilket er (4). Antag omvendt, at $x = \phi(t)$ er en løsning til ligningen (4) på intervallet I med $g(\phi(t)) \neq 0$ for alle $t \in I$ for en eller anden værdi af konstanten k. Vi kan skrive (4) på formen $G(x) = H(t) + k$, hvor $G(x)$ er en stamfunktion til $\frac{1}{g(x)}$ på et interval J på hvilket $g(x) \neq 0$, og som indeholder værdimængden for $\phi(t), t \in I$, og hvor H er en stamfunktion til h på I. Da dermed $\phi(t) = G^{-1}(H(t))$, er ϕ differentiabel på I, og vi har $G'(\phi(t))\phi'(t) = H'(t)$, dvs. $\frac{\phi(t)}{g(\phi(t))} = h(t)$ for alle $t \in I$. Altså gælder også $\phi'(t) = g(\phi(t))\, h(t)$, dvs. at ϕ på I opfylder (3).

2. Hvis $g(x_0) = 0$, så er $x = \phi(t) = x_0$, $t \in I$, klart løsning til (3). Hvis omvendt $x = f(t) = x_0$, $t \in I$, er løsning til (3), så er enten $g(x_0) = 0$ eller $h(t) = 0$ for alle $t \in I$. Hvis derfor h ikke er identisk lig nul i I, så må $g(x_0)$ være lig nul.

3. Følger umiddelbart af 1. og 2.

■

Sætning 15 *Lad I og J være åbne intervaller. Lad h være kontinuert på I og lad g være differentiabel på J med kontinuert afledet g', så har begyndelsesværdiproblemet*

$$\frac{dx}{dt} = h(t)\, g(x), \quad x(t_0) = x_0$$

hvor $t_0 \in I$ og $x_0 \in J$ præcis én løsning.

Bevis. Resultatet følger umiddelbart af eksistens- og entydighedssætningen. ■

Bemærkning 16 *Ved separation af de variable opnås som beskrevet en ligning (4) mellem t og x. Denne ligning definerer løsningen x implicit som en funktion af t. Ligningen er ofte temmelig vanskelig at løse, selv hvis de to integraler kan udregnes! Undertiden er det nødvendigt at løse den ved hjælp af numeriske metoder. I så fald kunne det være en fordel i stedet at løse selve differentialligningen numerisk.*

Bemærkning 17 *I de tilfælde, hvor det er lykkedes at løse (4) mht. x, er det ofte svært at bestemme det interval, på hvilket det fundne funktionsudtryk løser differentialligningen. Ofte afhænger dette definitionsinterval af konstanten k.*

Eksempel 18 *For differentialligningen*

$$\frac{dx}{dt} = 2t(x-1)^2 \tag{5}$$

ønskes den fuldstændige løsning bestemt. Desuden ønskes fundet den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \frac{1}{2}$.

Differentialligningen er separabel. Da $h(t) = 2t$ *er kontinuert på* R *og da* $g(x) = (x-1)^2$ *åbenbart er differentiabel med kontinuert differentialkvotient* $g'(x) = 2x - 2$ *på* R*, går der igennem ethvert punkt i planen* R^2 *netop én løsning. Vi undersøger først, om differentialligningen har konstante løsninger. Vi skal da løse ligningen* $g(x) = 0$*, dvs.* $(x-1)^2 = 0$*. Denne ligning har åbenbart løsningen 1. Altså har differentialligningen den konstante løsning* $x = 1$*. Alle andre løsninger er voksende for* $t > 0$ *og aftagende for* $t < 0$*, idet jo* $x'(t) = 2t(x(t)-1)^2$ *åbenbart har samme fortegn som* t*.*

Vi bestemmer nu formeludtryk for de løsninger, der ikke er konstante. Disse løsninger findes ved separation

