Eksamensopgaver i MAT 91122
IFAK, DTU

Preben Alsholm

1997-2001

Opgave E1 (uden hjælpemidler, 5 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x,y) \quad = \quad xe^x \cos y - e^x y \sin y$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Undersøg, om f opfylder ligningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{for alle } (x,y) \in R^2.$$

Opgave E2 (uden hjælpemidler, 10 point).

1. Skitsér det begrænsede område S i $xy-$planen, der ligger mellem kurverne $y = x^2 - x$ og $y = 2x$.
2. Find planintegralet

$$\int_S \left(3y^2 - 2y\left(x^2 - x\right)\right) dA.$$

Opgave E3 (uden hjælpemidler, 10 point).

Vis, at differentialformen

$$\omega \quad = \quad \left(ye^{xy} + 3x^2\right) dx + \left(xe^{xy} - \sin y - y \cos y\right) dy$$

er eksakt i R^2 og bestem samtlige stamfunktioner.

Opgave E4 (20 point).

Kurven med ligningen

$$x^5 y + x y^5 \quad = \quad 2$$

hvor $x > 0$, er grafen for en funktion af x. Denne funktion betegnes med h. Det vides, at h er vilkårligt ofte differentiabel.

Find det andet Taylorpolynomium $P_2(x)$ for $h(x)$ med udviklingspunkt $x = 1$.

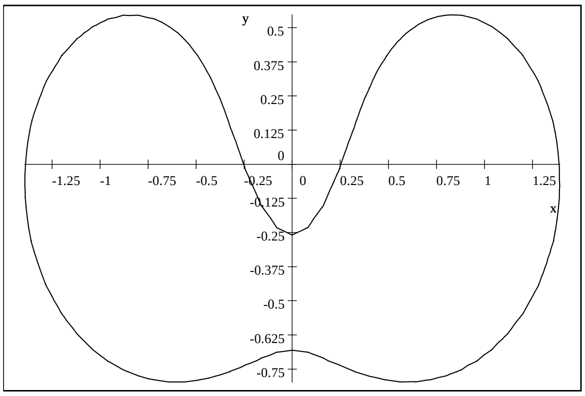
Opgave E5 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x, y) \quad = \quad 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - 4x^2 + y$$

for alle $(x, y) \in R^2$.

1. Find største- og mindsteværdi for f på området S indenfor eller på niveaukurven $f(x, y) = -\frac{1}{4}$ (se figuren). $2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - 4x^2 + y = -1/4$



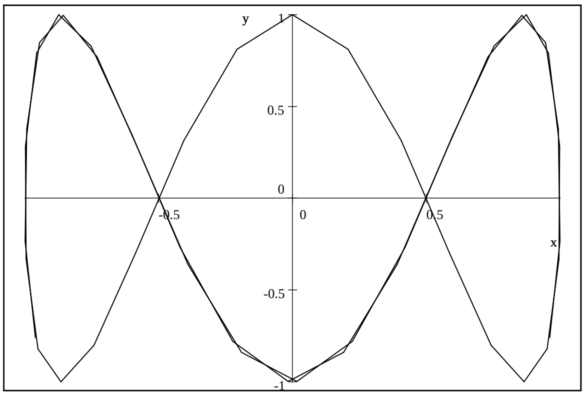
2. Find største- og mindsteværdi for f på den delmængde af området S, der ligger i den lukkede 1. kvadrant.

Opgave E6 (15 point).

Kurven γ er givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y) \quad = \quad (\sin t, \cos(3t)), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Se figuren. Kurven afskærer, som det ses, 3 begrænsede områder i planen.
$(\sin t, \cos(3t))$



Lad S være det af de 3 områder, der svarer til at $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Find arealet af S ved at bruge Greens sætning:

$$\int_k P(x, y)dx + Q(x, y)d.y \quad = \quad \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA$$

med $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$ og med k som den del af kurven γ, der afgrænser S.

