

DIPLOMAT Ugeseddel 2 DIPLOMAT

11. februar - 15. februar 2008

Dag 1

Forelæsning kl. 8-10/13-15: Noter om komplekse tal. P. Alsholm, Komplekse tal: 1-5.

- Den komplekse eksponentialfunktion
- Den binome ligning

Opgaveregning kl. 10-12/15-17 i databaren.

1. Hent filen *kompleks.mw* på hjemmesiden for kursen:
<http://www.mat.dtu.dk/education/01905/> under menupunktet *Maple worksheets*.
2. Følgende 3 komplekse tal er givet på polær form. Indtegn dem i den komplekse plan og skriv dem på rektangulær form:

$$4e^{-i\pi}, \quad 2e^{i4\pi/3}, \quad 6e^{i21\pi/4}$$

3. Angiv følgende komplekse tal på rektangulær form

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad e^{i\pi}, \quad e^{i2\pi}, \quad e^{i3\pi}$$

Indtegn på et stykke papir tallene i den komplekse plan. Prøv herefter den følgende Maple-version. Her skal man specielt bemærke *apostrofferne* omkring eksponentialfunktionen. Disse skal forhale evaluering, så vi kan se, om vi har tastet rigtigt ind:

```
with(plots):  
['exp'(I*Pi/6), 'exp'(I*Pi/4), ... , 'exp'(I*3*Pi)];  
talliste:= %;  
complexplot( talliste, style=point, symbolsize=20);
```

4. Skriv følgende to komplekse tal på rektangulær form med og uden Maple:

$$3e^{\ln 2 + \pi i}, \quad \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

5. Løs de binome ligninger

$$z^3 = 1, \quad z^3 = i, \quad z^4 = -4, \quad z^3 = 1 + i$$

Afbild for alle 4 ligninger løsningernes pladsering i den komplekse plan sammen med den cirkel hvorpå løsningerne ligger. Her bør både bruges håndkraft og Maple!

6. Løs ligningen $z^6 - 1 = 0$.
7. For vilkårlige komplekse tal z_1 og z_2 er der ved parameterfremstillingen

$$z(t) = z_1 e^{it} + z_2 e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

defineret en kurve i den komplekse plan. En sådan kurve kan tegnes med *complexplot*, som vi også brugte ovenfor. Hvis det ene af de to tal z_1 og z_2 er nul, er kurven en cirkel.

Hvorfor? Hvis $z_1 = z_2$, fås et liniestykke. Hvorfor? Det kan i øvrigt vises, at kurven enten er et liniestykke eller en ellipse (specielt en cirkel), og et liniestykke, hvis og kun hvis $|z_1| = |z_2|$.

Her følger et eksempel til afprøvning:

```
z1:=2+3*I: z2:=1+I:
complexplot( z1*exp(I*t)+z2*exp(-I*t), t=0..2*Pi, scaling=constrained);
Prøv også følgende to:
animate(complexplot,[ exp(I*t)+a*exp(-I*t), t=0..2*Pi,
scaling=constrained],a=0..2);
animate(complexplot,[(1+I)*(exp(I*t)+a*exp(-I*t)),t=0..2*Pi,
scaling=constrained],a=0..2);
```

Dag 2

Forelæsning kl. 8-9/13-14: Noter om komplekse tal. P. Alsholm, Komplekse tal: 5-7.

- Andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$, hvor $a, b, c \in R$, men $z \in C$
- Algebraens fundamentalsætning
- Rødder i polynomier

Aktivitetsopgaver og klasseset kl. 9-12/14-17. Gå straks i gang med opgaverne nedenfor. Fra kl. 10 (eller 15) vil klasselæreren være til stede.

1. Løs indenfor de komplekse tal ligningerne

$$z^2 = 4z + 13, \quad z^2 = 4z - 5, \quad z^2 - 4z + 13 = 0, \quad z + \frac{1}{z} = 1$$

Løs ligningerne i hånden.

2. Et 3. gradspolynomium med reelle koefficienter har bl.a. rødderne 2 og $-1 + 4i$. Find et sådant polynomium. Er det entydigt bestemt?
3. Find et polynomium, der har rødderne 1, 2, 3, i , $2i$, $3i$ (og ikke andre). Find også et polynomium med *reelle* koefficienter og med mindst mulig grad, der bl.a. har de nævnte rødder. Det er ikke nødvendigt at gange polynomiet ud (se det var jo et vink!).
4. Betragt det normerede andengradspolynomium $p(z) = z^2 + a_1z + a_0$. Udtryk a_0 og a_1 ved rødderne z_1 og z_2 . Vink: $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)$. Gang ud!
5. Moivres formel

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

siger egentlig ”blot”, at

$$(e^{ix})^n = e^{inx}$$

gældende for $n \in Z$. Formlen er alligevel nyttig. Brug den med $n = 2$ til at finde en formel for $\sin 2x$ udtrykt ved $\sin x$ og $\cos x$. Find også en formel for $\cos 2x$ udtrykt ved $\sin x$ og $\cos x$.

Hjemmeopgavesæt nr. 2, første halvdel

Ved hver hjemmeopgave anføres, om den skal regnes i hånden eller regnes ved hjælp af Maple. Ved de opgaver, der skal regnes i hånden skal man dog altid i størst mulige omfang selv kontrollere sine resultater vha. Maple eller lommeregner. *Regnefejl bør derfor slet ikke forekomme i hjemmeopgaverne.* Den vigtige del af det afleverede sæt er derfor argumentationen, beregningerne skal simpelthen være korrekte!

Husk at gemme det af læreren rettede sæt, da det skal afleveres sammen med 5. sæt i 13. semesteruge!

Besvarelsen af opgaverne afleveres sammen med besvarelsen af anden halvdel af sættet på Dag 2 i 4. semesteruge (E + M: senest kl. 15.00 torsdag den 28. februar. B + K: Senest kl. 10.00 fredag den 29. februar):

1. Denne opgave skal løses i hånden. Løs ligningen

$$z^4 + 8 - i\sqrt{192} = 0$$

og indtegn røddernes placering i den komplekse plan sammen med den cirkel, hvorpå rødderne ligger. Find også røddernes sum. Rødderne skal angives på rektangulær form.

2. Denne opgave skal løses i hånden. Find samtlige løsninger til ligningerne

$$2z^2 + 2z - 4 = 0, \quad z^2 - 2z + 1 = 0, \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$