MAT 01902 Opgave E26

Preben Alsholm

December 2002

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = (2x+y)\,e^{-xy}$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Vi skal bestemme største- og mindsteværdien for f på det trekantede område begrænset af koordinatakserne og linien med ligningen $2x+y=4$.

De stationære punkter findes først. De partielle afledede af f er givet ved

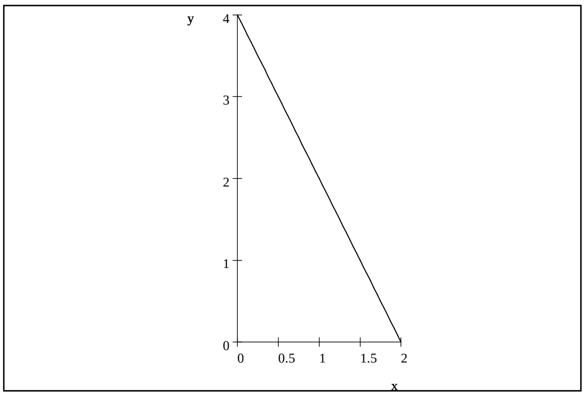
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2e^{-xy} + (2x+y)(-y)\,e^{-xy} = e^{-xy}\left(-y^2 - 2xy + 2\right) \\ f_y(x,y) &= e^{-xy} + (2x+y)(-x)\,e^{-xy} = e^{-xy}\left(-2x^2 - xy + 1\right) \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Leftrightarrow -y^2 - 2xy + 2 = 0 \wedge -2x^2 - xy + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \vee (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

Punkterne $\left(\frac{1}{2},1\right)$ og $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ er altså de stationære punkter for f. Kun $\left(\frac{1}{2},1\right)$ ligger indenfor trekanten.

$4-2x$



Vi skal nu undersøge randen, som ses at bestå af 3 dele:

1. x-aksedelen: $y = 0, x \in [0, 2]$. Vi finder $f(x, 0) = 2x$. Størsteværdi 4, mindsteværdi 0.

2. y-aksedelen: $x = 0, y \in [0, 4]$. Vi finder $f(0, y) = y$. Størsteværdi 4, mindsteværdi 0.

3. Den skrå del: $y = 4 - 2x, x \in [0, 2]$. Vi finder

   $$f(x, 4-2x) = 4e^{-x(4-2x)} = 4\exp(2x(x-2))$$

   Da andengradspolynomiet $x(x-2)$ er mindst lige midt mellem nulpunkterne 0 og 2, er mindsteværdien for f på denne randdel lig med $4e^{-2}$. Størsteværdien antages i endepunkterne af intervallet $[0, 2]$ og er dermed 4.

Størsteværdien for f på randen som helhed er dermed 4 og mindsteværdien er 0. Disse værdier skal sammenholdes med værdien af f i det stationære punkt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Værdien er $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2e^{-1}$, som klart er mindre end 4 og større end nul. Konklusionen er, at tørsteværdien for f på det trekantede område er 4 og mindsteværdien er 0.