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int 2t dt + C$$

hvor C *er en arbitrær konstant. Ved integration fås*

$$-\frac{1}{x-1} = t^2 + C$$

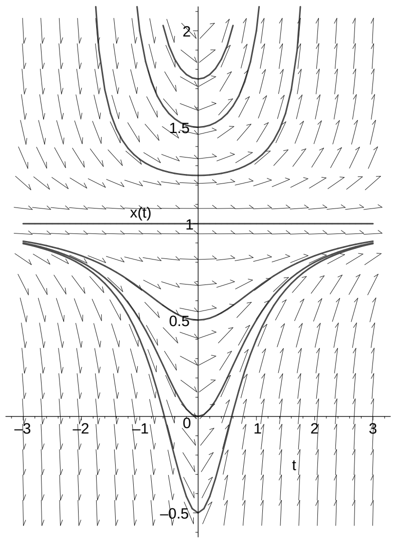
Man vil nu sige, at differentialligningen er løst, men at løsningen er givet på implicit form. *Man vil normalt gerne have løsningen på eksplicit form, dvs. at man direkte har en formel, der fortæller hvad* $x(t)$ *er lig med. Vi skal altså nu isolere* x*. Vi finder*

$$x = 1 - \frac{1}{t^2 + C} \tag{6}$$

Den fuldstændige løsning består altså af (6) og den konstante løsning $x = 1$*.*
Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \frac{1}{2}$ *findes ved indsættelse af* $t = 0$ *i (6):*

$$\frac{1}{2} = x(0) = 1 - \frac{1}{C}$$

så $C = 2$*. Løsningen er altså* $x(t) = 1 - 1/\left(t^2+2\right) = \left(t^2+1\right)/\left(t^2+2\right)$*. Løsningen er defineret på hele* R*.*



Figur 2. Hældningsfeltet for $x' = 2t(x-1)^2$ sammen med 7 løsninger.

Øvelse 19 *De løsninger til (5), der opfylder begyndelsesbetingelse $x(0) = x_0$ med $x_0 > 1$ er ikke defineret på hele R. Definitionsintervallet for en løsning skal naturligvis indeholde den t-værdi for hvilken begyndelsesværdien er givet, i dette tilfælde altså $t = 0$. Find definitionsintervallet for den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 2$.*

Eksempel 20 *For differentialligningen*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(1-x)}{1+t^2}$$

ønskes den fuldstændige løsning bestemt. Differentialligningen er separabel. Da $h(t) = 1/\left(1+t^2\right)$ er kontinuert på R og da $g(x) = x(1-x)$ åbenbart er differentiabel med kontinuert differentialkvotient $g'(x) = 1-2x$ på R, går der igennem ethvert punkt i planen R^2 netop én løsning. Vi undersøger først, om differentialligningen har konstante løsninger. Vi skal da løse ligningen $g(x) = 0$, dvs. $x(1-x) = 0$. Denne ligning har åbenbart løsningerne 0 og 1. Altså har differentialligningen de to konstante løsninger $x = 0$ og $x = 1$. Vi kan allerede nu sige en hel del om de andre løsningers forløb. Opfylder en løsning $x(t)$ uligheden $x(t_0) > 1$ ("område 1") på et tidspunkt t_0, så vil den altid have gjort det og vil vedblive med at gøre det. Løsningen kan jo ikke krydse den konstante løsning $x = 1$ på grund af entydighed af løsninger. Det samme kan siges om en løsning, der opfylder $0 < x(t_0) < 1$ ("område 2") og om en løsning, der opfylder $x(t_0) < 0$ ("område 3"). Vi kan endda udfra differentialligningen afgøre monotoniforholdene for løsningerne i de 3 områder. I område 1 er $x'(t) = x(t)(1-x(t))/\left(1+t^2\right) < 0$, da $x(t) > 1$. Altså er løsningerne i område 1 aftagende. Det samme er løsningerne i område 3, mens løsningerne i område 2 er voksende.

