MAT 91112 Opgave E46

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

På intervallet $[0, \pi]$ er der givet funktionen f ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin x} & \text{for} \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & \text{for} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vi skal først bestemme tallet a, så f er kontinuert i $\frac{\pi}{2}$. Vi skal altså sørge for at grænseværdi og funktionsværdi er ens i $\frac{\pi}{2}$. Vi finder, at $f(x) \to$ "$\frac{0}{0}$" for $x \to \frac{\pi}{2}$. Vi bruger l'Hospitals regel, og finder

$$\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\cos x}$$

der igen giver et nyt "$\frac{0}{0}$" problem. Vi bruger l'Hospitals regel på det nye problem og finder

$$\frac{2}{\sin x} \to 2$$

for $x \to \frac{\pi}{2}$. Derfor gælder også, at

$$\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\cos x} \to 2$$

for $x \to \frac{\pi}{2}$, og dermed også, at $f(x) \to 2$ $x \to \frac{\pi}{2}$. Altså skal a have værdien 2.

Vi skal nu finde en tilnærmelse til $\int_0^\pi f(x)\,dx$ ved brug af Simpsons formel med $n = 2$. Hermed er $h = \frac{\pi}{2}$, så vi finder

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\frac{\pi}{2}}{3}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi^2}{4} + 8 + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi^2}{2} + 8\right) \\ &= \frac{1}{12}\pi^3 + \frac{4}{3}\pi \approx \frac{30}{12} + 4 = 6.5 \approx 7 \end{aligned}$$

idet resultatet skal angives med ét betydende ciffer.