

MAT 91117 Opgave E4

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet integralerne

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} \\ B &= \int_e^4 \frac{dx}{x(1-\ln x)^2} \end{aligned}$$

1. Disse er begge såkaldt uegentlige integraler, da $1 - \ln x \rightarrow 0$ for $x \rightarrow e$, hvorfor

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}} &\rightarrow \infty \\ \frac{1}{x(1-\ln x)^2} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

for $x \rightarrow e_-$.

2. Vi skal undersøge, om integralerne A og B er konvergente, og i bekræftende fald finde deres værdier. Vi finder i begge tilfælde en stamfunktion ved brug af substitutionen $t = 1 - \ln x$, $dt = -\frac{1}{x}dx$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = - \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -2t^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{t} = -2\sqrt{1-\ln x}$$

Denne funktion er stamfunktion for $x < e$, men kontinuert for $x \leq e$. Derfor er A konvergent med værdi

$$A = \left[-2\sqrt{1-\ln x} \right]_1^e = 2$$

For det andet integral finder vi

$$\int \frac{dx}{x(1-\ln x)^2} = - \int \frac{dt}{t^2} = - \int t^{-2} dt = t^{-1} = \frac{1}{1-\ln x}$$

Denne funktion er stamfunktion for $x \neq e$, men har ikke nogen grænseværdi for $x \rightarrow e$, hverken fra højre eller venstre, derfor er B divergent.