Opgave E7 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for} \quad t < 2 \\ 2e^{2-t} & \text{for} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Løs for $t \geq 0$ differentialligningen

$$x'(t) + x(t) = f(t)$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 0$.

16. december 1997

Opgave E8 (uden hjælpemidler, 8 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{t}x^2}$$

for alle $(x,t) \in R \times R_+$. Bestem konstanten k, så f opfylder ligningen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{for alle } (x,t) \in R \times R_+.$$

Opgave E9 (uden hjælpemidler, 7 point).

Lad området S være givet ved $S = \left\{(x,y) \in R^2 \left| 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \wedge 0 \le y \le \sin x \right.\right\}$.
Find planintegralet

$$\int_S y^2 \cos x dA.$$

Opgave E10 (uden hjælpemidler, 10 point).

Der er i R^2 givet differentialformen

$$\omega = \left(y^2 e^x + 12x^3\right) dx + (2ye^x + \cos y)\, dy$$

1. Vis, at ω er eksakt i R^2 og bestem samtlige stamfunktioner.
2. Find kurveintegralet $\int_k \omega$, når k er kurven givet ved parameterfremstillingen $(x,y) = \left(t^2, t\right)$, $t \in [0,1]$.

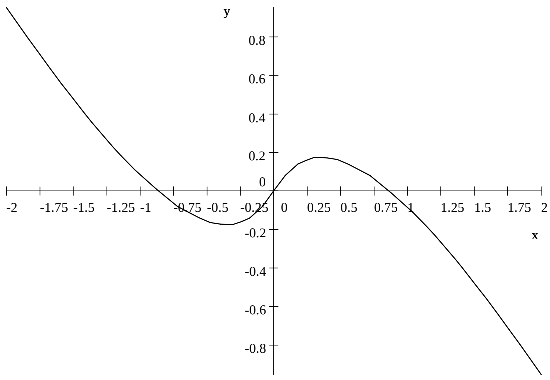
Opgave E11 (20 point).

Ligningen

$$\sinh(x + 2y) = \sin(2x + y)$$

beskriver i xy - planen en kurve, som er vist på figuren. Kurven går åbenbart igennem $(0,0)$ og er grafen for en funktion $y = g(x)$. Det vides, at g er vilkårligt ofte differentiabel.

$\sinh(x + 2y) = \sin(2x + y)$



1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for g med udviklingspunkt 0.

2. Find ved brug af Newtons metode den positive løsning til ligningen $g(x) = 0$. Aflæs et rimeligt startgæt på figuren. Resultatet ønskes angivet med to betydende cifre.

Opgave E12 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x, y) = e^x \left(y^2 + x^2 y\right)$$

for alle $(x, y) \in R^2$.

Find største- og mindsteværdi for f på det begrænsede område S i 3. kvadrant, der begrænses af parablen $y = -x^2$ og linierne $y = 0$ og $x = -5$.

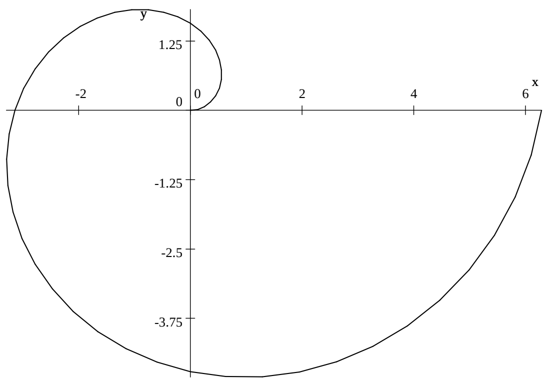
Opgave E13 (15 point).

Udregn planintegralet

$$\int_S (x + 2y)\, dA$$

hvor S er området begrænset af den positive x - akse og af kurven givet i polære koordinater ved ligningen $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Se figuren.

θ



Efter omskrivning til et passende dobbeltintegral skal man *enten* beregne dette helt, *eller* man skal anføre en Maple-kommando, der (hvis udført) ville give det korrekte resultat.

Opgave E14 (20 point).

