MAT 91112 Opgave E 47

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

Der er givet integralerne

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^{\frac{4}{5}}}dx \\
B &= \int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx \\
C &= \int_0^1 \frac{1}{(x^2-3x+2)^{\frac{4}{5}}}dx
\end{aligned}
$$

Disse integraler er alle uegentlige, fordi integrandernes nævnere antager værdien 0 når $x = 1$ (og også når $x = 2$, men det er irrelevant). Da ingen af tællerne er nul for $x = 1$, har integranderne derfor en singularitet i 1.

Vi kan finde stamfunktioner til de to første integrander ved brug af substitutionen $t = x^2 - 3x + 2$, hvorved $dt = (2x-3)\,dx$. Vi finder

$$
\begin{aligned}
F_A(x) &= \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^{\frac{4}{5}}}dx = \int \frac{dt}{t^{\frac{4}{5}}} = \int t^{-\frac{4}{5}}dt = 5t^{\frac{1}{5}} = 5\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{5}} \\
F_B(x) &= \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x^2-3x+2\right|
\end{aligned}
$$

Da åbenbart F_A er kontinuert på $[0,1]$ er integralet A konvergent, og værdien er

$$A = F_A(1) - F_A(0) = -5 \cdot 2^{\frac{1}{5}} = -5\sqrt[5]{2}$$

F_B er ikke defineret i 1. Det er hvad det er. Men da $F_B(x) \to -\infty$ for $x \to 1$, er B divergent.

En stamfunktion til integranden i C er ikke til at finde. Vi bruger vinket. Vi kalder integranderne i A og C for henholdsvis g og f. Hermed finder vi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2x-3} \to -1$$

for $x \to 1$. Grænseværdien er altså et tal forskelligt fra nul. Da A er konvergent, er dermed også C konvergent.