Eksempel på 2-timersprøve 1
Løsninger

Preben Alsholm

Marts 2004

Opgave 1

Vi skal løse ligningen

$$(1+i)\,z-(8+12i)\,e^{i\frac{\pi}{6}}=0$$

Løsningen ønskes angivet på rektangulær form, dvs. på formen $x+iy$, hvor $x,y\in R$.

Vi finder umiddelbart

$$z=\frac{(8+12i)\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{1+i}$$

Vi omskriver først eksponentialfunktionen til rektangulær form:

$$e^{i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\frac{1}{2}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(8+12i)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\frac{1}{2}\right)}{1+i}=\frac{4\sqrt{3}-6+i\left(4+6\sqrt{3}\right)}{1+i}\\
&= \frac{\left(4\sqrt{3}-6+i\left(4+6\sqrt{3}\right)\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{10\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}+10\right)}{2}\\
&= 5\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+5\right)
\end{aligned}$$

Opgave 2

Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3-8x_4 &= 16\\
2x_1+2x_2-x_3-17x_4 &= 33\\
x_1+x_2-5x_3-x_4 &= 6
\end{aligned}$$

Totalmatricen er

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -8 & 16\\ 2 & 2 & -1 & -17 & 33\\ 1 & 1 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 2R_1, R_3 := R_3 - R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_3 := R_3 + 4R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform og vi ser allerede nu, at x_1, x_3, x_4 er basale variable og x_2 er fri. Men vi fortsætter. Rækkeoperationen $R_3 := \frac{1}{3}R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + R_3, R_1 := R_1 + 8R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Endelig giver rækkeoperationen $R_1 := R_1 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på reduceret echelonform. Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Sættes den frie parameter x_2 til t, fås

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor $t \in R$.

Opgave 3 (20 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Vi skal vise, at A er invertibel og finde den inverse A^{-1}. Vi løser matrixligningen

$AC = I$ for C. Hertil opstiller vi totalmatricen $T = [A|I]$ dvs.

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 2R_1, R_3 := R_3 + R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_3 := R_3 + R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform. Da der kun er enkeltindrykninger, er matricen A invertibel. Vi fortsætter med bestemmelsen af A^{-1}. Rækkeoperationen $R_3 := -R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 3R_3, R_1 := R_1 + 6R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 & -17 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_1 := R_1 + 6R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -59 & -18 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Til slut giver rækkeoperationen $R_1 := -\frac{1}{2}R_2$ den reducerede echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{59}{2} & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Heraf aflæser vi, at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{59}{2} & 9 & 12 \\ -7 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

De givne Mapleoplysninger om 3×3-matricen A betyder, at karakterpolynomiet for A er givet ved

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda + 3)^2$$

(minusset skyldes, at i Maple er karakterpolynomiet $\det(\lambda I - A)$). Desuden får vi at vide, at en basis for nulrummet for $A + 3I$ udgøres af vektoren

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karakterpolynomiet ses umiddelbart at have rødderne 2 og -3. Den sidste rod er dobbeltrod. Egenværdierne for A er derfor 2 og -3 (med algebraisk multiplicitet 2).

Vi bliver bedt om at finde produktet $A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Men vektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er jo egenvektor hørende til -3, så

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Til slut skal vi afgøre, om A kan diagonaliseres. Da der ikke er 3 forskellige egenværdier, er der en mulighed for, at dette ikke er tilfældet. Vi må undersøge dimensionen af egenrummet hørende til egenværdien -3. Men egenrummet hørende til egenværdien -3 er jo nulrummet for $A + 3I$ og dette har dimension 1 ifølge det opgivne. Da dette tal (den geometriske multiplicitet for egenværdien -3) er mindre end den algebraiske multiplicitet, er matricen A ikke diagonaliserbar.

Opgave 5

Vi skal finde løsningen til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = (1 + x)\sin t$$

med begyndelsesbetingelsen $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ligningen er separabel (men den er også lineær, se nedenfor). Vi bemærker først, at der åbenbart er den konstante løsning $x = -1$. Men den er uinteressant, da vi har begyndelsesbetingelsen $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Vi separerer:

$$\int \frac{dx}{1 + x} = \int \sin t \, dt + C$$

Vi bemærker, at løsningen må opfylde $1+x > 0$ (gælder for begyndelsesværdien og derfor også på resten af definitionsintervallet). Vi finder så

$$\ln(1+x) = -\cos t + C$$

hvoraf fås

$$1 + x = e^{-\cos t + C} = e^C e^{-\cos t} = Ke^{-\cos t}$$

Altså

$$x(t) = -1 + Ke^{-\cos t}$$

For at bestemme konstanten K gør vi brug af begyndelsesbetingelsen $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + Ke^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 + Ke^0 = -1 + K$$

Heraf fås, at $K = 2$, så løsningen er givet ved

$$x(t) = -1 + 2e^{-\cos t}$$