MAT 91117 Opgave E7

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Matricen A og søjlevektorerne S_1 og S_2 er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Det oplyses, at S_1 og S_2 er egenvektorer til A. Vi skal finde de tilsvarende egenværdier. Vi finder

$$AS_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2S_1$$

så S_1 er egenvektor hørende til egenværdien 2. Tilsvarende fås

$$AS_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4S_2$$

så S_2 er egenvektor hørende til egenværdien 4.

2. Det oplyses, at A også har egenværdien -4. Vi skal finde de tilhørende egenvektorer. Vi skal altså løse $(A + 4E)\,v = 0$. Totalmatricen for dette system er

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -7 & 6 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ved operationerne (i rækkefølge) $R_1 := \frac{1}{4}R_4, R_2 := R_2 + 7R_1, R_3 := R_3 + 4R_1$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der svarer til systemet

$$\begin{aligned} v_1 - v_3 &= 0 \\ 6v_2 - 12v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Idet vi sætter $v_3 = t$, fås $v_2 = 2t$ og $v_1 = t$. De til egenværdien -4 hørende egenvektorer er derfor

$$v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $t \in R$.

3. Vi skal vise, at A kan diagonaliseres, og angive en diagonaliserende matrix S og den tilhørende diagonalmatrix D.

   Da A er en 3×3 matrix, og da A har 3 forskellige egnværdier (nemlig $2, 4$ og -4), kan A diagonaliseres. En diagonaliserende matrix S har egenvektorer for A som søjler. Vi kan f.eks. tage

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Hertil hører diagonalmatricen

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$