

MAT 01911 Opgave E34

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet matricerne

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Det er også givet, at $AB = C$. Vi skal bestemme x, y og z .

Vi finder, at

$$AB = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3z & 2x+y-z & x-2y-z \\ 8 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dette produkt er åbenbart lig med C , hvis og kun hvis

$$\begin{aligned} -x + 3z &= 2 \\ 2x + y - z &= -3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Løsningen til dette system kan findes ved Gausselimination på totalmatricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 2R_1$ og $R_3 := R_3 + R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Herefter giver $R_3 := R_3 + 2R_2$ matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{array}{rcl} -x + 3z & = & 2 \\ y + 5z & = & 1 \\ 12z & = & 5 \end{array}$$

Løsning nedefra og opefter giver $z = \frac{5}{12}$, $y = 1 - 5z = -\frac{13}{12}$ og $x = 3z - 2 = -\frac{3}{4}$.
Løsningen er altså

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{13}{12}, \frac{5}{12} \right)$$