

Eksamensopgaver i MAT 91112

IFAK, DTU

Preben Alsholm

1997-2001

6. januar 1997

Opgave E1 (uden hjælpemidler, 7 point).

Lad funktionen F være givet ved forskriften

$$F(x) = \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Find $F'(x)$, $F''(x)$ og $F'''(x)$. Vink: Forsøg *ikke* på først at udregne integralet!

Opgave E2 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'(t) + 2y(t) = 2t \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Opgave E3 (uden hjælpemidler, 8 point).

Løs ligningen

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2+3i} = \frac{1}{1+i}.$$

Opgave E4 (10 point).

Lad h være en differentiabel funktion med kontinuert afledet h' . Det oplyses, at det uegentlige integral $\int_0^\infty xh'(x)dx$ er konvergent med værdi 34, og at $\lim_{x \rightarrow \infty} xh(x) = 14$.

Vis, at det uegentlige integral $\int_0^\infty h(x)dx$ er konvergent og bestem dets værdi. Vink: Lav delvis integration på $\int_0^R xh'(x)dx$. Betragt derefter grænseovergangen $R \rightarrow \infty$.

Opgave E5 (20 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} + 9y = 5e^{-t} \quad \text{for } t \in R.$$

Opgave E6 (25 point).

Der er givet differentialligningen

$$y' = \frac{1}{t} y \ln y - \frac{t}{1+t^2} y$$

hvor $t > 0$ og $y > 0$.

1. Ved at indføre en ny ubekendt funktion $v(t) = \ln y(t)$, hvorved altså $y(t) = e^{v(t)}$, skal man vise, at den fuldstændige løsning er givet ved

$$y(t) = e^{ct - t \cdot \arctan t}$$

hvor c er en arbitrær reel konstant.

2. For enhver værdi af konstanten $c \in R$ skal man undersøge $y(t)$ for $t \rightarrow \infty$.

Opgave E7 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = g(x^2) \quad \text{for alle } x \in R,$$

hvor funktionen g vides at være vilkårligt ofte differentiabel. Endvidere vides, at $g(1) = 3$, $g'(1) = 2$ og $g''(1) = \frac{1}{2}$.

1. Find det andet Taylorpolynomium P_2 for f med udviklingspunkt 1.
2. Vis, at

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

for alle $x \in [0.9, 1.1]$, idet det oplyses, at $|g''(x)| \leq 1$ og $|g'''(x)| \leq 1$ for alle $x \in R$.

3. juni 1997

Opgave E8 (uden hjælpemidler, 10 point).

1. Vis, at funktionen F givet ved forskriften

$$F(x) = \frac{\sin x}{e^{2x} - 1} \quad \text{for } x \neq 0,$$

er en stamfunktion til funktionen f givet ved

$$f(x) = \frac{(e^{2x} + 1) \cos x}{e^{4x} - 1} - \frac{2e^{2x} \sin x}{(e^{2x} - 1)^2} \quad \text{for } x \neq 0.$$

2. Undersøg, om det uegentlige integral $\int_0^\pi f(x) dx$ er konvergent.

Opgave E9 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y''(t) + 14y'(t) + 58y(t) = 29t.$$

Opgave E10 (uden hjælpemidler, 5 point).

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} (1 + 2i)z_1 - 2z_2 &= 0 \\ (2 + \frac{3}{2}i)z_1 + iz_2 &= 5 - 3i \end{aligned}$$

i de ubekendte z_1 og z_2 . Bestem z_1 . Løsningen ønskes angivet på formen $z_1 = x + iy$, hvor $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave E11 (20 point).

Lad f være funktionen med forskriften

$$f(x) = \sin(\ln x) \quad \text{for } x > 0.$$

1. Vis, at det andet Taylorpolynomium, P_2 , for f med udviklingspunkt 1 er givet ved

$$P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

2. Vis ved en vurdering af restleddet i Taylors formel, at

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 10^{-3}$$

for $|x - 1| \leq 0.1$.

Opgave E12 (20 point).

Betragt følgende differentialligning

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + y = 2t \quad \text{for } t > 0. \quad (*)$$

1. Erstat i differentialligningen $y(t)$ med $tv(t)$. Sæt altså $y(t) = tv(t)$, hvor v er en ny ubekendt funktion v . Vis, at v tilfredsstiller en differentialligning, der indeholder v' og v'' , men ikke v .
2. Løs den i spørgsmål 1 fundne differentialligning ved midlertidigt at sætte $w = v'$.
3. Angiv den fuldstændige løsning til den oprindelige differentialligning (*).

