

DIPLOMAT Ugeseddel 1 DIPLOMAT

4. februar - 8. februar 2008

Dag 1

Forelæsning kl. 8-9/13-14: En kort demonstration af computeralgebraprogrammet *Maple*. Maple vil i videst muligt omfang blive brugt i kurset.

Opgaveregning kl. 9-12/14-17 i databaren. Før man går i gang med selve opgaverne, bør man gøre følgende:

- Åbn programmet Maple på computeren. Gå derefter ind på kursushjemmesiden

www.mat.dtu.dk/education/01905/

under menupunktet *Maplebog*. Læs og følg *Vejledning i brug af Maple 11 sammen med noterne*. Det er vigtigt, at denne vejledning bliver fulgt, idet lærerhjælp til Mapleopgaverne ellers bliver unødigt besværliggjort.

- Læs indledningskapitlet til Maplebogen foran computeren. Hent evt. filen *introkort.mw* ind fra hjemmesiden for kursus under menupunktet *Maple worksheets*. Dette gøres i Internet Explorer ved at højreklikke på filnavnet og vælge *Gem destination som...* Vælg Filtype *Alle Filer* (ikke *XML Document*). Bruger man Firefox højreklikker man på filnavnet og vælger *Save Link As*.

1. Find arealet af en cirkel med radius $2 + \sqrt{3}$ ved brug af den sædvanlige formel $A = \pi r^2$. Find både den eksakte værdi og en decimalbrøkstilnærmelse.

2. Find med 50 betydende cifre en decimalbrøkstilnærmelse til $\ln 2$.

3. Lad $p1$ være polynomiet $(x^2 - 3x + 1)(2x - 7)$. Udfør omhyggeligt følgende i Maple:

- (a) Sæt variablen $p1$ til at være polynomiet $(x^2 - 3x + 1)(2x - 7)$ (*tilordning*).
- (b) Kontrollér tilordningen ved på en inputlinie at indtaste $p1$;
- (c) Find nulpunkterne for $p1$. Der ønskes eksakte værdier.
- (d) Gang polynomiet ud og sæt den udgangede version til at være p . Kommentar: *Generelt skal man så vidt muligt undgå at indtaste output fra tidligere Mapleudregninger. Bed i stedet Maple om at gemme output i en variabel til senere brug!*
- (e) Tegn grafen for p på intervallet $[0, 4]$.
- (f) Find differentialkvotienten af p . Kald denne pm .
- (g) Find nulpunkterne for pm . Der ønskes både eksakte værdier og decimalbrøkstilnærmelser.
- (h) Find en stamfunktion til p . Kontrollér resultatet (også i Maple) ved at differentiere resultatet.
- (i) Find arealet under grafen for p og over x-aksen og mellem de to mindste nulpunkter for p . Giv både en *simpel* eksakt værdi og en decimalbrøkstilnærmelse.

4. Lad f være funktionen givet ved forskriften $f(x) = x^2 e^{-2x}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Hvis man giver funktionen f inputtet x , vil f altså svare med outputtet $x^2 e^{-2x}$. Med andre ord: f er funktionen $x \mapsto x^2 e^{-2x}$.

Definitionen af f skal udføres således i Maple:

```
f := x -> x^2*exp(-2*x);
```

- (a) Definér funktionen f i Maple. Kontrollér definitionen ved (gerne på samme linie) at indtaste 3 *kald* til funktionen f :
 $f(u)$; $f(1)$; $f(\ln(2))$;

- (b) Tegn grafen for f på intervallet $[0, 5]$.
- (c) Find det positive tal x_1 for hvilket gælder, at $f'(x_1) = 0$. Hvad er værdien af $f''(x_1)$?
- (d) Tegn grafen for den afledede f' på intervallet $[0, 5]$. Find de to værdier af x for hvilke $f'(x) = \frac{1}{5}$. Gør først et forsøg med brug af *solve*, derefter med brug af *fsolve* med søgeinterval.
- (e) Find $\int_0^5 f(x) dx$. Find også $\int_0^c f(x) dx$, hvor c bare er variabelen c . Find grænseværdien

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(x) dx$$

og find derefter direkte $\int_0^\infty f(x) dx$.

5. Lad g være funktionen $x \mapsto x^3 \sin(ax)$. Her er a bare konstanten a . Den skal altså ikke gives nogen talværdi.

- (a) Definér g i Maple (selvfølgelig ved brug af pilenotation!).
- (b) For enhver talværdi af a kan grafen for g tegnes. Laver man tilstrækkeligt mange billeder, kan man af disse lave en animation. Dette kan Maple dog selv gøre således:
`with(plots):`
`animate( plot, [g(x), x = -2*Pi .. 2*Pi ], a=1..2);`
 Prøv at indsætte følgende valgfri tilføjelse lige før den kantede slutparentes: `filled=true`.
- (c) Lad nu g i stedet være funktionen $x \mapsto |x|^n \sin(x)$. Her er n bare konstanten n . Lav en animation af grafer for g , hvor n antager værdier mellem -1 og 3 . Brug $[-\pi, \pi]$ som plotteinterval.