Vi bestemmer nu formeludtryk for de løsninger, der ligger i de tre ovennævnte områder. Disse løsninger findes ved separation

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{1}{1+t^2}dt + C$$

hvoraf

$$\ln|x| - \ln|x-1| = \arctan t + C$$

Her er $C \in R$ en integrationskonstant. Ved sammenskrivning af de to logaritmer fås

$$\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = \arctan t + C$$

hvorefter vi finder

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \exp\left(\arctan t + C\right) = e^C e^{\arctan t}$$

Numerisktegnet kan fjernes mod, at der sættes $\pm$ på højresiden:

$$\frac{x}{x-1} = \pm e^C e^{\arctan t} = K e^{\arctan t}$$

hvor vi har sat $K = \pm e^C$. Bemærk, at K nødvendigvis må være forskellig fra nul. Vi skal nu løse ligningen

$$\frac{x}{x-1} = u = K e^{\arctan t}$$

Vi finder:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} = u &\Longleftrightarrow x = (x-1)\,u = xu - u\\ &\Longleftrightarrow xu - x = u \Longleftrightarrow x = \frac{u}{u-1}\end{aligned}$$

Altså har vi

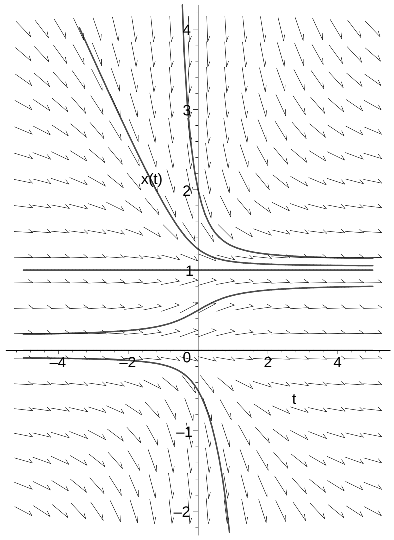
$$x\,(t) = \frac{K e^{\arctan t}}{K e^{\arctan t} - 1} = \frac{K}{K - e^{-\arctan t}}$$

hvor $K \in R \backslash \{0\}$. Hermed har vi altså fundet en formel for de løsninger, der befinder sig i de tre områder adskilt af de konstante løsninger.
Den fuldstændige løsning til differentialligningen består da af disse samt de to konstante løsninger, $x = 0$ og $x = 1$. Den første af de konstante løsninger kan inkorporeres i den generelle formel ved alligevel at tillade $K = 0$.

Hvis begyndelsesbetingelsen $x\,(0) = 2$ er givet, finder vi ved indsættelse konstanten K til 2. Altså fås løsningen

$$x\,(t) = \frac{2}{2 - e^{-\arctan t}}$$

Løsningens definitionsinterval findes ved at forlange (1) at nævneren $2 - e^{-\arctan t} \neq 0$ og (2) at $t = 0$ er med i intervallet, da det er for denne t-værdi, at begyndelsesværdien er opgivet. Da $2 - e^{-\arctan t} = 0 \Leftrightarrow t = -\tan(\ln 2)$ fås definitionsintervallet for vores løsning til $]-\tan(\ln 2)\,,\infty[$.



Figur 3. Hældningsfeltet for $x' = \frac{x(1-x)}{1+t^2}$ *sammen med 6 løsninger.*

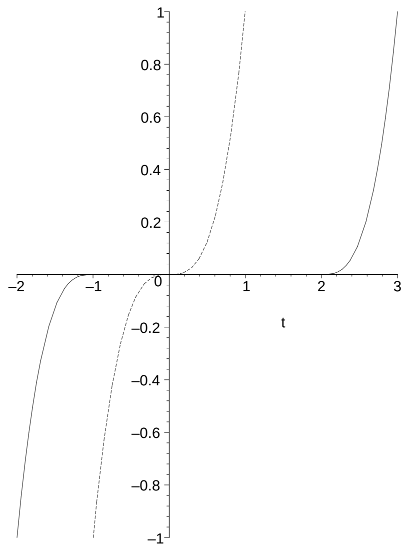
Eksempel 21 *Som et eksempel på, at der kan gå to løsninger gennem samme punkt tager vi differentialligningen*

