MAT 91117 Opgave E5

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Betragt for $y > 0$ differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{(1+t^2)\,y}$$

Vi skal finde den fuldstændige løsning samt den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = \sqrt{3}$.

Differentialligningen er separabel. Ved separation fås

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$$

Integralet på venstre side udregnes ved brug af substitutionen $u = 1 + y^2, du = 2ydy$:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{1+y^2}$$

Altså er løsningerne til differentialligningen givet implicit ved ligningen

$$\sqrt{1+y^2} = \arctan t + C$$

Dette er (når $\arctan t + C \geq 0$) ensbetydende med

$$1 + y^2 = (\arctan t + C)^2$$

der igen er ensbetydende med

$$y = \pm\sqrt{(\arctan t + C)^2 - 1}$$

Men da det er forudsat, at $y > 0$, er den fuldstændige løsning derfor givet ved

$$y = \sqrt{(\arctan t + C)^2 - 1}$$

dog kun gældende for $\arctan t + C \geq 0$.

Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = \sqrt{3}$ fås ved i den fuldstændige løsning at indsætte $(t, y) = \left(0, \sqrt{3}\right)$. Herved finder vi i første omgang $C^2 = 4$, dvs. $C = \pm 2$. Men da $\arctan t + C \geq 0$, og da $t = 0$ skal tilhøre definitionsintervallet, følger, at $C \geq 0$. Altså fås $C = 2$, således at vi har

$$y = \sqrt{(\arctan t + 2)^2 - 1}$$

Konstanten C kunne lettere være bestemt ved brug af den implicitte form for den fuldstændige løsning

$$\sqrt{1 + y^2} = \arctan t + C$$

Definitionsintervallet for løsningen er bestemt ved, at

$$(\arctan t + 2)^2 - 1 \geq 0$$

dvs. (idet $\arctan t+2 \geq 0$) $\arctan t+2 \geq 1$, altså $\arctan t \geq -1$, der igen betyder $t \geq -\tan 1$. Definitionsintervallet er altså

$$[-\tan 1, \infty[$$

Til orientering er $\tan 1 \cong 1.5574$.