MAT 91122 Opgave E54

Preben Alsholm

Januar 2001

Der er givet planintegralet

$$\int_S \frac{\cos(x+y)}{1+x+y^2} dA$$

hvor integrationsområdet S er givet ved

$$S = \{(x,y) \,| 0 \le x \le a \wedge 0 \le y \le x\}$$

Her er a en positiv konstant. Der skal foretages en approksimativ udregning, der må forventes at give et rimeligt resultat, når a er lille. Vi skal erstatte integranden

$$f(x,y) = \frac{\cos(x+y)}{1+x+y^2}$$

med dens 2. Taylorpolynomium $P_2(x,y)$ med udviklingspunkt $(0,0)$. Vi går frem som følger

1. Vi finder først $P_2(x,y)$.

   $$P_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2\right)$$

   De anden afledede er givet i opgaven: $f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = -1, \quad f_{yy}(0,0) = -3$. Vi skal blot finde de første:

   $$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\left(1+x+y^2\right)(-\sin(x+y)) - \cos(x+y)}{\left(1+x+y^2\right)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{\left(1+x+y^2\right)(-\sin(x+y)) - \cos(x+y)\,2y}{\left(1+x+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

   Ved indsættelse af $(x,y) = (0,0)$ fås

   $$f_x(0,0) = -1, \quad f_y(0,0) = 0$$

   Da $f(0,0) = 1$, har vi hermed

   $$P_2(x,y) = 1 - x + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)$$

2. Vi udregner nu planintegralet $\int_S P_2(x,y)\,dA$. Vi finder

$$\begin{aligned}
\int_S P_2(x,y)\,dA &= \int_0^a dx \int_0^x P_2(x,y)\,dy \\
&= \int_0^a dx \int_0^x \left(1 - x + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)\right) dy \\
&= \int_0^a \left[y - xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^3\right]_0^x dx \\
&= \int_0^a \left(x - x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^a \\
&= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{8}a^4
\end{aligned}$$