

I selvstudieperioden de næste 3 uger er emnet *Differentialligninger*. Undervisningen i disse emner foregår gruppevis og som selvstændig aktivitet. Der er ingen forelæsninger. Se i øvrigt informationen om selvstudieperioden på hjemmesiden.

Opdelingen af ugesedlen i Dag 1, Dag 2, ... , Dag 5 er foretaget som en hjælp til at organisere arbejdsindsatsen, men man bestemmer selv farten. Bemærk, at man udmærket kan begynde på en afleveringsopgave så snart man har regnet de til den relevante øvelsesopgaver.

Der vil blive eksamineret i øvelsesopgaverne ved den mundtlige eksamination.

1 Dag 1. Differentialligninger af første orden

De differentialligninger af første orden vi i dette kursus skal kunne løse ved *håndkraft* hører til en af følgende to typer:

- Separabel differentialligning
- Lineær differentialligning af første orden

1.1 Læsevejledning

1. Separation af de variable er kendt fra gymnasiet, men man kan også læse om metoden i i CA: 422-425 og i noterne *Differentialligninger af første orden* (findes på hjemmesiden under Noter: Filnavnet er *diffsign1.pdf*).
2. Læs om lineære differentialligninger af første orden i CA: 426-428 og i noterne *Differentialligninger af første orden*.
3. Worksheets: På kursushjemmesiden under *Worksheets* er følgende filer om differentialligninger af første orden tilgængelige:

diffsigning.mw Generel introduktion til differentialligninger i Maple. Forkortet version af kapitel i Maple-bogen.

diffsign1forelaes.mw Om differentialligninger af første orden. Lavet til demonstrationsbrug ved forelæsninger i emnet i foråret 2004.

diffsign1a.mw Indeholder først og fremmest de kommandoer, der blev brugt ved produktion af figurerne i noterne *Differentialligninger af første orden*.

1.2 Øvelsesopgaver

1. Det er vigtigt at man forstår hvad en *løsning* til en differentialligning er. Kontrollér *ved indsættelse*, at $x(t) = \tan(t^2 + \frac{\pi}{4})$ er løsning til differentialligningen

$$x' = 2t \cdot (1 + x^2) \quad (1)$$

Vink: Udnyt, at $\frac{d}{dt} \tan t = 1 + \tan^2 t$. Kontrollér også, at *begyndelsesbetingelsen* $x(0) = 1$ er opfyldt for den givne løsning.

2. Find *den fuldstændige løsning* til differentialligningen (1) ved separation af de variable.
3. Find den fuldstændige løsning til (1) ved brug af Maple. Find også i Maple den løsning, der opfylder *begyndelsesbetingelsen* $x(0) = 1$.

4. Tegn *hældningsfeltet* for differentialligningen (1) ved følgende Maplekommandoer:
- ```
with(DEtools);
ligning:=diff(x(t),t)=2*t*(1+x(t)^2);
DEplot(ligning, x(t), t=-2..2, x=-3..3);
```
- Tegn derefter sammen med hældningsfeltet graferne for de løsninger, der opfylder begyndelsesbetingelserne  $x(0) = -3, x(0) = -2, \dots, x(0) = 3$ . Disse betingelser kan i Maple fås således:
- ```
seq([x(0)=k], k=-3..3);
```
- Banerne sammen med hældningsfeltet fås derfor ved kommandoen:
- ```
DEplot(ligning, x(t), t=-2..2, [seq([x(0)=k], k=-3..3)], x=-3..3);
```

5. Løs ved *separation* differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = (x - 2) \ln t \quad (2)$$

men husk også evt. *konstante løsninger*. Selvfølgelig forudsættes  $t > 0$ . Find også den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen  $x(1) = 3$ .

