

MAT 01911 Opgave E33

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Vi skal finde den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = 9t - 3$$

Denne differentialligning er lineær og har konstante koefficienter. Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Rødderne er 3 og -1 . Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning er derfor

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

En ansatz til en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er

$$y_p = at + b$$

Ved differentiation fås $y'_p = a$ og $y''_p = 0$. Ved indsættelse i den inhomogene differentialligning fås

$$-2a - 3(at + b) = 9t - 3$$

altså

$$-3at - (2a + 3b) = 9t - 3$$

Da dette skal gælde for alle $t \in R$, har vi, at $-3a = 9$ og $-(2a + 3b) = -3$. Heraf fås, at $a = -3$ og $b = 3$. Altså $y_p = -3t + 3$.

Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning er derfor

$$y(t) = -3t + 3 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 4$ og $y'(0) = -2$, er

$$y(t) = -3t + 3 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Hvis den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = a$ og $y'(0) = b$, har en retlinet graf, så må $y(t) = a + bt$. Koefficienterne c_1 og c_2 må være 0.

Altså må $a = 3$ og $b = -3$. En lidt mere omstændelig løsning er at finde den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = a$ og $y'(0) = b$. Den er

$$y(t) = -3t + 3 + \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b - 3\right)e^{-t} + \frac{1}{4}(a+b)e^{3t}$$

Hvis grafen skal være retlinet må koefficienterne til eksponentialfunktionerne begge være nul, dvs.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b - 3 &= 0 \\ \frac{1}{4}(a+b) &= 0\end{aligned}$$

Heraf fås, at $a = 3, b = -3$.