Opgave E13 (20 point).

Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin t}{\cos y} \quad \text{i området } y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, t \in R. \quad (**)$$

1. Bestem den fuldstændige løsning (på eksplicit form).
2. Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$. Find også løsningens definitionsinterval.

Opgave E14 (15 point).

Der er givet polynomiet p ved forskriften

$$p(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 + 10z - 20 \quad \text{for } z \in \mathbb{C}.$$

Find samtlige rødder i $p(z)$, idet det oplyses, at $1 + i\sqrt{3}$ er en af rødderne. Indtegn røddernes placering i den komplekse plan.

22. december 1997

Opgave E15 (uden hjælpemidler, 6 point).

Undersøg, om det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.

Vink: Substituér $u = \ln(1+x)$.

Opgave E16 (uden hjælpemidler, 11 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y''(t) + 9y'(t) + 14y(t) = 250 \sin t.$$

Opgave E17 (uden hjælpemidler, 8 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{e^x - 1 - x} & \text{for } x < 0 \\ \frac{4 \cos x}{e^x + 1} & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Vis, at f er kontinuert i 0.

Opgave E18 (10 point).

Find grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{16x^4 + x^2 + 5} - \sqrt{16x^4 - 3x^2 - 7} \right).$$

Vink: Udnyt omskrivningen $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.

Opgave E19 (20 point).

Betrakt følgende differentialligning

$$x'(t) = -x(t) + 2x(t)^2 e^{-t}. \quad (*)$$

1. Find den fuldstændige løsning til (*). Vink: Alle løsninger på nær én kan findes ved i differentiaalligningen at sætte

$$x(t) = \frac{1}{v(t)}$$

hvor v er en ny ubekendt funktion. Det vil vise sig, at v tilfredsstiller en lineær differentiaalligning.

2. Find den løsning til (*), der er en lige funktion.

Opgave E20 (25 point).

Der er givet differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - \arctan y$$

med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1$. Løsningen til dette begyndelsesværdiproblem vil vi kalde $y = g(t)$. Den kan formodentlig ikke udtrykkes ved kendte elementære funktioner. Derfor skal vi i det følgende på to forskellige måder bestemme tilnærmelser til g .

1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for g med udviklingspunkt 0. Angiv $P_2(0.1)$ og $P_2(0.2)$ med 5 betydende cifre.
2. Bestem ved brug af Eulers metode tilnærmede værdier for $g(0.1)$ og $g(0.2)$. Brug skridtlængden 0.1. Angiv resultaterne med 5 betydende cifre.

Opgave E21 (20 point).

Der er givet polynomiet p ved forskriften

$$p(z) = (z^3 - 8z^2 + 22z - 20)(z^3 + i) \quad \text{for } z \in C,$$

hvor i som sædvanligt betegner den imaginære enhed.

1. Find samtlige rødder i $p(z)$. Rødderne ønskes angivet på rektangulær form, altså på formen $x + iy$, hvor $x, y \in R$. Rødderne ønskes *ikke* angivet som decimalbrøk. Lommeregner må kun benyttes til kontrol.
2. Indtegn røddernes placering i den komplekse plan.

3. juni 1998

Opgave E22 (uden hjælpemidler, 7 point).
Find grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin 6x \cdot (2 \sin x + 1)}{4 \sin^2 x - 1}$$

Opgave E23 (uden hjælpemidler, 10 point).
Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y' + \frac{1}{t}y = e^t$$

for $t > 0$.

Opgave E24 (uden hjælpemidler, 8 point).
Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

1. Find differentialkvotienten af $f(x)$ for $x \neq 0$.
2. Brug definitionen på differentiabilitet og differentialkvotient til at vise, at f er differentiabel i 0.

Opgave E25 (20 point).