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

Vi ser, at $x = 0$ *er en konstant løsning. Ved separation af de variable findes løsningerne* $x = f(t) = (t+k)^3$. *Løsningsmetoden kræver* $f(t) = (t+k)^3 \neq 0$, *men det ses ved direkte indsættelse i differentialligningen (7), at* $x = f(t) = (t+k)^3$ *er løsning for alle* $t \in R$. *Gennem* $(0,0)$ *går nu foruden den konstante løsning* $x = 0$ *også løsningen* $x = t^3$. *I virkeligheden er det endnu værre, idet man ved sammenstykning af den konstante løsning med løsningen* $x = (t+k)^3$ *i punktet* $t = -k$ *kan konstruere uendeligt mange løsninger, der alle går gennem* $(0,0)$. *Lad nemlig* $k_1 \leq 0 \leq k_2$, *og lad* f *være den funktion, der er givet ved følgende forskrift*

$$f(t) = \begin{cases} (t-k_1)^3 & for \quad t \leq k_1 \\ 0 & for \quad k_1 < t < k_2 \\ (t-k_2)^3 & for \quad t \geq k_2 \end{cases}$$

så er f *løsning til (7) på* R, *og dens graf går gennem* $(0,0)$. *Hvis vi tillader* $k_1 = -\infty$ *og* $k_2 = \infty$, *så giver ovenstående forskrift faktisk samtlige løsninger, der går gennem* $(0,0)$. *Bemærk, at* $g(x) = 3x^{2/3}$ *ikke er differentiabel for* $x = 0$ *(jvnf. Bemærkning 1 ovenfor).*



Figur 4. Løsningen med $k_1 = -1, k_2 = 2$ og løsningen med $k_1 = k_2 = 0$.

2.2 Lineære differentialligninger af 1.orden

En differentialligning af første orden, der kan skrives på formen

$$a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$$

kaldes en lineær differentialligning. På ethvert interval I, hvor $a(t) \neq 0$, for alle $t \in I$, kan ligningen *normeres* ved division med $a(t)$. Herved opnår differentialligningen følgende form

$$x' + p(t)\,x = q(t)\,, \qquad t \in I$$

Vi forudsætter i det følgende, at både p og q er kontinuerte på et interval I.

Sætning 22 *Lad p og q være kontinuerte funktioner defineret på intervallet I. Så er den fuldstændige løsning til*

$$x' + p(t)\,x = q(t) \tag{8}$$

givet ved formlen

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\,dt + Ce^{-P(t)} \tag{9}$$

hvor P er en vilkårligt valgt stamfunktion til p, og hvor $C \in R$ er en arbitrær konstant.

Bemærkning 23 *Vi ser, at enhver løsning til den lineære differentialligning (8) er defineret på hele I. Dette er ofte ikke tilfældet for ikke-lineære differentialligninger. Formlen (9) kaldes ofte for Panserformlen.*

Bevis. Da p er kontinuert på I, har p en stamfunktion på dette interval. Lad P være en sådan. Da $e^{P(t)} > 0$ for alle $t \in I$, har differentialligningen (8) de samme løsninger som følgende differentialligning

$$x'(t)\,e^{P(t)} + p(t)\,e^{P(t)} x(t) = e^{P(t)} q(t)$$

Men venstre side heraf er differentialkvotienten af produktet $e^{P(t)} x(t)$. Dvs. ovenstående kan skrives på formen

$$\frac{d}{dt}\left(e^{P(t)} x(t)\right) = e^{P(t)} q(t)$$

Denne differentialligning er imidlertid ensbetydende med, at $e^{P(t)}x(t)$ er en stamfunktion til $e^{P(t)}q(t)$, dvs. ensbetydende med eksistensen af en konstant $C \in R$, så

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t)\,dt + C$$

Med det ubestemte integral betegner vi her en vilkårligt valgt stamfunktion til $e^{P(t)}q(t)$. Denne sidste ligning er åbenbart ækvivalent med formlen (9).

