MAT 91112 Opgave E 48

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

Der er givet tre løsninger til følgende lineære differentialligning

$$ty'' + (2t-1)\,y' + (t-1)\,y = 3t^2e^{-t}$$

Disse er

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t} - t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \\ f_2(t) &= -t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \\ f_3(t) &= e^{-t} - 2t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \end{aligned}$$

Vi skal først vise, at $f_1(t) > f_2(t) > f_3(t)$ for alle $t > 1$. Vi finder

$$f_1(t) > f_2(t) \Longleftrightarrow f_1(t) - f_2(t) > 0 \Longleftrightarrow e^{-t} > 0$$

Den sidste ulighed er åbenbart opfyldt for alle $t \in R$. Desuden har vi

$$f_2(t) > f_3(t) \Longleftrightarrow f_2(t) - f_3(t) > 0 \Longleftrightarrow e^{-t}\left(t^2-1\right) > 0$$

Den sidste ulighed er (når som hér $t > 0$) netop opfyldt for $t > 1$.

Vi skal udfra kendskabet til de tre løsninger f_1, f_2 og f_3 bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen. Vi ved, at forskellen mellem to løsninger til den inhomogene ligning er en løsning til den homogene ligning. Derfor er både $f_1(t) - f_2(t) = e^{-t}$ og $f_2(t) - f_3(t) = t^2e^{-t} - e^{-t}$ løsninger til den homogene ligning. Men da summen af to løsninger til den homogene ligning igen er en løsning til den homogene ligning er også $\left(t^2e^{-t} - e^{-t}\right) + e^{-t} = t^2e^{-t}$ en løsning til den homogene ligning. Løsningerne $y_1 = e^{-t}$ og $y_2 = t^2e^{-t}$ har Wronski-determinant

$$W = \begin{vmatrix} e^{-t} & t^2e^{-t} \\ -e^{-t} & 2te^{-t} - t^2e^{-t} \end{vmatrix} = 2te^{-2t}$$

der er forskellig fra nul, når $t > 0$. Altså er den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2t^2e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Vi skal nu blot bruge én partikulær løsning til den inhomogene ligning. Vi har faktisk tre. Vi kan tage f_1 og fra den fjerne led, der løser den homogene ligning. Hermed ser vi, at t^3e^{-t} er en løsning til den inhomogene ligning. Den fuldstændige løsning er

$$y(t) = t^3e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2t^2e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.