Eksamensopgaver i MAT 01901

Preben Alsholm
Institut for Matematik, DTU

November 18, 2003

11. januar 2001

Opgave E1 (uden hjælpemidler, 8 point).

Løs ligningen

$$\frac{2z-1+2i}{z+3} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

Løsningen skal angives på rektangulær form.
Vink: Begynd med at bringe ligningens højre side på rektangulær form.

Opgave E2 (uden hjælpemidler, 12 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = 9t^2 + 7$$

Vink: En ansats til en partikulær løsning er $y_p = at^2 + bt + c$.

Opgave E3 (uden hjælpemidler, 10 point).

Ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

ønskes løst ved Gauss-elimination.
Der ønskes en omhyggelig angivelse af de udførte operationer.

Opgave E4 (15 point).

1. Forklar, hvorfor integralet

$$A = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$$

   er et såkaldt uegentligt integral. Undersøg dernæst, om det er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi. Vink: En stamfunktion kan findes ved brug af substitutionen $t = 1 - \ln x$.

2. Samme spørgsmål for integralet

$$B = \int_e^4 \frac{dx}{x\,(1-\ln x)^2}$$

Der kan benyttes samme substitution som i første spørgsmål.

Opgave E5 (20 point).

Betragt for $y > 0$ differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{(1+t^2)\,y}$$

1. Find den fuldstændige løsning.
2. Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y\,(0) = \sqrt{3}$.

Opgave E6 (15 point).

Der er givet matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Bestem determinanten $\det(A)$.
2. Bestem den reciprokke (inverse) matrix A^{-1}. Angiv også værdien af dens determinant, $\det\left(A^{-1}\right)$.
3. Løs matrixligningen $AX = B$.

Opgave E7 (20 point).

Matricen A og søjlevektorerne S_1 og S_2 er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Det oplyses, at S_1 og S_2 er egenvektorer til A. Find de tilsvarende egenværdier.
2. Det oplyses, at A også har egenværdien -4. Find de tilhørende egenvektorer.
3. Vis, at A kan diagonaliseres, og angiv en diagonaliserende matrix S og den tilhørende diagonalmatrix D.

12. december 2001

Opgave E15 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$$

Opgave E16 (uden hjælpemidler, 10 point).

Der er givet differentialligningen

$$y'' + 4y' + 3y = 10\sin t$$

1. Kontrollér ved indsættelse, at $y_p = \sin t - 2\cos t$ er en løsning.
2. Find den fuldstændige løsning.

Opgave E17 (uden hjælpemidler, 10 point).

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Find egenværdierne for A og bestem for den største af disse de tilhørende egenvektorer.

Opgave E18 (15 point).

Løs differentialligningen

$$y' + 2\frac{\cos t}{\sin t} y = 3\cos t, \qquad t \in \,]0, \pi[$$

med begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Opgave E19 (15 point).

Indenfor de komplekse tal er der givet ligningen

$$z^7 = 128$$

1. Løs ligningen. Rødderne ønskes angivet på polær form.
2. Afbild rødderne i den komplekse plan.
3. Find produktet af rødderne.

Opgave E20 (20 point).

Der er givet følgende tabel over sammenhørende værdier af de to fysiske størrelser x og y:

x	0	1	2	3	4
y	-2.6	4.5	5.4	1.5	3.5

Modellen for sammenhængen mellem x og y er givet ved ligningen

$$y = u \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + v \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + wx$$

hvor u, v og w er konstanter. Konstanterne skal (i princippet) bestemmes ved indsættelse af sammenhørende x- og y-værdier i ovenstående ligning.

1. Opskriv det ligningssystem af 5 ligninger, som de ubekendte u, v og w skal opfylde. Ligningssystemet ønskes derefter skrevet på matrixform, dvs. på formen
$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = b \qquad (*)$$
hvor A er en matrix og b er en søjlevektor.

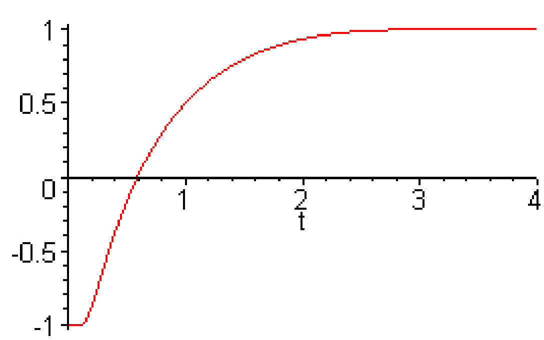
2. Ligningssystemet (*) er overbestemt (hvilket ikke ønskes vist). Opskriv det tilsvarende normalligningssystem. Dette system skal ikke løses, men det ønskes afgjort, om normalligningssystemet har mere end én løsning.

Opgave E21 (20 point).

Der er for $t > 0$ givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{t}$$

med begyndelsesbetingelsen $y(1) = \frac{1}{2}$. Grafen for løsningen er vist på figuren.



Løsningen er konstant lig med 1 på et interval $[b, \infty[$ og konstant lig med -1 på et lille interval $]0, a]$, hvor $0 < a < 1 < b$. Tallene a og b skal først bestemmes sidst i opgaven.

1. Forklar alene ud fra differentialligningen, hvorfor løsningen ikke kan aftage på noget delinterval af $]0, \infty[$.
2. Løs differentialligningen med den givne begyndelsesbetingelse. Der ønskes blot fundet et udtryk, der gælder for $|y| < 1$, dvs. for $t \in]a, b[$.
3. Bestem værdien af tallene a og b.