Eksempel 24 *Vi vil finde den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$x'(t) + 2x(t) = 5\sin t$$

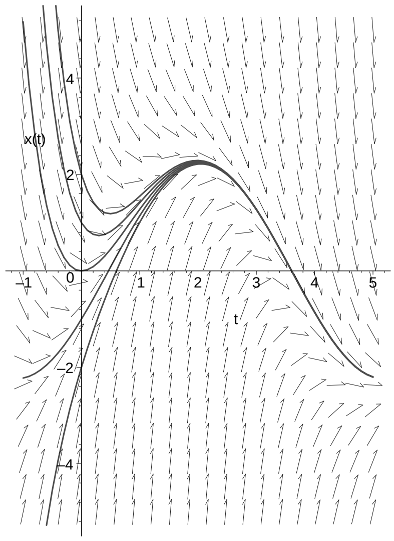
Ligningen er åbenbart lineær. Den er allerede normeret. Vi bruger Panserformlen (9). Idet $p(t) = 2$ *fås* $P(t) = \int 2dt = 2t$*, så*

$$x(t) = e^{-2t}\int e^{2t}5\sin t\,dt + Ce^{-2t}$$

hvor C *er en arbitrær konstant. Ved udregning af integralet fås*

$$x(t) = e^{-2t}\left(2e^{2t}\sin t - e^{2t}\cos t\right) + Ce^{-2t} = 2\sin t - \cos t + Ce^{-2t}$$

gældende for alle $t \in R$*. Vi bemærker, at for store værdier af* t *ligner alle løsningerne den der svarer til* $C = 0$*, hvilket også fremgår af figuren nedenfor.*



Figur 5. Hældningsfeltet for $x' + 2x = 5\sin t$ *sammen med 5 løsninger.*

■

Mest af hensyn til den senere behandling af lineære differentialligninger af højere orden viser vi en generel sætning om strukturen af den fuldstændige løsning til den lineære differentialligning af første orden.

Sætning 25 *Den fuldstændige løsning til differentialligningen (8) er lig med summen af en partikulær løsning,* x_p*, til ligningen og den fuldstændige løsning,* x_{hom}*, til den tilsvarende homogene ligning*

$$x' + p(t)x = 0 \tag{10}$$

altså $x = x_p + x_{\text{hom}}$*.*

Bevis. Vi giver to beviser.

1. Den fuldstændige løsning til (8) er givet ved Panserformlen (9). Når $C = 0$ i (9) fås en løsning. Den betegner vi med x_p. Det er en partikulær løsning. Formlen (9) gælder selvfølgelig også for det specielle tilfælde, at $q(t) = 0$ for alle $t \in I$. Men så fås den fuldstændige løsning til den homogene ligning til $x_{\text{hom}} = Ce^{-P(t)}$. Sætningen følger nu ved at udnytte den påviste fortolkning af de to led i (9).

2. Dette bevis udnytter ikke Panserformlen (9). Antag, at x_p er en løsning til (8) og at x_h er en løsning til (10). Så er $x = x_p + x_h$ løsning til (8), idet

$$\begin{aligned}(x_p + x_h)' + p(t)(x_p + x_h) &= x_p' + x_h' + p(t)x_p + p(t)x_h \\ &= \left(x_p' + p(t)x_p\right) + \left(x_h' + p(t)x_h\right) = q(t) + 0 = q(t)\end{aligned}$$

   Hvis omvendt $x_1$og x_2 begge er løsninger til (8), så er $x = x_1 - x_2$ løsning til (10), idet

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)' + p(t)(x_1 - x_2) &= x_1' - x_2' + p(t)x_1 - p(t)x_2 \\ &= (x_1' + p(t)x_1) - (x_2' + p(t)x_2) = q(t) - qt0 = 0\end{aligned}$$

   Heraf følger sætningen.