6. Løs differentialligningen (2) ved brug af Maple. Find også den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen  $x(1) = 3$ . Tegn *den fundne løsning* på intervallet  $[0, 4]$ . For hvilken værdi af  $t$ , har løsningen minimum? Vink: Brug (2) direkte.
7. Find ved håndkraft den fuldstændige løsning til *den lineære differentialligning*

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 9t \quad (3)$$

8. Find ved brug af Maple den fuldstændige løsning til differentialligningen (3). Find også den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen  $x(0) = a$ , hvor  $a$  er en ukendt konstant. Lav en animation af den fundne løsning med  $a$  som animationsparameter og med  $a \in [-3, 2]$  og  $t \in [0, 1.5]$ . Brug som baggrund et plot af løsningen svarende til  $a = -1$  og med hældningsfelt. Denne baggrund  $p1$  kan produceres således
- ```
p1:=DEplot(ligning, x(t), t=0..1.5, [[x(0)=-1]], x=-3..4, color=gray):
```
- Tilføjelsen *background* = -1 giver billedet svarende til $a = -1$ som baggrund uden hældningsfelt og med samme farve som de øvrige billeder. Tilføjelsen *trace* = 5 efterlader "sporet" af fem af billederne. Dette er specielt nyttigt ved udskrift.
9. Regn i hånden følgende opgaver i CA, p.429: 11-14. Kontrollér resultaterne ved hjælp af Maple.
10. Differentialligningen

$$x' = \ln(t + x^2) \quad (4)$$

kan Maple ikke løse eksakt (prøv selv om den kan!). Hvis en begyndelsesværdi (hér $x(0) = 1$) er opgivet, kan ligningen dog løses *numerisk*, dvs. Maple kan lave en *procedure*, der ved input af en konkret talværdi for t kan udregne en konkret talværdi for $x(t)$. En *numerisk metode* er en metode, der behandler konkrete talværdier. *DEplot* som vi brugte i øvelse 4 og øvelse 8 bruger en numerisk metode ved bestemmelsen af løsningen, men vi får kun en tegning. For at få talværdier kan vi bruge *dsolve* med tilføjelsen *type=numeric*. Prøv følgende:

```
ligning:=diff(x(t),t) = ln(t+x(t)^2);
p:=dsolve( {ligning, x(0)=1}, x(t), type=numeric, output=listprocedure);
f:=subs( p, x(t));
f(2);
f(-8);
plot( f(t), t= -10..5);
```

2 Dag 2. Differentialligninger af anden orden

De differentialligninger af anden orden vi i dette kursus skal kunne løse ved *håndkraft* hører til følgende to typer:

- Homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter
- Inhomogen lineær differentialligning med konstante koefficienter, der kan løses ved *Ubestemte koefficienters metode*, "Gættemetoden"

Ved løsningen af en inhomogen lineær differentialligning er det vigtigt, at man kender *strukturensætningen for inhomogene lineære differentialligninger*.

2.1 Læsevejledning

1. Homogene lineære differentialligninger CA: 200-206.
2. Inhomogene lineære differentialligninger CA: 923-926.
3. Worksheets: På kursushjemmesiden ligger filen *diffign2forelaes.mw*, der blev brugt ved forelæsninger om emnet i foråret 2004. Desuden indeholder det tidligere omtalte worksheet *diffigning.mw* også lidt om andenordensdifferentialligninger i Maple.

2.2 Øvelsesopgaver

1. Opgave i CA, p.206: 1, 3, 5, 7, 15. Løs først uden brug af Maple. Kontrollér derefter resultatet ved brug af *dsolve*. Er der givet begyndelsesbetingelser som eksempelvis $y(0) = 0, y'(0) = 4$, skal disse skrives således i Maple $y(0)=0, D(y)(0)=4$. Se p. 46 i Maplebogen.
2. Opgave i CA, p. 929: 1, 3, 5, 9. Løs først opgaven med brug af *dsolve*. Regn derefter også opgaverne 3 og 5 i hånden.
3. Der er givet differentialligningen

$$x'' + x' + x = \sin t \quad (5)$$

- (a) Find den fuldstændige løsning til (5) ved hjælp af Maple.
- (b) En af løsningerne er periodisk. Find denne.
- (c) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x(0) = 3, x'(0) = -2$. Tegn grafen på intervallet $[0, 30]$.
- (d) Find den løsning til (5), der opfylder begyndelsesbetingelserne $x(0) = 10, x'(0) = x1$, hvor $x1$ blot er et navn uden tillagt værdi. Lad højresiden af resultatet hedde X . Tegn X for værdierne $x1 = -10, -5, 0, 5, 10$ og på intervallet $[0, 20]$ på følgende måde:

```
plot([seq(X,x1=[-10,-5,0,5,10])],t=0..20);
```