Et givet fysisk system kan beskrives ved differentialligningen

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 5x(t) = a\delta(t - t_0)$$

hvor a og t_0 er konstanter, $t_0 > 0$, og hvor δ er Diracs deltafunktion. Begyndelsesbetingelserne er $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

Systemet kunne være et matematisk pendul, der foretager små vinkeludsving ($x(t)$ er så vinklen til lodlinien målt i radianer). Der er taget hensyn til luftmodstand. Ligningens højre side betyder, at pendulet modtager et spark til tiden t_0. Dette spark giver pendulet impulsforøgelsen a.

1. (15 point) Løs differentialligningen med de givne begyndelsesbetingelser.

2. (5 point) Hvor stort et spark skal pendulet have for at det bringes til ro, og hvornår skal sparket ske?

26. maj 1998

Opgave E15 (uden hjælpemidler, 9 point).

Udregn planintegralet

$$\int_S 2xydA$$

når S er det begrænsede område, der ligger mellem kurverne

$$y = x + 1 \text{ og } x = y^2 - 1.$$

Opgave E16 (uden hjælpemidler, 6 point).

Ligningen

$$\ln\left(1+x^2+y\right)+x+2y=0$$

definerer y implicit som en differentiabel funktion af x for alle $x \in R$. Find $y'(0)$. (Bemærk, at $(x,y)=(0,0)$ opfylder ligningen).

Opgave E17 (uden hjælpemidler, 10 point).

Løs differentialligningen

$$x'(t)+2x(t)=e^{-t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0)=x_0$. Ved eventuel brug af Laplacetransformation kan man ved tilbagetransformationen udnytte, at

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)$$

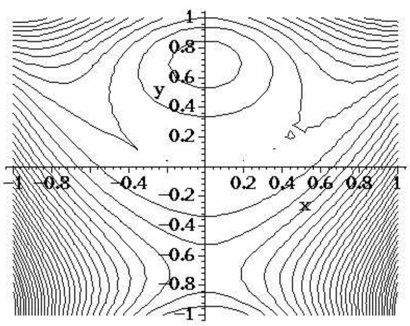
Opgave E18 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x,y)=\left(y-x^2\right)^2-y^4$$

f har 3 stationære punkter: $O=(0,0)$ og to andre P og Q.

1. Kontrollér, at $O=(0,0)$ er et stationært punkt for f og find koordinaterne for de to andre stationære punkter P og Q.
2. Afgør ved hjælp af det sædvanlige kriterium typen af de stationære punkter P og Q.



3. Som det fremgår af ovenstående niveaukurvediagram for f, er det ingenlunde klart, til hvilken type $O = (0,0)$ skal henregnes. Vis, at O ikke er et lokalt ekstremum.

Opgave E19 (20 point).

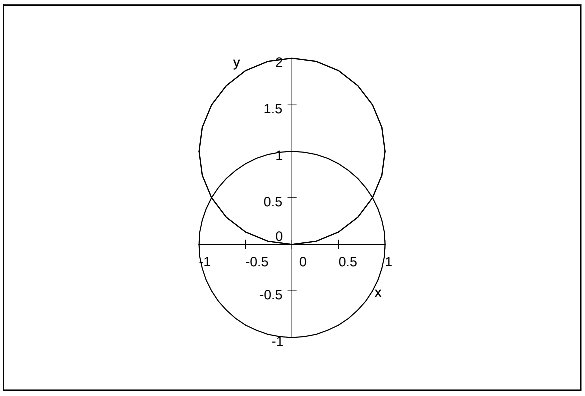
Betragt i R^2 vektorfeltet

$$\overline{F}(x,y) = \left(y^3 + \sinh x, 3xy^2 + xy\right)$$

1. Vis, at $\overline{F}$ ikke er konservativt i R^2.

2. Lad k være dén lukkede kurve i øvre halvplan, der består af en del af enheds-cirklen og en del af cirklen med ligningen $r = 2\sin\theta$ (i polære koordinater). Kurven gennemløbes i positiv omlø bsretning. Se figuren.