■

Eksempel 26 *Differentialligningen*

$$tx' + 2x = te^{-t}$$

betragtes for $t > 0$. Ligningen er åbenbart lineær. Vi normerer først ligningen:

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

Panserformlens P er givet ved $P(t) = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t$, så vi finder, at $e^{P(t)} = e^{2\ln t} = t^2$ og $e^{-P(t)} = t^{-2}$. Hermed er den fuldstændige løsning givet ved

$$\begin{aligned}x(t) &= t^{-2}\int t^2e^{-t}dt + Ct^{-2} \\ &= t^{-2}\left(-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\right) + Ct^{-2} \\ &= -\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)e^{-t} + \frac{C}{t^2}\end{aligned}$$

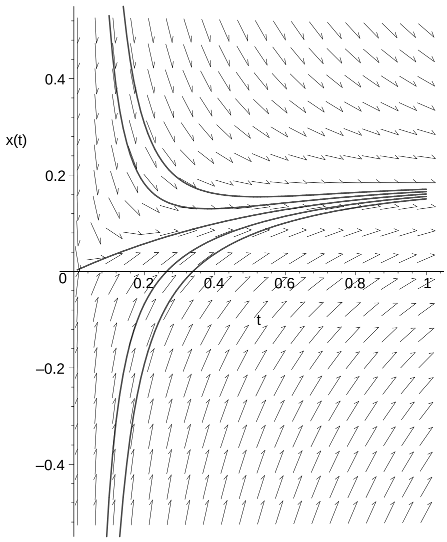
hvor $C \in R$. Vi kan skrive den fuldstændige løsning på formen

$$x(t) = \frac{C - \left(t^2 + 2t + 2\right)e^{-t}}{t^2}$$

For $C < 2$ gælder åbenbart, at $x(t) \to -\infty$, og for $C > 2$ gælder, at $x(t) \to \infty$ for $t \downarrow 0$. Hvis $C = 2$ er det ikke på forhånd klart, hvordan $x(t)$ opfører sig for $t \downarrow 0$. Vi har et "$\frac{0}{0}$ -problem, på hvilket vi kan bruge l'Hospitals regel:

$$\frac{-(2t+2)e^{-t} + \left(t^2 + 2t + 2\right)e^{-t}}{2t} = \frac{t^2e^{-t}}{2t} = \frac{te^{-t}}{2} \to 0$$

for $t \downarrow 0$. Det samme gælder altså for $x(t)$.



Figur 6. Hældningsfeltet for $tx' + 2x = te^{-t}$ sammen med 5 løsninger.

3 Numerisk løsning af differentialligninger: Eulers metode

Da numerisk løsning af differentialligninger i mange tilfælde er en nødvendighed, vil vi her kort behandle en simpel metode til numerisk løsning af et begyndelsesværdiproblem for en differentialligning af første orden. Vi gør det for give en idé om hvad man mener med en numerisk løsning.

Vi ønsker at finde en tilnærmet (med et finere ord: approksimativ) løsning af begyndelsesværdiproblemet

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

En tilnærmet eller approksimativ løsning betegnes ofte som en **numerisk løsning**, når resultatet ikke er givet ved en formel, men foreligger som en tabel af konkrete talværdier eller som en procedure, der for enhver given konkret talværdi af t kan beregne $x(t)$. Som brugt her, har ordet *numerisk* intet at gøre med brugen i udtrykket *numerisk værdi af et tal*, som i $|x|$.

Eulers metode er en numerisk metode. Den er opkaldt efter den schweitziske matematiker Leonhard Euler (1707-83), der måske er den mest produktive matematiker, der nogensinde har levet. Dette skal man dog ikke lade sig skræmme af. Metoden er ganske simpel.