Hvorfor falder kurverne næsten oven i hinanden for store værdier af t ?
- (e) Prøv også animationen

```
bg:=plot(-cos(t),t=0..15,color="Blue");  
animate(plot,[X,t=0..15],x1=-15..15,background=bg);
```

Prøv også tilføjelsen *trace* = 6 (eller et andet passende antal) som et valgfrit argument til *animate*.
- (f) Graferne for de 5 løsninger ovenfor og animationen kan i stedet fås numerisk ved brug af *DEplot* fra DEtools-pakken som følger:

```
DEplot(ligning,x(t),t=0..20,[seq([x(0)=10,D(x)(0)=5*k],k=-2..2)],  
linecolor=red,thickness=1,stepsize=.1);  
animate(DEplot,[ligning,x(t),t=0..15],[[x(0)=10,D(x)(0)=5*k]],  
stepsize=.1,linecolor=red],k=-2..2,background=bg);
```

3 Dag 3. Systemer af lineære differentiaalligninger

De systemer af lineære differentiaalligninger vi i dette kursus skal kunne løse ved *håndkraft* hører til følgende to typer:

- Homogene lineære systemer af første orden med konstante koefficienter
- Inhomogene lineære systemer af første orden, når en ansats (et ”gæt”) til en partikulær løsning er givet.

Ved løsningen af et inhomogent lineært system er det vigtigt, at man kender *strukturen for inhomogene lineære differentiaalligningssystemer*.

3.1 Læsevejledning

1. Systemer af første orden: LA, 369-377. (Husk, at folk med blå bøger skal trække 16 fra).
2. Worksheet: På kursushjemmesiden findes filen *diffignsysforelaes.mw*, der indeholder et eksempel på et førsteordens lineært differentiaalligningssystem. Det blev brugt ved forelæsnings i foråret 2004.

3.2 Øvelsesopgaver

1. Opgaver i LA, p.377: 1, 3, 5, 7, 9, 15. Brug gerne Maple til den lineære algebra. Løsninger bag i bogen. (Husk, at folk med blå bøger skal trække 16 fra).
2. Et *inhomogent* lineært system

$$x' = Ax + b(t) \quad (6)$$

kan løses ved først at finde den fuldstændige løsning x_{hom} til det tilsvarende homogene lineære system

$$x' = Ax$$

og derefter finde en partikulær løsning x_p til det inhomogene system (6). Den fuldstændige løsning til (6) vil så være summen af de to $x = x_p + x_{\text{hom}}$.

Løs ved den metode det inhomogene lineære system

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 - 2x_2 + 4 \\ x'_2 &= -x_1 + 3x_2 + 2 \end{aligned} \quad (7)$$

Vink: En partikulær løsning til (7) kan fås ved ansatsen

$$x_p = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

hvor α og β er konstanter.

4 Dag 4 og 5. Fortsat arbejde med afleveringsopgaverne

Opgaverne skal løses i Maple eller i hånden (typisk en kombination af de to). *Opgavebesvarelsen bør udfærdiges, så læseren ikke behøver at have opgaveteksten ved hånden under læsningen.* Besvarelsen afleveres på Institut for Matematik, bygning 303S. **For B+K: Aflevering senest onsdag d. 9/4 kl. 8.00. For E+M: Aflevering senest fredag d. 11/4 kl. 8.00.**

5 Dag 6. Mundtlig eksamination

Tider for den mundtlige eksamination fremgår af informationen om selvstudieperioden på hjemmesiden.