29. maj 2002

Opgave E22 (uden hjælpemidler, 10 point).

Løs ligningen

$$\frac{1}{z} + \frac{2e^{i\pi/3}}{z-1} = 0$$

Løsningen ønskes angivet på rektangulær form.

Opgave 23 (uden hjælpemidler, 10 point).

Løs for $x > -1$ differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)\,y^2}$$

med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 2$.

Opgave 24 (uden hjælpemidler, 10 point).

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - 2y + z &= 3 \\ -2x + y + 4z &= 0 \\ x + 4y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

1. Skriv ligningssystemet på matrixform

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

hvor A er en 3×3-matrix og b en 3×1-matrix.

2. Idet det oplyses (skal ikke vises), at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

skal man *ved hjælp heraf* finde løsningen til ligningssystemet.

Opgave E25 (15 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + y' + \frac{37}{4}y = e^{-t}$$

Opgave E26 (15 point).

Der er givet de uegentlige integraler

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x - 1} dx \\ B &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\left((\ln x)^2 + 1\right)} \end{aligned}$$

Undersøg for hvert af disse om det er konvergent eller ej, og find i bekræftende fald værdien.

Opgave E27 (15 point).

Der er for $x > 0$ givet differentialligningen

$$xy' + y = \sin(\pi x)$$

med begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

1. Find løsningen.
2. Find $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Opgave E28 (25 point).

Om en 3×3-matrix A er givet, at

$$\begin{aligned} Av_1 &= -2v_1 \\ Av_2 &= v_2 \\ Av_3 &= 2v_3 \end{aligned}$$

hvor vektorerne v_1, v_2 og v_3 er givet ved

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Find matricen A. Vink: Diagonalisering.

17. december 2002

Opgave 29 (uden hjælpemidler, 10 point).

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x - z &= 4 \\ y + z &= 5 \end{aligned}$$

Opgave 30 (uden hjælpemidler, 10 point).

1. Find modulus og argument af det komplekse tal $1+i$.
2. Find den komplekse løsning til ligningen

$$\frac{10}{z+i} + (1+i)^4 = -2 + 4i$$

Opgave 31 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find integralet

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

Opgave 32 (15 point).

Find for $t > 0$ den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - t \sin t \cdot e^{-\frac{y}{t}}$$

der opfylder $y(\pi) = 0$. Gå frem som følger:

Indfør en ny ubekendt funktion v ved $v(t) = \frac{y(t)}{t}$, hvorved altså $y(t) = tv(t)$. Vis, at v opfylder en separabel differentialligning. Løs denne for v, og angiv til sidst løsningen til den oprindelige differentialligning.

Opgave 33 (10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = 9t - 3$$

Opgave 34 (25 point).

Lad der være givet matricen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vis, at vektorerne $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for matricen M og find de tilhørende egenværdier.

2. Idet det oplyses at nul er en egenværdi for matricen M, ønskes samtlige egenvektorer hørende til denne egenværdi fundet.

3. Undersøg, om matricen M er diagonaliserbar og angiv i bekræftende fald en diagonalmatrix D og en dertil hørende diagonaliserende matrix S.

4. Find den fuldstændige løsning til det linære differentialligningssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Opgave 35 (20 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

for alle $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Find differentialkvotienten $f'(x)$ for alle $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Vis, at f er en voksende funktion.

3. Angiv værdimængden for f.

4. Find en forskrift for f^{-1}.

22. maj 2003

Opgave 36 (uden hjælpemidler, 10 point).

Opskriv ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x - 3y + 4z &= 1 \\ 2x - 6y + 4z &= 2 \\ 3x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

på matrixform og løs ligningssystemet.

Opgave 37 (uden hjælpemidler, 10 point).

1. Omskriv det komplekse tal $e^{-\ln(3)+i\frac{\pi}{2}}$ til rektangulær form.
2. Angiv modulus og argument for det komplekse tal $5e^{i\frac{\pi}{4}}$.
3. Find den komplekse løsning til ligningen
$$\frac{1}{z+2i}+\frac{5}{2+i}=2+i$$

Opgave 38 (uden hjælpemidler, 10 point).

Find integralet
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\right)dx$$

Opgave 39 (15 point).

For $y>0$ betragtes differentialligningen
$$\frac{dy}{dt}+ty=y^{-1}t \tag{1}$$

1. Indfør en ny ubekendt funktion x ved $x(t)=y^2(t)$. Vis at x opfylder en førsteordens lineær differentialligning.
2. Løs differentialligningen for x og find den løsning til den oprindelige differentialligning, (1), der opfylder $y(0)=2$.

Opgave 40 (10 point).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$y''-4y'+5y=5t+1$$

Opgave 41 (25 point).

Lad der være givet matricen
$$M=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

1. Vis at vektorerne $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for matricen M og find de tilhørende egenværdier.

2. Idet det oplyses at -3 er en egenværdi for matricen M, ønskes samtlige egenvektorer hørende til denne egenværdi fundet.

3. Undersøg om matricen M er diagonaliserbar og angiv i bekræftende fald en matrix S og en diagonalmatrix D så $M = SDS^{-1}$.

4. Find den fuldstændige løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

5. Hvad sker der med en løsning til ovenstående differentialligningssystem når $t \to +\infty$.

Opgave 42 (20 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$

for alle $x > 0$.

1. Vis at f er en voksende funktion.

2. Angiv værdimængden for f.

3. Vis at $y = f(x)$ opfylder ligningen $x^2 - yx - 2 = 0$.

4. Find en forskrift for f^{-1}.