Vi begynder i det opgivne punkt (t_0, x_0). Løsningens tangenthældning til $t = t_0$ er $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$. Går vi derfor et lille skridt af længden h til højre, er den nye eksakte x-værdi tæt på den x-værdi, vi får ved at gå langs tangenten. Går vi langs tangenten får vi x-værdien

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

Den tilsvarende t-værdi er

$$t_1 = t_0 + h$$

Vi står nu i punktet (t_1, x_1). Dette punkt ligger formodentlig lidt ved siden af det korrekte punkt, men er det bedste vi har. I dette punkt er løsningens hældning $x'(t_1) = f(t_1, x_1)$. Vi går langs den nye tangent et t-skridt på h, og finder da x-værdien

$$x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1)$$

svarende til t-værdien

$$t_2 = t_1 + h$$

Således fortsættes. Vi finder en række punkter

$$(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n), \dots$$

der hænger sammen på følgende måde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Det kan vises, at den fejl, der begås ved et *enkelt* skridt er ca. proportional med h^2. Den *totale* fejl ved beregningen af $x(b)$, hvor b er sluttids-punktet, bliver hermed omtrent proportional med $h = h^1$. Dermed er Eulers metode en *førsteordensmetode.*

Eksempel 27 *Som eksempel tager vi begyndelsesværdiproblemet*

$$\begin{aligned} x' &= t^2 + x^2 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

Vi tager $h = 0.1$*. Vi har åbenbart* $t_0 = 0, x_0 = 1$ *og* $f(t, x) = t^2 + x^2$*. Så vi finder først*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1.1 \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Dernæst finder vi

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + hf(t_1, x_1) = 1.1 + 0.1 \cdot f(0.1, 1.1) = 1.222 \\ t_2 &= t_1 + h = 0.2 \end{aligned}$$

Går vi et skridt mere, finder vi

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + hf(t_2, x_2) = 1.222 + 0.1 \cdot f(0.2, 1.222) = 1.3753 \\ t_3 &= t_2 + h = 0.3 \end{aligned}$$

Hermed har vi tabellen

t	0	0.1	0.2	0.3
x	1	1.1	1.222	1.3753

Hvis vi halverer skridtlængden, dvs. tager $h = 0.05$*, så fås tabellen*

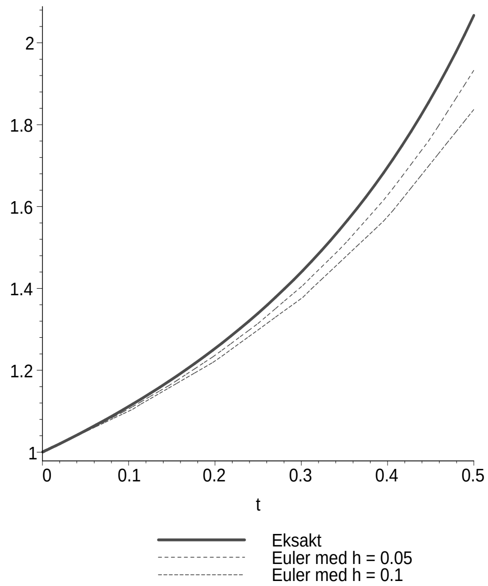
t	0	0.1	0.2	0.3
x	1	1.105	1.236	1.404

hvor vi kun har medtaget x-værdier svarende til samme t-værdier som før. Halveres igen ($h = 0.025$) *fås*:

t	0	0.1	0.2	0.3
x	1	1.1082	1.2441	1.4207

I dette eksempel kan den eksakte løsning findes, idet den kan udtrykkes ved såkaldte Besselfunktioner. Men indeholder éns repertoire af funktioner ikke Besselfunktionerne, så kan den eksakte løsning ikke angives. Maple kender Besselfunktionerne og kan finde den eksakte løsning. Den ser kompliceret ud, men løsningen giver følgende tabel (med 5 betydende cifre):

t	0	0.1	0.2	0.3
x	1	1.1115	1.2530	1.4397



Figur 7. Den eksakte løsning sammen med Eulerløsningerne med $h = 0.1$ *og* 0.05.