   $1, 2\sin\theta$



   Find kurveintegralet

$$\int_k \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

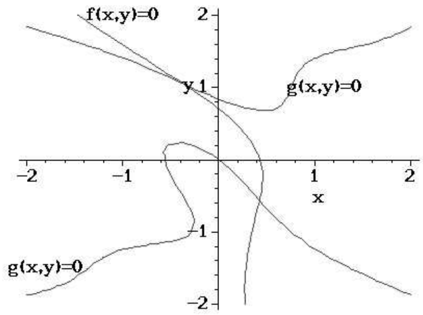
   ved brug af Greens sætning. Efter opstilling af det resulterende integral kan den konkrete udregning erstattes af en Maple-kommando, der (hvis udfø rt) ville give det korrekte resultat.

Opgave E20 (15 point).

Der er givet kurverne med ligningerne

$$\begin{aligned} 2x + y + \ln\left(x + y^2\right) &= 0 \\ 3x^2 - y^4 + \sin\left(\pi\left(x+y\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

På figuren er vist de dele af kurverne, der forløber i kvadratet $[-2,2] \times [-2,2]$. Med $f(x,y)$ og $g(x,y)$ betegner vi venstresiderne af de to ligninger. Det ses af figuren, at ligningssystemet har mindst to løsninger.



En af disse ligger i nærheden af $(x, y) = (0, 1)$. Bestem denne løsning ved Newtons metode med startgæt $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Det anses for tilstrækkeligt at bestemme (x_1, y_1).

Opgave E21 (20 point).

Et system opfylder følgende differentialligninger

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) + f(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) \end{aligned}$$

hvor f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{for} \quad t < \pi \\ 0 & \text{for} \quad \pi \leq t \end{cases}$$

og hvor begyndelsesbetingelserne er $x(0) = 0, y(0) = 0$.

1. Skitsér f på intervallet $[0, 2\pi]$. Udtryk $f(t)$ ved Heaviside-funktioner.
2. Find den Laplacetransformerede $\overline{x}(s)$ af løsningen $x(t)$.
3. Idet det kan anses for givet, at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ eksisterer, skal man bestemme denne grænseværdi.

5. januar 1999

Opgave E22 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find kurveintegralet

$$\int_k \left(2x \sin y - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx + \left(x^2 \cos y + \frac{1}{1+y}\right) dy$$

når k er kurven givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y) = (\sin t, 2\cos t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Opgave E23 (uden hjælpemidler, 6 point).

Ligningen

$$y^5 + y^3 + y + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$$

definerer y implicit som en differentiabel funktion af x for alle $x \in R$. Find $y'(0)$.

Opgave E24 (uden hjælpemidler, 9 point).

Find planintegralet

$$\int_S \frac{y^2}{x^3} dA$$

hvor $S = \left\{(x, y) \in R^2 \,|1 \le x \le \ln 3 \wedge 0 \le y \le xe^{-x} \right\}$.

Opgave E25 (10 point).

Funktionen h er givet som en sammensat funktion ved forskriften

$$h(t) = f(p(t), q(t))$$

hvor p og q er differentiable funktioner af én variabel og f er er en differentiabel funktion af to variable. Det oplyses, at

$$\begin{aligned} p(3) &= 5, q(3) = 7, p'(3) = -2, q'(3) = 8, \\ f_x(5,7) &= \frac{\partial f}{\partial x}(5,7) = 11, f_y(5,7) = \frac{\partial f}{\partial y}(5,7) = -4. \end{aligned}$$

Find $h'(3)$.

Opgave E26 (25 point).

Lad f være funktionen givet ved

$$f(x, y) = x^2 y + \cos(x + y)$$

for alle $(x, y) \in R^2$.

1. Vis, at ethvert punkt af formen $(0, p\pi)$, hvor p er et helt tal, er et stationært punkt for f.
2. f har desuden endnu ét stationært punkt Q, og dette ligger tæt ved $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Vis, at dette punkts x-koordinat opfylder ligningen

   $$x^2 - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0$$

   Bestem en (forbedret) tilnærmelse til løsningen af denne ligning ved brug af Newtons metode med startgæt $x_0 = 1$. Det er tilstrækkeligt at bestemme x_1. Angiv også den derved samtidigt opnåede forbedrede tilnærmelse til $Q's$ y-koordinat.

