

DIPLOMAT Ugeseddel 10 DIPLOMAT

14. - 17. april 2008

Dag 1

Forelæsning kl. 13-15: Taylorpolynomier. CA: 256-263. Funktioner af flere variable. CA:639-645.

- Taylorpolynomier
- Taylors formel
- Taylors grænseformel på formen: $f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$
- Graf og niveaukurve for funktion af to variable

Opgaveregning i databaren kl. 10-12/15-17:

1. Hent på kursushjemmesiden filen *taylor.mw*.
2. Find ved håndkraft det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 1 for funktionen f givet ved $f(x) = x \ln x + 2x$.
3. Find ved hjælp af Maple Taylorpolynomiet P_2 for funktionen f i spørgsmål 2 ovenfor. Man kan evt. bruge *mtaylor* i stedet for *taylor*. Tegn graferne for f og P_2 på intervallet $[0, 2]$ i samme koordinatsystem. Tegn også forskellen $f(x) - P_2(x)$ for $x \in [0.9, 1.1]$.
4. Illustrér som ovenfor Taylorpolynomiet P_5 for funktionen i spørgsmål 2.
5. Brug stadig f fra spørgsmål 2. I Maple-pakken Student[Calculus1] findes *TaylorApproximation*. Kommandoen
`TaylorApproximation(f(x), x=1, 0..2, order=1..15, output = animation);`
giver en animation af graferne for Taylorpolynomierne $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ på intervallet $[0, 2]$ og med grafen for f som baggrund. Prøv at ændre intervallet til $[0, 3]$.
6. Brug Taylors formel til at vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ (fra spørgsmål 2) med $P_2(x)$, når $x \in [0.9, 1.1]$. Sammenlign med den faktiske maksimale fejl.
7. Differentialligningen $x'(t) = \ln(t + x(t)^2)$ med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$ kan ikke løses eksakt. På ugeseddel 7-9, Dag 1, blev vist hvordan ligningen kunne løses numerisk. Prøv nu i stedet ved håndkraft at finde løsningens 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0. P_2 er givet ved $P_2(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2}x''(0)t^2$. Tegn grafen for P_2 sammen med den numerisk fundne løsning. Brug intervallet $[-1, 1]$.
8. Find det 5. Taylorpolynomium for løsningen til begyndelsesværdiproblemet i spørgsmål 7 ved følgende Maplekommandoer:
`ligning:=diff(x(t),t)=ln(t+x(t)^2);`
`dsolve({ligning,x(0)=1},x(t),type=series);`
`p5:=convert(rhs(%),polynom);`
Vil man have en højere orden, må man sætte *Order* til en højere værdi end 6, som den har ved starten. Prøv kommandoen `Order:=15;` efterfulgt af `dsolve`-kommandoen. Tegn grafen sammen med den numerisk fundne løsning.
9. Hent evt. på kursushjemmesiden filen *funktion2.mw*.

10. Opgaver i CA, p.646: 43-45. Eksempelvis kan grafen for funktionen i opgave 43 laves således:
`plot3d(1/(1+x^2+y^2), x=-2..2, y=-2..2, axes=framed);`
 Niveaukurvediagrammet fås ved kommandoen
`with(plots):`
`contourplot(1/(1+x^2+y^2), x=-2..2, y=-2..2);`
 eller i 3 dimensioner:
`contourplot3d(1/(1+x^2+y^2), x=-2..2, y=-2..2);`
11. Prøv en animation med udgangspunkt i opgave 44 som følger:
`animate(plot3d,[cos(x)/(1+a*y^2), x=-5..5, y=-3..3, axes=framed], a=0..2);`

Dag 2

Forelæsning kl. 8-9: Funktioner af to eller flere variable. Grænseværdi og kontinuitet. Partielle afledede. CA: 650-661.

- Grænseværdi og kontinuitet
- Partielle afledede
- Tangentplan

Aktivitetsopgaver og klasseset kl. 9-12/14-17:

- Opgaver i CA, p.656: 2, 4, 7, 8.
 Har man Maple til rådighed kan resultaterne kontrolleres ved hjælp af *diff* eller *Diff* fulgt af *value*, f.eks. således:
`Diff(exp(y)*sin(x),x): % = value(%);`
 Vil man efterfølgende have værdien i punktet $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, 0)$ kan man evt. bruge *subs* til at lave erstatningerne $x = \frac{\pi}{3}$ og $y = 0$ i højresiden (*rhs*):
`subs( x=Pi/3,y=0, rhs(%));`
 Alternativt kan man benytte *D*. Funktionen *f* defineres først ved brug af pilenotation, således:
`f:=(x,y) -> exp(y)*sin(x);`
 Derefter kan $f_1(\frac{\pi}{3}, 0)$ findes ved kommandoen `D[1](f)(Pi/3,0);` Prøv også
`'D[1](f)'(Pi/3,0)=D[1](f)(Pi/3,0);`
- Opgaver i CA, p.656: 13 (kun tangentplan), 23, 27.
- Opgaver i CA, p. 662: 1, 6, 9, 11, 17.

Hjemmeopgavesæt nr. 4, anden halvdel

Ved hver hjemmeopgave anføres, om den skal regnes i hånden eller regnes ved hjælp af Maple. Ved de opgaver, der skal regnes i hånden skal man dog altid i størst mulige omfang selv kontrollere sine resultater vha. Maple eller lommeregner. *Regnefejl bør derfor slet ikke forekomme i hjemmeopgaverne.* Den vigtige del af det afleverede sæt er derfor argumentationen, beregningerne skal simpelthen være korrekte!

Husk at gemme det af læreren rettede sæt, da det skal afleveres sammen med 5. sæt i 13. semesteruge!

Besvarelsen af opgaverne afleveres sammen med besvarelsen af anden halvdel af sættet på Dag 2 i 11. semesteruge (E+M: senest kl. 15.00 torsdag den 24. april. B+K: senest kl. 10.00 fredag den 25. april):

3. Denne opgave skal regnes i hånden.
Der er givet differentialligningen

$$x' + x^3 = -3 \sin t$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$.

Maple kan ikke finde løsningen eksakt (men nok numerisk).

Find det tredje Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 0 for løsningen.

4. Denne opgave skal regnes i hånden.
Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \int_1^x e^{t-1} \ln t \, dt$$

for alle $x > 0$.

- (a) Find det 3. Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 1 for f .
(b) Det oplyses, at $|f^{(4)}(x)| \leq 6$ for alle $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Angiv ved en vurdering af restleddet i Taylors formel en øvre grænse for den fejl man begår ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$, når $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
(c) Beregn integralet

$$f(1.5) = \int_1^{1.5} e^{t-1} \ln t \, dt$$

tilnærmelsesvist ved i stedet at beregne $P_3(1.5)$. Angiv en øvre grænse for den fejl, der begås herved. Find til sammenligning hermed den faktiske fejl, idet $f(1.5)$ beregnes i Maple.