MAT 91112 Opgave E41

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

Der er givet integralet

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1-2\sin t)^2} dt$$

1. Da $1-2\sin t = 0$ for $t = \frac{\pi}{6}$, og da $\cos\frac{\pi}{6} \neq 0$, har integranden en singularitet i $\frac{\pi}{6}$. Integralet er altså uegentligt.

2. Vi deler op:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1-2\sin t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{(1-2\sin t)^2} dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1-2\sin t)^2} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

   Hvis blot ét af de to integraler I_1 og I_2 er divergent, så er pr. definition I også divergent. Vi betragter I_1. Lad $0 < c < \frac{\pi}{6}$. Vi finder ved brugen af substitutionen $u = 1 - 2\sin t$, så $du = -2\cos t dt$, at

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{\cos t}{(1-2\sin t)^2} dt &= -\frac{1}{2}\int_1^{1-2\sin c} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1-2\sin c} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\sin c} - 1\right) \to \infty \end{aligned}$$

   for $c \to \frac{\pi}{6} -$. Altså er det uegentlige integral I_1 divergent, og det er I derfor også.