MAT 91112 Opgave E40

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

Vi betragter differentialligningen

$$t^2 y' = ty - y^2$$

for $t > 0$.

1. Vi sætter $y(t) = \frac{1}{v(t)}$ og finder $y'(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)^2}$. Ved indsættelse fås

$$t^2 \left(-\frac{v'(t)}{v(t)^2} \right) = \frac{t}{v(t)} - \frac{1}{v(t)^2}$$

Efter omordning fås

$$v' + \frac{1}{t} v = \frac{1}{t^2}$$

der jo er en lineær (og normeret) differentialligning. Panserformlen giver, idet $P(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t, \quad e^{P(t)} = t, \quad e^{-P(t)} = \frac{1}{t}$,

$$v(t) = \frac{1}{t} \int t \cdot \frac{1}{t^2} dt + C \frac{1}{t} = \frac{\ln t}{t} + \frac{C}{t} = \frac{C + \ln t}{t}$$

hvor C er en arbitrær reel konstant. Hermed ser vi, at de fra nul forskellige løsninger alle er givet ved

$$y(t) = \frac{t}{C + \ln t}$$

hvor C er en arbitrær reel konstant. Det ses direkte, at $y(t) = 0$ for alle t åbenbart også er løsning.

2. Vi sætter nu $y(t) = tw(t)$ og finder så, at $y' = w + tw'$. Ved indsættelse fås

$$t^2 (w + tw') = t^2 w - t^2 w^2$$

Efter reduktion fås $tw' = -w^2$, der også kan skrives

$$t \frac{dw}{dt} = -w^2$$

Denne differentialligning er separabel. Før separation bemærker vi, at $w(t) = 0$ for alle t, åbenbart er løsning. De øvrige løsninger findes ved separation:

$$-\int \frac{dw}{w^2} = \int \frac{dt}{t}$$

Efter integration fås

$$\frac{1}{w} = \ln t + C$$

hvor C er en arbitrær reel konstant. Altså $w(t) = \frac{1}{C+\ln t}$. Heraf fås

$$y(t) = \frac{t}{C + \ln t}$$

hvor C er en arbitrær reel konstant. Desuden er $y(t) = 0$ for alle t, også løsning.

3. Vi indsætter informationen $y(1) = \frac{1}{3}$ i $y(t) = \frac{t}{C+\ln t}$ og finder

$$\frac{1}{3} = y(1) = \frac{1}{C + \ln 1} = \frac{1}{C}$$

så $C = 3$. Den søgte løsning er

$$y(t) = \frac{t}{3 + \ln t}$$

Definitionsintervallet findes ved at forlange $3 + \ln t \neq 0$ og desuden, at intervallet skal indeholde $t = 1$. Derved fås, at $3 + \ln t > 0$ altså $t > e^{-3}$. Intervallet er altså

$$\left] e^{-3}, \infty \right[$$