

MAT 01902 Opgave E19

Preben Alsholm

Juni 2002

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y, z) = 2z^3 + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 10x - 6y + 13$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Vi skal bestemme de stationære punkter for f og afgør for hvert af disse dets type.

Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 4x + 2y - 10 \\ f_y(x, y, z) &= 2y + 2x - 6 \\ f_z(x, y, z) &= 6z^2 + 6z \end{aligned}$$

Altså har vi, at

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (0, 0, 0) \\ \iff 2x + y = 5 \wedge x + y = 3 \wedge (z = 0 \vee z = -1) \\ \iff (x, y) = (2, 1) \wedge (z = 0 \vee z = -1) \\ \iff (x, y, z) = (2, 1, 0) \vee (x, y, z) = (2, 1, -1) \end{aligned}$$

Der er altså 2 stationære punkter, nemlig $(2, 1, 0)$ og $(2, 1, -1)$.

Typen af disse punkter afgøres ved brug af Hesse-matricen:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

I det konkrete tilfælde findes

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z + 6 \end{pmatrix}$$

Konkret findes

$$H(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

der har egenverdierne 6 og $3 \pm \sqrt{5}$. Da disse tre alle er positive, er det stationære punkt $(2, 1, 0)$ et egentligt lokalt minimumspunkt. Videre findes

$$H(2, 1, -1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

der har egenverdierne -6 og $3 \pm \sqrt{5}$. To er positive og én er negativ, så det stationære punkt $(2, 1, -1)$ er altså et sadelpunkt.