

DIPLOMAT Ugeseddel 4 DIPLOMAT

25.-29. februar 2008

Bemærkning. De af os, der har Lay, Linear Algebra i den blå version, skal trække 16 fra alle sidetal.

Dag 1

Forelæsning kl. 8-10/13-15: Matrixalgebra. LA: pp. 122-146.

- Sum og produkt af matricer
- Transponering
- Den inverse af en (kvadratisk) matrix, A^{-1} . Definition og regneregler.
- Karakterisation af invertibilitet

Opgaveregning i databaren kl. 10-12/15-17:

1. Hent på kursushjemmesiden filen *LinearAlgebra2.mw*.
2. Opgaver i LA, p.132: 1, (også 2, men kun i Maple), 5, 7, 27. Regn opgaverne *både* i hånden *og* ved hjælp af Maple (bortset fra opgave 7)!
3. Opgaver i LA, p.141: Practice Problems, 1-2.
4. Opgaver i LA, p.142: 7, 18, 31, 33, 34. Regn opgaverne *både* i hånden *og* ved hjælp af Maple! Undlad forsøg på at *bevise* rigtigheden af dit gæt i opgaverne 33 og 34, men afprøv gættet på en 5×5 -matrix i Maple.
5. Lærebogen har på side 135 en formel for den inverse til en generel 2×2 -matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Find også formlen vha. Maple. Det foreslås, at man gør således:

```
A:=Matrix( 2,2, symbol=a);  
A^(-1);
```

Prøv derefter at finde en formel for den inverse til en generel 3×3 -matrix. Den kan formentlig ikke stå rigtigt som en matrix på skærmen. For en 4×4 -matrix eller højere bliver udtrykkene ekstremt store. Maple har en procedure *length*, der giver et mål for hvor meget et objekt fylder. Prøv følgende kommandoer:

```
A:=Matrix(3,3, symbol=a);  
length(A);  
length( A^(-1) );
```

Prøv det samme med 4×4 , 5×5 og evt. 6×6 . Men man advares mod at prøve større matricer: Det kommer til at tage rigtig lang tid, og der bliver brugt megen hukommelse. Maskinen går måske ned!

Moralen er: *Generelle formler for den inverse er håbløse. Brug Gauss, når matricen er konkret givet!*

Dag 2

Forelæsning kl. 8-9/13-14: Underrum af R^n . Basis. LA: pp. 183-189.

- Underrum af R^n . Basis.
- Nulrum for matrix A .
- Søjlerum for matrix.

Aktivitetsopgaver og klasseset kl. 9-12/14-17:

1. Opgaver i LA, p.189: Practice Problems, 1-3. Løsninger findes p.191.
2. Opgaver i LA, p.189: 5, 6, 15, 17, 23, 24.
3. Find for hver af følgende matricer en basis for nulrummet og søjlerummet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Hjemmeopgavesæt nr. 3, første halvdel

Ved hver hjemmeopgave anføres, om den skal regnes i hånden eller regnes ved hjælp af Maple. Ved de opgaver, der skal regnes i hånden skal man dog altid i størst mulige omfang selv kontrollere sine resultater vha. Maple eller lommeregner. *Regnefejl bør derfor slet ikke forekomme i hjemmeopgaverne.* Den vigtige del af det afleverede sæt er derfor argumentationen, beregningerne skal simpelthen være korrekte!

Husk at gemme det af læreren rettede sæt, da det skal afleveres sammen med 5. sæt i 13. semesteruge!

Besvarelsen af opgaverne afleveres sammen med besvarelsen af anden halvdel af sættet på Dag 2 i 6. semesteruge (E+M: senest kl. 15.00 torsdag den 13. marts. B+K: senest kl. 10.00 fredag den 14. marts):

1. Denne opgave skal løses i hånden. Matricen A er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Vis, at A er invertibel og find den inverse A^{-1} .
- (b) Udnyt A^{-1} til at løse ligningssystemet $Ax = b$, hvor

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Denne opgave *skal* afleveres som et udskrift af et Maple-worksheet. Worksheet skal være forsynet med titlen "Hjemmeopgavesæt nr. 3, opgave 2", forfatter og dato. *Desuden skal forklarende tekst indsættes mellem beregningerne.* Er en formel kendt for elementerne a_{rs} i en matrix A , så kan A hurtigt defineres i Maple (Maplebogen side 56). Er eksempelvis elementerne i A givet ved

$$a_{rs} = r + s \tag{1}$$

for alle række-numre r og alle søjle-numre s , og er A en 4×4 -matrix, så kan A defineres ved kommando

`A:=Matrix(4,(r,s)->r+s);`

Hvis stadig formelen (1) skal gælde, men man gerne vil kunne variere på den kvadratiske matrix A 's størrelse, kan man definere A som en funktion af størrelsen n således:

`A:=n->Matrix(n,(r,s)->r+s);`

En 6×6 -matrix fås så simpelthen ved kommandoen

`A(6);`

- (a) Afprøv de ovenanførte Maplekommandoer.
- (b) Definér nu A som funktion af størrelsen n og med elementer givet ved formelen

$$a_{rs} = \omega^{(r-1)(s-1)}$$

hvor ω ikke skal gives nogen værdi (endnu). Afprøv definitionen ved at finde $A(1), A(2), A(3), A(4), A(5)$. Sørg for at resultatet står på én linie (Vink: Brug `seq`).

- (c) ω fra spørgsmål b skal nu have værdien

$$\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Bemærk, at ω er en af rødderne i den binome ligning $z^n = 1$ og at samtlige rødder i $z^n = 1$ er givet ved

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

Find $A(2), A(3), A(4)$ og på sin egen linie $A(5)$.

- (d) Definer nu B som funktion af størrelsen n som A blev defineret, men med ω erstattet af $\bar{\omega}$, der jo kan fås således

$$\bar{\omega} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{n}\right) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$$

Bemærk i øvrigt, at også $1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots, \bar{\omega}^{n-1}$ udgør samtlige rødder i ligningen $z^n = 1$. Find $B(2), B(3), B(4)$ og på sin egen linie $B(5)$.

- (e) Find matrixprodukterne $B(k)A(k)$ for $k = 2, 3, \dots, 6$. Her kan man få brug for `simplify`. Forklar ud fra det fundne resultat hvorfor $\frac{1}{\sqrt{k}}A(k)$ og $\frac{1}{\sqrt{k}}B(k)$ er hinandens inverse.
- (f) Matricerne $\frac{1}{\sqrt{k}}B(k)$ og $\frac{1}{\sqrt{k}}A(k)$ repræsenterer den såkaldte Fast Fourier Transform og dens omvendte, henholdsvis. Fast Fourier Transform er implementeret i Maple og ligger i pakken `DiscreteTransforms`. Prøv følgende kommandoer:

```
with(DiscreteTransforms);
v:=<1,7,9,13>;
u1:=FourierTransform(v);
InverseFourierTransform(u1);
u2:=1/2*B(4).v;
1/2*A(4).u2;
```