3. Det stationære punkt $(0,0)$ er hverken et lokalt ekstremum eller et saddelpunkt. Bestem for ethvert af de øvrige stationæ re punkter om det er et saddelpunkt eller ej. For det stationære punkt Q kan tilnærmelsen $Q \approx \left(1, \frac{1}{2}\right)$ benyttes.

Opgave E27 (20 point).

Dobbeltintegralet

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dx \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} x^2 \sin\left(x^2+y^2\right) dy$$

er lig med planintegralet

$$\int_S x^2 \sin\left(x^2+y^2\right) dA$$

for et passende valgt område S.

1. Skitsér et sådant område S.

2. Udregn planintegralet. Vink: Polære koordinater.

Opgave E28 (20 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = -ax(t) + f(t)$$

hvor a er en positiv konstant og f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{for} \quad t < 1 \\ 0 & \text{for} \quad 1 \leq t \end{cases}$$

og hvor begyndelsesbetingelsen er $x(0) = 0$.

1. Find den Laplacetransformerede $\overline{x}(s)$ af løsningen $x(t)$.

2. Det kan anses for givet, at $\lim_{t\to\infty} e^{at}x(t)$ eksisterer. Det oplyses desuden, at der gælder følgende generelle formel

$$L\left(e^{at}g(t)\right) = \overline{g}(s-a)$$

("forskydningsreglen"). Find

$$\lim_{t\to\infty} e^{at}x(t)$$

7. juni 1999

Opgave E29 (uden hjælpemidler, 7 point).

Find de stationære punkter for funktionen f givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{x - y^2}{1 + x^2}$$

for alle $(x,y) \in R^2$

Opgave E30 (uden hjælpemidler, 8 point).

Kurven med ligningen

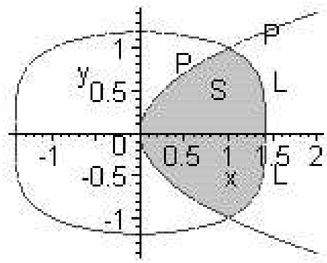
$$\ln\left(x^2 + y^2\right) + x + 3y = 3$$

går gennem punktet $(x,y) = (0,1)$. Kurven er graf for en differentiabel funktion af x, som vi her skal kalde $y(x)$. Find $y'(0)$.

Opgave E31 (uden hjælpemidler, 10 point).

Udregn planintegralet

$$\int_S 2xy^2 dA$$



når S er det på figuren viste område begrænset af parablen P med ligningen $x - y^2 = 0$ og kurven L med ligningen $x^2 + y^4 = 2$.

Opgave E32 (10 point).

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = \left(x + y^2\right)\cos(x + 3y)$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Find funktionens 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $(\pi, 0)$. Man kan (uden at vise det) udnytte, at $f_{xy}(\pi,0) = 3\pi$ og $f_{yy}(\pi,0) = 9\pi - 2$.

Opgave E33 (20 point).

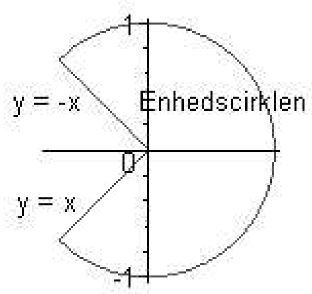
Lad f være funktionen givet ved

$$f(x,y) = x^2 e^{-x^2-y^2} + y^2$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Bestem største- og mindsteværdi for f på cirkelskiven $S = \left\{(x,y) \left| x^2+y^2 \leq 4 \right.\right\}$.

Opgave E34 (25 point).

Lad k være den lukkede kurve, der er vist på figuren. Den består af en del af enhedscirklen og to rette liniestykker. Kurven gennemløbes i positiv omløbsretning.



