MAT 91112 Opgave E37

Preben Alsholm
IFAK, DTU

18. november 2003

Vi skal finde den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + 10y = 250t^2$$

Differentialligningen er lineær og har konstante (og reelle) koefficienter. Karakterligningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

der har rødderne $-1 \pm 3i$. Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning er derfor

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(3t) + c_2 e^{-t} \sin(3t), \qquad c_1, c_2 \in R$$

Ansats til en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning:

$$y_p = at^2 + bt + c$$

Ved differentiation fås $y_p' = 2at + b, \quad y_p'' = 2a$. Ved indsættelse i differentialligningen fås

$$t^2(10a) + t(4a + 10b) + (2a + 2b + 10c) = 250t^2$$

Da dette skal gælde for alle $t \in R$, fås

$$\begin{aligned} 10a &= 250 \\ 4a + 10b &= 0 \\ 2a + 2b + 10c &= 0 \end{aligned}$$

Hvoraf fås, at $a = 25, b = -10, c = -3$. Vi har altså, at $y_p = 25t^2 - 10t - 3$.

Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er derfor

$$y(t) = 25t^2 - 10t - 3 + c_1 e^{-t} \cos(3t) + c_2 e^{-t} \sin(3t), \qquad c_1, c_2 \in R$$