MAT 01901 Opgave E26

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet de uegentlige integraler

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x - 1} dx \\ B &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\left((\ln x)^2 + 1\right)} \end{aligned}$$

Vi skal undersøge, om de er konvergente eller ej, og i bekræftende fald finde værdien.

Integralet A er uegentligt, da integranden går mod uendelig for $x \to 0$. Vi finder med substitutionen $t = e^x - 1$, så $dt = e^x dx$, at

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln (e^x - 1)$$

Hermed har vi, idet vi holder os lidt væk ($\varepsilon > 0$) fra det kritiske punkt 0, at

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x - 1} dx &= [\ln (e^x - 1)]_{\varepsilon}^{\ln 2} = \ln \left(e^{\ln 2} - 1\right) - \ln (e^{\varepsilon} - 1) \\ &= \ln (1) - \ln (e^{\varepsilon} - 1) = -\ln (e^{\varepsilon} - 1) \to \infty \end{aligned}$$

for $\varepsilon \downarrow 0$. Konklusionen er dermed, at A er divergent.

Integralet B er uegentligt, da øvre grænse i integralet er ∞. Vi finder med substitutionen $t = \ln x$, så $dt = \frac{dx}{x}$, at

$$\int \frac{dx}{x\left((\ln x)^2 + 1\right)} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t = \arctan (\ln x)$$

Hermed har vi, når $R > 0$, at

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{dx}{x\left((\ln x)^2 + 1\right)} &= [\arctan (\ln x)]_1^R = \arctan (\ln R) - \arctan (\ln 1) \\ &= \arctan (\ln R) \to \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

for $R \to \infty$. Konklusionen er dermed, at B er konvergent med værdien $\frac{\pi}{2}$.