1. Find kurveintegralet

$$\int_k xy^2 dx + \left(x^2 y + y\right) dy$$

2. Find kurveintegralet

$$\int_k xy^2 dx + x^3 dy$$

   Vink: Brug evt. Greens sætning.

Opgave E35 (20 point).

Lad $x(t)$ og $y(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke. Væsken fra tank 1 (rumfang $4m^3$) pumpes med en hastighed på $1m^3/\min$ gennem et langt rør til tank 2 (rumfang 2 m^3) og gennem et meget kort rør og med hastighed $2m^3/\min$ tilbage til tank 1. Hver væskedel er 5 minutter om at gennemløbe det lange rør, der til tiden $t=0$ er fyldt med rent vand. Systemet startes til tiden $t=0$ med $x(0)=0$ og $y(0)=0$. Til tank 1 ankommer udefra $1m^3/\min$ med konstant koncentration a. Til tank 2 ankommer udefra $1m^3/\min$ med konstant koncentration b.

Det må anses for givet, at $\lim_{t\to\infty} y(t)$ eksisterer. Find denne grænseværdi (udtrykt ved a og b).

December 1999

Opgave E36 (Uden hjælpemidler, 10 point).

En trekant S er begrænset af 3 rette linier med ligningerne

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x+y &= 0 \\ x-2y &= 0 \end{aligned}$$

Find planintegralet

$$\int_S 4xy^3 dA$$

Opgave E37 (Uden hjælpemidler, 15 point).

1. (a) Vis, at differentialformen $F_1dx + F_2dy$ givet ved

$$\left(3x^2y^2 + 4y^2 + 2y + 5\right) dx + \left(2x^3y + 8xy + 2x\right) dy$$

   er eksakt i R^2.

   (b) Find samtlige stamfunktioner til $F_1dx + F_2dy$.

   (c) Find kurveintegralet

$$\int_k F_1dx + F_2dy$$

   idet k er kurven givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = \left(\sqrt{1 + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}, \ln\left(1 - t + te^t\right)\right), \quad t \in [0,1]$$

Opgave E38 (20 point).

Find det 2. Taylorpolynomium for

$$f(x,y) = 3\cos(x-y) + \ln\left(x^2y^3\right)$$

med udviklingspunkt $(1,1)$.

Opgave E39 (20 point).

Det oplyses, at ligningen

$$y^5 + 2x^3 + 2y + x - 6 = 0$$

i R^2 fastlægger y som en vilkårligt ofte differentiabel funktion $y(x)$.

1. (a) Vis, at $(x,y) = (1,1)$ tilfredsstiller ligningen.

(b) Find det 2.Taylorpolynomium $P_2(x)$ for $y(x)$ med udviklingspunkt 1.

(c) Tegn Taylorpolynomiets graf for $0 \leq x \leq 2$. Dette spørgsmål tillades også løst ved blot at anføre alle de nødvendige Maple-kommandoer.

Opgave E40 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$$

i mængden

$$S = \left\{(x,y) \in R^2 \,|{-2} \leq x \leq 2 \land -2 \leq y \leq 2\right\}$$

1. (a) Find alle stationære punkter for f i det indre af S.

   (b) Find største- og mindsteværdi for f i mængden S.

Opgave E41 (15 point).

Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to omrørte tanke med gennemstrømning. Rumfanget af tank 1 er $2m^3$, og rumfanget af tank 2 er $3m^3$. Til tank 1 ankommer udefra $1m^3/\min$ med koncentrationen e^{-t} (kg/m^3). Tank 2 afgiver $3m^3/\min$ til omgivelserne og modtager herfra $2m^3/\min$ med koncentrationen te^{-t} (kg/m^3). Desuden smides der pludseligt efter 3 minutter $3kg$ rent A i tank 2. Tankene er forbundne med to rør. Et meget kort rør, der fører en strøm på $2m^3/\min$ fra tank 1 til tank 2, og et meget langt rør, der fører en strøm på $1m^3/\min$ fra tank 2 til tank 1. Opholdstid i det lange rør er 2 minutter. Systemet starter til tiden $t = 0$ med $y(0) = 0, z(0) = 0$ og med rent vand i det lange rør.

