

# MAT 01901 Opgave E34

Preben Alsholm  
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet matricen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vi skal vise, at vektorerne  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  og  $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$  er egenvektorer for matricen  $M$  og finde de tilhørende egenverdier. Vi går direkte til definitionen:

$$Mv = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2v$$

Heraf følger, at  $v$  er egenvektor for  $M$  hørende til egenverdien 2. Tilsvarende fås

$$Mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = 3u$$

Heraf følger, at  $u$  er egenvektor for  $M$  hørende til egenverdien 3.

2. Det oplyses at nul er en egenverdi for matricen  $M$ . Vi skal finde samtlige egenvektorer hørende til denne egenverdi. Egenvektorerne  $w$  opfylder  $(M - 0E)w = 0$ , dvs.  $Mw = 0$ . Totalmatricen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ved rækkeoperationerne  $R_2 := R_2 - 2R_1$  og  $R_3 := R_3 + R_1$  fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 + 2R_2$  giver herefter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektoren  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$  skal derfor opfylde ligningerne

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 3w_3 &= 0 \\ -w_2 - 2w_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi sætter  $w_3 = s$ . Så fås  $w_2 = -2s$  og  $w_1 = s$ . Samtlige egenvektorer er dermed givet ved

$$w = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor  $s \in R$ .

3.  $3 \times 3$ -matricen  $M$  er diagonaliserbar, da den har 3 forskellige egenverdier (nemlig 0, 2 og 3). En diagonalmatrix  $D$  og en dertil hørende diagonaliserende matrix  $S$  er givet ved

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Vi skal finde den fuldstændige løsning til det lineære differentiaalligningssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige løsning kan umiddelbart skrives ned

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

hvor  $c_1, c_2, c_3 \in R$ .