1. Brug Eulers formler til at vise, at

$$\cos 3t \cdot \sin 2t = \frac{1}{2} \sin 5t - \frac{1}{2} \sin t$$

2. Kontrollér, at $y(t) = \frac{1}{4}t \cos t$ er en partikulær løsning til differentiaalligningen

$$y'' + y = -\frac{1}{2} \sin t$$

3. Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + y = \cos 3t \cdot \sin 2t$$

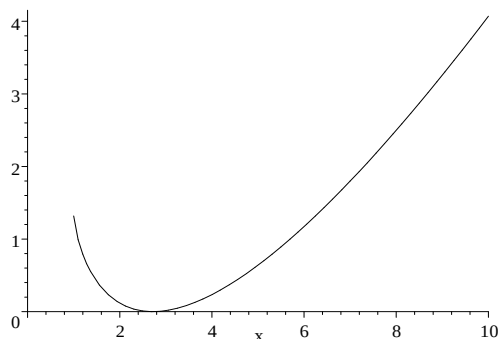
Opgave E26 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = \int_e^x \ln(\ln t) dt$$

for alle $x > 1$. En del af funktionens graf er til orientering vist på figuren nedenfor.

$$x \ln \ln x + \operatorname{Ei}(1, -\ln x) - \operatorname{Ei}(1, -1)$$



1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for f med udviklingspunkt e .

Vink: Forsøg ikke på først at udregne integralet!

2. Vis ved hjælp af Taylors formel, at

$$f(x) > P_2(x) \text{ for } 1 < x < e, \text{ og } f(x) < P_2(x) \text{ for } x > e.$$

3. Vis ved en vurdering af restleddet i Taylors formel, at den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$ er numerisk mindre end $2.5 \cdot 10^{-3}$, når $x \in [2.5, 3]$.

Opgave E27 (20 point).

Der er givet integralet

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

1. Forklar, hvorfor A er et uegentligt integral.
2. Lad $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ved delvis integration fås

$$\begin{aligned} \int_c^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx &= \int_c^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \ln(\sin x) dx \\ &= [x \ln(\sin x)]_c^{\pi/2} - \int_c^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad (*) \end{aligned}$$

Ved grænseovergangen $c \rightarrow 0^+$ fås heraf

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad (**)$$

Forklar, hvorfor første led på højre side i (*) forsvandt.

3. Integralet på højre side i (**) er et egentligt integral, da $\frac{x}{\sin x}$ som bekendt har en grænseværdi (nemlig 1) for $x \rightarrow 0$. Find en numerisk tilnærmelse til A (med 5 betydende cifre) ved at anvende Simpsons formel på integralet på højre side i (**) med antal delintervaller $n = 4$. Til sammenligning kan oplyses, at den eksakte værdi af A kan udregnes til $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Opgave E28 (15 point).

Betragt for $z \in C$ ligningen

$$z^8 - \sqrt{3} \cdot z^4 + 1 = 0.$$

I det følgende ønskes *ikke* brugt decimalbrøk. Lommeregner må kun benyttes til kontrol.

1. Find samtlige rødder. Rødderne ønskes kun angivet på polær form.
2. Indtegn røddernes placering i den komplekse plan.

16. december 1998

Opgave E29 (uden hjælpemidler, 5 point).

Skriv ethvert af de 4 komplekse tal $1 + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-2 - 2i$ og $-i$ på polær form, d.v.s. på formen re^{iv} , hvor $r \geq 0$ og $v \in R$. Angiv desuden på en figur tallenes placering i den komplekse plan.

Opgave E30 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + 10y' + 21y = 8e^{-3t}$$

Opgave E31 (uden hjælpemidler, 10 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{for } x \leq 1 \\ a \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + b & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

hvor a og b er konstanter. Bestem a og b , så funktionen f er kontinuert i 1 og så grænseværdien $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ eksisterer. (Hermed er f også differentiabel i 1).

Opgave E32 (20 point).

Om en funktion f oplyses, at den er vilkårligt ofte differentiabel, samt at dens fjerde Taylorpolynomium P_4 med udviklingspunkt 0 er givet ved