Find den Laplacetransformerede $\overline{z}(s)$.

25. maj 2000

Opgave E42 (uden hjælpemidler, 8 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + 2x^2 \cos y$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Find differentialet df af f i punktet $(1,0)$. Angiv også ligningen for tangentplanen til grafen for f i punktet $(1,0,f(1,0))$.

Opgave E43 (uden hjælpemidler, 12 point).

Dobbeltintegralet

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{1+x^3} dx$$

udregnes kun meget vanskeligt direkte. Dobbeltintegralet kan imidlertid opfattes som et planintegral over et område S i xy-planen. Udregn dette planintegral ved først at skrive det som et dobbeltintegral med omvendt integrationsorden.

Opgave E44 (uden hjælpemidler, 10 point).

Lad der være givet differentialformen

$$\omega = \left(4x^3y + 2x^3\right) dx + \left(x^4 + e^y\right) dy$$

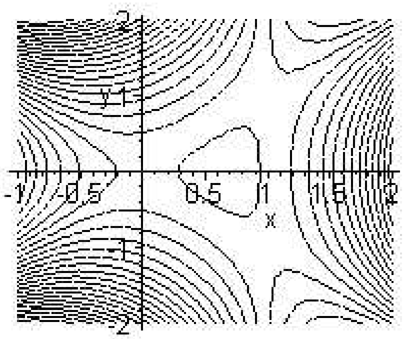
Vis, at ω er eksakt i R^2 og find samtlige stamfunktioner.

Opgave E45 (25 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = xy^2 - x^3 + x^2 - y^2$$

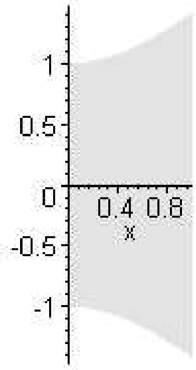
for alle $(x, y) \in R^2$. På figuren er til orientering vist et niveaukurvediagram for f.



1. Find de partielle afledede, og bestem herefter samtlige stationære punkter for f.

2. Det oplyses og skal ikke eftervises, at de stationære punkter på ét nær er egentlige saddelpunkter. Afgør om dette sidste stationæ re punkt er et egentligt maksimums- eller minimumspunkt.

3. Find største- og mindsteværdi for f på det begrænsede område S, der er beliggende mellem hyperbelgrenene givet ved $y^2 - x^2 = 1$ samt mellem linierne givet ved $x = 0$ og $x = 1$. Området er vist på figuren nedenfor.



Opgave E46 (15 point).

Der er givet kurveintegralet

$$\int_k \left(x \sinh x + 3xy^2\right) dx + \left(\ln (2 + y) + 7y^3\right) dy$$

hvor k er den lukkede kurve, der er sammensat af kurven k_1 givet i polære koordinater ved $r = \cos^2 \theta$ med $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, og det liniestykke på x-aksen, der forbinder endepunkterne af k_1. Kurven k gennemløbes i positiv omlø bsretning. Udregn kurveintegralets værdi ved brug af Greens sæ tning.

Opgave E47 (15 point).

Lad funktionen f være givet ved

$$f(t) = \begin{cases} t & for \quad t < 1 \\ 1 & for \quad t \geq 1 \end{cases}$$

1. Find den Laplacetransformerede af f ved integration direkte ud fra definitionen $\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$.

2. Find også den Laplacetransformerede af f ved brug af forsinkelsesreglen efter omskrivning af $f(t)$ til en sum indeholdende Heaviside-udtryk $u(t - a)$.

Opgave E48 (15 point).

Find den funktion x, der opfylder ligningen

$$x'(t) = 4 \int_0^t x(\tau)\, e^{-3(t-\tau)} d\tau$$

for alle $t \geq 0$, samt begyndelsesbetingelsen $x(0) = x_0$. Vink: Laplacetransformér og udnyt, at højre side af ligningen er foldningen af x med funktionen $t \longmapsto 4e^{-3t}$. Hermed kan foldningsreglen benyttes.