Dag 2

Forelæsning kl. 8-10/13-15: De komplekse tal. Linear Algebra, Appendix B.

- De komplekse tal: Punkterne i planen
- Addition af komplekse tal
- Multiplikation af komplekse tal
- Tallet i . Rektangulær form $x + iy$.
- Modulus og argument. Polær form: $r(\cos v + i \sin v)$

Aktivitetsopgaver og klasseset kl. 10-12/15-17. Gå straks i gang med opgaverne nedenfor. Opgaverne ønskes primært løst ved håndkraft, men har man Maple til rådighed, kan man kontrollere resultaterne.

1. Skriv følgende komplekse tal på rektangulær form, dvs. på formen $x + iy$, hvor $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(a) (5 + i)(1 + 9i), \quad (b) i + i^2 + i^3 + i^4, \quad (c) \frac{1}{1 + 3i} + \frac{1}{(1 + 3i)^2}$$

$$(d) (1 + 2i)^2 + \frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^8), \quad (e) \frac{2 + 5i}{(3 - 7i)^2} + (2 + 3i)(3 - 4i)$$

2. Hvis $z = -1 + i$, hvad er så $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \bar{z}, |z|, \arg z$? Kan man sige noget om $\operatorname{Im}(\operatorname{Im} z)$, hvis man ikke kender z ?

3. Find modulus og hovedargument for følgende 3 komplekse tal, men indtegn dem først i den komplekse plan:

$$2 + 2i, \quad \sqrt{3} - i, \quad -\frac{1}{6} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

4. Følgende 3 tal ønskes skrevet på polær form, dvs. på formen $r(\cos v + i \sin v)$. Der ønskes brugt hovedargumentet:

$$-4 - 4i, \quad 2\sqrt{3} - 6i, \quad \frac{4}{1+i}$$

Indtegn også tallene i den komplekse plan.

5. Udregn $(1+i)^8$ direkte og også ved først at omskrive $1+i$ til polær form.
6. Reducér udtrykket

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(2-2i\sqrt{3})^3}$$

ved regning med modulus og argument.

7. Bestem modulus af tallet

$$\frac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$$

Hjemmeopgavesæt nr. 1

Ved hver hjemmeopgave anføres, om den skal regnes i hånden eller regnes ved hjælp af Maple. Ved de opgaver, der skal regnes i hånden skal man dog altid i størst mulige omfang selv kontrollere sine resultater vha. Maple eller lommeregner. *Regnefejl bør derfor slet ikke forekomme i hjemmeopgaverne.* Den vigtige del af det afleverede sæt er derfor argumentationen, beregningerne skal simpelthen være korrekte!

Husk at gemme det af læreren rettede sæt, da det skal afleveres sammen med 5. sæt i 13. semesteruge!

Hjemmeopgaver til aflevering Dag 2 i 2. semesteruge (E + M: senest kl. 15.00 torsdag den 14. februar. B + K: Senest kl. 10.00 fredag den 15. februar):

1. Denne opgave skal regnes i hånden. Der er givet to komplekse tal

$$z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -2iz_1$$

- (a) Angiv den kompleks konjugerede af de to tal, altså $\overline{z_1}$ og $\overline{z_2}$.
(b) Indtegn i den komplekse plan de 4 tal $z_1, z_2, \overline{z_1}$ og $\overline{z_2}$.
(c) Find modulus og argument for hver af de 4 komplekse tal $z_1, z_2, \overline{z_1}$ og $\overline{z_2}$. Argumenterne skal angives som decimalbrøkstilhærmelser med 5 betydende cifre og selvfølgelig i radianer.
(d) Vis, at trekanten med vinkelspidserne z_1, z_2 og 0 er retvinklet.
2. Denne opgave *skal* afleveres som et udskrift af et Maple-worksheet. Worksheet skal være forsynet med titlen "Hjemmeopgavesæt nr. 1, opgave 3", forfatter og dato. *Desuden skal forklarende tekst indsættes mellem beregningerne.*
Lad f være funktionen

$$x \mapsto \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x}$$

- (a) Definér funktionen f i Maple. Vær sikker på, at den er defineret som en funktion!
(b) Tegn grafen for f på intervallet $[0, 2\pi]$.

- (c) Tangenten til grafen for f i punktet $(a, f(a))$ har ligningen $y = TANG$, hvor $TANG = f(a) + f'(a)(x - a)$. Find $TANG$. Bemærk, at $TANG$ ikke skal defineres som en funktion, men blot som et udtryk indeholdende x (og a).
- (d) Tegn for $a = \frac{5}{2} TANG$ og $f(x)$ i samme koordinatsystem. Brug igen intervallet $[0, 2\pi]$.
- (e) Som det ses i spørgsmål (d) skærer tangenten til punktet $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ grafen for f for en x -værdi mellem 4 og 5. Find denne x -værdi ved numerisk løsning.