

# Eksempel på 2-timersprøve 2

## Løsninger

Preben Alsholm

Februar 2004

### Opgave 1

Maplekommandoerne

```
expand( (z-2*exp(I*Pi/3))*(z-2*exp(-I*Pi/3))*(z-exp(I*Pi/2))*(z-exp(-I*Pi/2))):  
sort(%);
```

resultater i polynomiet

$$z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4$$

Vi skal på grundlag heraf finde rødderne i polynomiet.

Rødderne må åbenbart være

$$2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

da polynomiet  $z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4$  er fremkommet ved at gange

$$(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}})(z - 2e^{-i\frac{\pi}{3}})(z - e^{i\frac{\pi}{2}})(z - e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

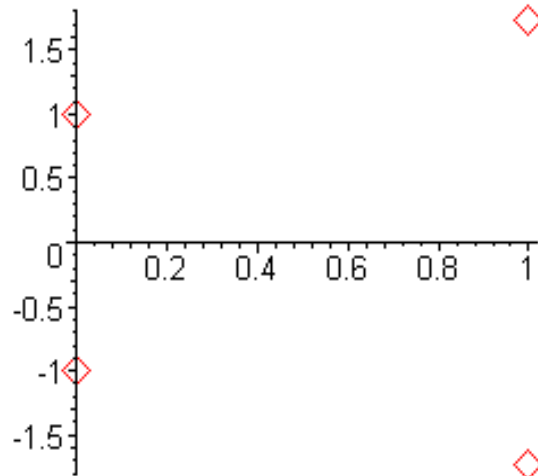
ud. Vi finder

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$



## Opgave 2

Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 - 7x_3 &= 1 \\x_2 + 3x_3 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 11 \\-x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5\end{aligned}$$

Totalmatricen er

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne  $R_3 := R_3 - 2R_1$ ,  $R_4 := R_4 + R_1$  giver matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne  $R_3 := R_3 - 3R_2$ ,  $R_4 := R_4 + 2R_2$  giver matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu er totalmatricen på echelonform. Vi ser allerede nu, at der er præcis én løsning til ligningssystemet. Vi fortsætter: Rækkeoperationerne  $R_2 := R_2 -$

$3R_3, R_1 := R_1 + 7R_3$  giver matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatricen er nu på reduceret echelonform. Løsningen kan umiddelbart aflæses til

$$\begin{aligned} x_1 &= 22 \\ x_2 &= -7 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

### Opgave 3

Der er i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
with(LinearAlgebra):  
A:=Matrix([[1, -2, 8, 4,-11], [0, 1, -3, 0,4], [-4, 11, -41, -15, 54]]):  
T:=<A|<0,0,0>>;  
G:=GaussianElimination(T);  
og Maple viser resultaterne
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 4 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 11 & -41 & -15 & 54 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 4 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skal på grundlag heraf løse det homogene ligningssystem

$$Ax = 0$$

og angive en basis for nulrummet for  $A$ .

Totalmatricen er åbenbart  $T$ . Denne er blevet reduceret til echelonformen  $G$ . Vi ser allerede nu, at  $x_1, x_2$  og  $x_4$  er basale variable og  $x_3$  og  $x_5$  er frie variable. Men vi fortsætter reduktionen. Rækkeoperationen  $R_1 := R_1 - 4R_3$  giver

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen  $R_1 := R_1 + 2R_2$  giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på reduceret echelonform. Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + 5x_5 &= 0 \\x_2 - 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\x_4 - 2x_5 &= 0\end{aligned}$$

Vi sætter  $x_5 = t_1$ ,  $x_3 = t_2$  og får hermed den fuldstændige løsning til  $Ax = 0$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t_1 - 2t_2 \\ -4t_1 + 3t_2 \\ t_2 \\ 2t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . En basis for nulrummet kan umiddelbart aflæses af den fuldstændige løsning til

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Disse to vektorer udspænder åbenbart nulrummet for  $A$  og er lineært uafhængige, hvilket lettest ses på 3. og 5. pladserne i de to vektorer (svarende til de frie parametres numre).

#### Opgave 4

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi skal først finde egenverdierne for  $A$ . Karakterpolynomiet er

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ -12 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -12 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2\end{aligned}$$

og det har rødderne 1 og 2 (dobbeltrød). Egenverdierne er altså 1 og 2 (med algebraisk multiplicitet 2). Vi skal nu finde en basis for egenrummet hørende til den største egenverdi, som jo er 2. Egenvektorerne  $v$  opfylder  $(A - 2I)v = 0$ . Totalmatricen for dette system er

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationen  $R_2 := R_2 - 3R_1$  opnås matricen

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så vi har, at egenvektorerne  $v$  opfylder ligningen  $-4v_1 + v_2 = 0$ . Sæt  $v_3 = s$  og  $v_2 = 4t$  så fås, at  $v_1 = t$  og samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 2 er da givet ved

$$v = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor  $(s, t) \neq (0, 0)$ . En basis for egenrummet er altså

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

da disse to vektorer jo også klart er lineært uafhængige.

### Opgave 5

Vi skal finde den løsning til differentiaalligningen

$$tx'(t) + 2x(t) = \sin t$$

der opfylder begyndelsesbetingelsen  $x(\pi) = 0$ .

Differentiaalligningen er lineær men ikke normeret. Vi normerer:

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = \frac{\sin t}{t}$$

På grund af koefficienten  $\frac{1}{t}$  må vi forlange enten  $t < 0$  eller  $t > 0$ . Vi bemærker, at begyndelsesbetingelsen er givet for  $t = \pi$ , så vi må derfor forlange  $t > 0$ . Vi bruger Panserformlen

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)}$$

Her er

$$P(t) = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln t$$

da  $t > 0$ . Altså fås

$$\begin{aligned} e^{P(t)} &= e^{2 \ln t} = t^2 \\ e^{-P(t)} &= \frac{1}{e^{P(t)}} = \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

således at den fuldstændige løsning er givet ved

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^2} \int t^2 \cdot \frac{\sin t}{t} dt + C \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \int t \sin t dt + C \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} (\sin t - t \cos t) + C \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \sin t - \frac{1}{t} \cos t + C \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

hvor  $C$  er en arbitrær konstant. Denne bestemmes ud fra begyndelsesbetingelsen  $x(\pi) = 0$  ved indsættelse:

$$0 = x(\pi) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi - \frac{1}{\pi} \cos \pi + C \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} C$$

så  $C = -\pi$  og løsningen til vores problem er derfor

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \sin t - \frac{1}{t} \cos t - \frac{\pi}{t^2}$$

hvor  $t > 0$ .