10. januar 2001

Opgave E49 (uden hjælpemidler, 10 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{4 + y} - x$$

for alle $(x,y) \in R^2$ med $y \neq -4$. Find de stationære punkter for f .

Opgave E50 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find planintegralet

$$\int_S ye^x dA$$

hvor S er det begrænsede område i anden kvadrant, der begrænses af koordinatakserne og parablen $x = y^2 - 1$.

Opgave E51 (uden hjælpemidler, 10 point).

Lad der være givet differentialformen

$$\omega = \left(2xe^{2y} + 12x^2\right) dx + \left(2x^2 + 2\right) e^{2y} dy$$

Vis, at ω er eksakt i R^2. Find derefter kurveintegralet

$$\int_k \omega$$

hvor k er kurven givet ved parameterfremstillingen

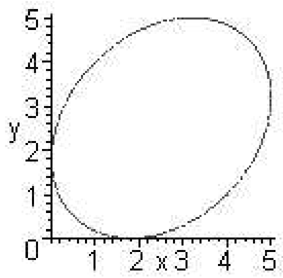
$$(x,y) = (t\cos t, t\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Opgave E52 (15 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = 25\left(x^2 + y^2\right) - 14xy - 90(x + y)$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Lad S være området indenfor eller på niveaukurven $f(x,y) = -81$. Niveaukurven (en ellipse) er vist på figuren.



Find største- og mindsteværdi for f på S.

Opgave E53 (10 point).

Lad f være en funktion af to variable. Funktionen vides at have kontinuerte partielle afledede i hele R^2. Desuden vides det, at de partielle afledede af f i punktet $(-2, 4)$ er givet ved

$$f_x(-2,4) = 3, \quad f_y(-2,4) = 7$$

Lad nu h være den sammensatte funktion givet ved forskriften

$$h(t) = f\left(\ln t - 2t^3, 3t^4 + 1\right)$$

for alle $t > 0$. Find differentialkvotienten $h'(1)$.

Opgave E54 (20 point).

Der er givet planintegralet

$$\int_S \frac{\cos(x+y)}{1+x+y^2} dA$$

hvor integrationsområdet S er givet ved

$$S = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le a \wedge 0 \le y \le x\}$$

Her er a en positiv konstant. Udregningen af dette planintegral er ikke helt nemt. Der skal derfor i stedet foretages en approksimativ udregning, der må forventes at give et rimeligt resultat, når a er lille. Idéen er at erstatte integranden

$$f(x,y) = \frac{\cos(x+y)}{1+x+y^2}$$

med dens 2. Taylorpolynomium $P_2(x,y)$ med udviklingspunkt $(0,0)$. Gå frem som følger

1. Find $P_2(x,y)$. For at mindske regningernes omfang kan man (uden at vise det) benytte, at

$$f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = -1, \quad f_{yy}(0,0) = -3$$

2. Udregn planintegralet
$$\int_S P_2(x,y)\,dA$$

Opgave E55 (25 point).

Der er givet differentialligningen

$$2x''(t) + 7x'(t) + 5x(t) = 15u(t-3) + 6\delta(t-3)$$

med begyndelsesbetingelserne $x(0) = 3$ og $x'(0) = -3$. Her er u Heavisides funktion, og δ er Diracs deltafunktion.

1. Vis, at den Laplacetransformerede af løsningen er givet ved
$$\overline{x}(s) = 3\frac{s+e^{-3s}}{s(s+1)}$$
for alle $s > 0$.

2. Idet det forventes, at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ eksisterer, skal man uden tilbagetransformation finde denne grænsevæ rdi.

3. Find nu ved tilbagetransformation af $\overline{x}(s)$ løsningen $x(t)$ for $t \geq 0$. Løsningen ønskes angivet som en stykkevist defineret funktion (en "tuborg-funktion").