MAT 91112 Opgave E20

Preben Alsholm

6/12 1997

Der er givet differentialligningen

$$y' = \cos t - \arctan y \tag{1}$$

med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1$. Løsningen kaldes g.

Det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0 er givet ved

$$P_2(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2$$

$g(0) = 1$ er jo givet. $g'(0)$ findes ved indsætning af $t = 0$ i (1), hvor $y = g(t)$, hvorved vi finder $g'(0) = \cos 0 - \arctan g(0) = 1 - \frac{\pi}{4}$. Ved differentiation af $g'(t) = \cos t - \arctan g(t)$ fås

$$g''(t) = -\sin t - \frac{g'(t)}{1 + g(t)^2}$$

Ved indsættelse af $t = 0$ fås $g''(0) = -\frac{g'(0)}{1+g(0)^2} = -\frac{1-.\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$. Hermed har vi

$$P_2(t) = 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)t + \left(\frac{1}{16}\pi - \frac{1}{4}\right)t^2$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} P_2(0.1) &\cong 1.0209 \\ P_2(0.2) &\cong 1.0408 \end{aligned}$$

Vi skal nu ved Eulers metode bestemme tilnærmede værdier for $g(0.1)$ og $g(0.2)$. Skridtlængden h skal være 0.1. Vi finder med $t_0 = 0, y_0 = 1, f(t, y) = \cos t - \arctan y$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1(\cos 0 - \arctan 1) = 1.0215 \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \\ y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.0215 + 0.1f(0.1, 1.0215) \\ &= 1.0215 + 0.1(\cos 0.1 - \arctan 1.0215) = 1.0414 \end{aligned}$$

Eulers bud på $g(0.1)$ og $g(0.2)$ er altså

$$\begin{aligned} g(0.1) &\cong 1.0215 \\ g(0.2) &\cong 1.0414 \end{aligned}$$