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$$

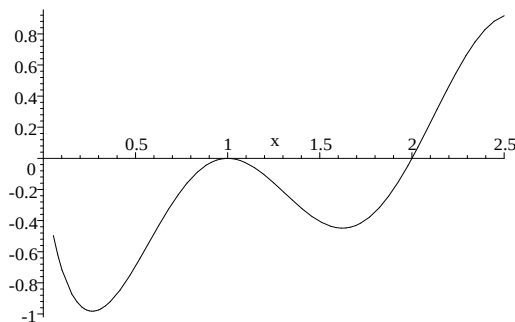
1. Angiv (med begrundelse) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ og $f^{(4)}(0)$.
2. Det oplyses, at $f^{(5)}(0) = 0$ (d.v.s. $P_4(x)$ og $P_5(x)$ er samme polynomium), samt at $|f^{(6)}(x)| \leq \frac{1}{6}$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$. Giv på grundlag heraf en vurdering af $|f(x) - P_4(x)|$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$. Undersøg specielt, om det kan garanteres, at $|f(x) - P_4(x)| < 4 \cdot 10^{-6}$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Opgave E33 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x) = \ln(x) \sin(\pi x)$$

for alle $x > 0$. En del af funktionens graf er til orientering vist på figuren nedenfor.



$\ln x \sin(\pi x)$

1. Vis, at

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

2. Find en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^2 f(x) dx$$

ved brug af Simpsons formel med antal delintervaller lig med 4. Som $f(0)$ bruges grænseværdien $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, altså 0. Resultatet ønskes også givet

som decimalbrøk med 2 decimaler, idet man kan udnytte tilnærmelsen $\ln 3 \cong 1.1$. Til sammenligning kan anføres, at Maple finder, at integralets værdi er -0.7759291740 med 10 betydende cifre.

Opgave E34 (25 point).

Der er for $t > 0$ givet differentiaalligningen

$$t y y' = \sin t - y^2$$

1. Find den fuldstændige løsning ved at indføre en ny ubekendt funktion v ved $v(t) = y(t)^2$.
2. Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
3. Vis, at definitionsintervallet for den i spørgsmål 2 fundne løsning ihvertfald indeholder intervallet $]0, \pi]$. Vink: På delintervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$ kan man udnytte, at $\tan t > t$.

Opgave E35 (10 point).

Betragt for $z \in C$ polynomiet

$$p(z) = z^3 + 3z^2 + \frac{1}{2}z + 3$$

Polynomiet har kun én reel rod. Denne skal ikke bestemmes. Den ene af polynomiets imaginære rødder ligger nær $z_0 = i$. En første tilnærmelse z_1 til denne rod kan fås ved *Newtons metode*:

$$z_1 = z_0 - \frac{p(z_0)}{p'(z_0)}$$

hvor $p'(z)$ betegner den sædvanlige afledede af $p(z)$. Bestem z_1 når $z_0 = i$. Svaret ønskes angivet på formen $z_1 = a + ib$, hvor $a, b \in R$.

4. juni 1999

Opgave E36 (uden hjælpemidler, 7 point).

Udregn integralet

$$\int_1^e \frac{1}{t(1 + \ln t)} dt$$

Vink: Substituér $u = 1 + \ln t$.

Opgave E37 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y'' + 2y' + 10y = 250t^2$$

Opgave E38 (uden hjælpemidler, 8 point).

Find grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(2x)}{\frac{1}{x}}$$

Opgave E39 (15 point).

1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt π for løsningen $y(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$y'(t) = (2 + y(t))^2 \cos t, \quad y(\pi) = -1$$

Opgave E40 (25 point).

Differentialligningen

$$t^2 y'(t) = t y(t) - y(t)^2 \quad (*)$$

betragtes for $t > 0$.

1. Indfør i (*) en ny ubekendt funktion v ved at sætte $y(t) = \frac{1}{v(t)}$. Den differentialligning, som v opfylder, er lineær. Løs denne. Angiv derved (for $y \neq 0$) den fuldstændige løsning til (*).
2. Indfør i (*) en ny ubekendt funktion w ved at sætte $y(t) = t w(t)$. Udled den differentialligning, som w opfylder, og løs den. Angiv derved atter den fuldstændige løsning til (*).
3. Find den løsning til (*), der har begyndelsesværdien $y(1) = \frac{1}{3}$. Angiv også løsningens definitionsinterval.

Opgave E41 (20 point).

Betragt integralet

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 - 2 \sin t)^2} dt$$

1. Forklar, hvorfor I er et uegentligt integral.
2. Undersøg, om I er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.

Opgave E42 (15 point).

1. Find, angivet på rektangulær form, rødderne i ligningen

$$z^4 + 64 = 0, \quad z \in C$$

2. Udtrykket

$$q(z) = \frac{z^4 + 64}{z - 2 - 2i}$$

kan skrives på formen $q(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ hvor $a, b, c \in C$. Find konstanten c . Den ønskes angivet på rektangulær form.

21. december 1999

Opgave E43 (uden hjælpemidler, 6 point).

Løs ligningen

$$\frac{1}{z-i} - \frac{1}{3+i} = 1$$

Løsningen skal angives på rektangulær form.

Opgave E44 (uden hjælpemidler, 12 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + \cot t \cdot y = t, \quad t \in]0, \pi[$$

hvor $\cot t$ er cotangens til t , altså $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Opgave E45 (uden hjælpemidler, 12 point).

Lad funktionen f være givet ved forskriften $f(x) = x \cos x$. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for f med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$.

Opgave E46 (15 point).

Lad funktionen f være givet på intervallet $[0, \pi]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin x} & \text{for } x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & \text{for } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Bestem tallet a , så f er kontinuert i $\frac{\pi}{2}$.
2. Find en tilnærmelse til $\int_0^\pi f(x) dx$ ved brug af Simpsons formel med blot 2 delintervaller, altså med $n = 2$. Slutresultatet bedes angivet med kun ét betydende ciffer, og det kan benyttes, at $\pi \cong 3$ og $\pi^3 \cong 30$.

Opgave E47 (25 point).

Der er givet tre integraler

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^{\frac{4}{5}}} dx \\ B &= \int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx \\ C &= \int_0^1 \frac{1}{(x^2-3x+2)^{\frac{4}{5}}} dx \end{aligned}$$

1. Forklar, hvorfor alle tre integraler er uegentlige.
2. Undersøg, om de to første integraler (A og B) er konvergente, og find i bekræftende fald deres værdier.
3. Undersøg, om integralet C er konvergent. Vink: Sammenlign integranderne i C og A .

Opgave E48 (15 point).

Betragt for $t > 0$ følgende lineære differentialligning

$$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 3t^2e^{-t} \quad (*)$$

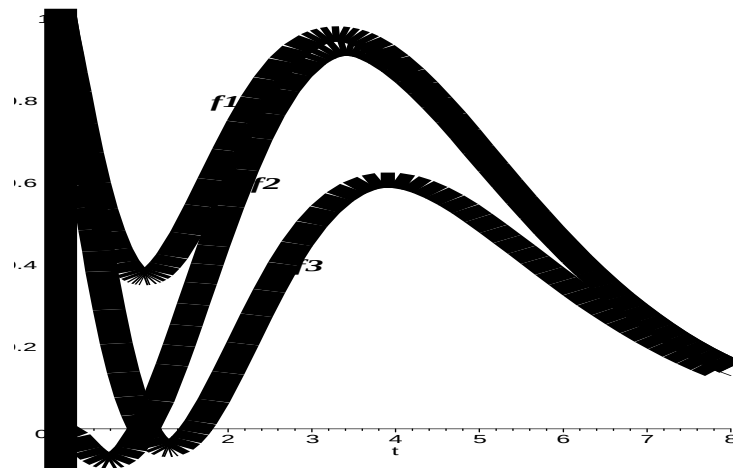
Det oplyses og skal ikke eftervises, at de tre løsninger, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned} y(1) &= e^{-1}, y'(1) = 0 \\ y(1) &= 0, y'(1) = e^{-1} \\ y(1) &= 0, y'(1) = -e^{-1} \end{aligned}$$

er henholdsvis

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t} - t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \\ f_2(t) &= -t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \\ f_3(t) &= e^{-t} - 2t^2e^{-t} + t^3e^{-t} \end{aligned}$$

Løsningernes grafer er vist på figuren.



1. Figuren tyder på, at $f_1(t) > f_2(t) > f_3(t)$ for alle $t > 1$. Vis, at dette er korrekt.
2. Find den fuldstændige løsning til (*) udfra kendskabet til løsningerne f_1, f_2 og f_3 .

Opgave E49 (15 point).

Differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = y^3 - y^2 - 3y + 3 \quad (**)$$

har tre konstante løsninger y_1, y_2 og y_3 . Vi nummererer dem således, at

$$y_1 < y_2 < y_3$$

1. Bestem disse tre løsninger. (NB: Andre løsninger skal ikke bestemmes!).
2. Betragt en løsning $y(t)$ til (**), der opfylder betingelsen $y_2 < y(0) < y_3$. Afgør, om $y(t)$ er en voksende eller aftagende funktion af t .