

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve i Matematik MAT 01905

Odinsdag den 24. december 2003, kl. 18.00 - 22.00

Antal opgaver: 7

Tilladte hjælpemidler: Alle.

Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.

Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (15 point).

Løs ligningen

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z} - \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i} = 0$$

Løsningen ønskes angivet på polær form, dvs. på formen $re^{i\theta}$, hvor $r > 0$ og $\theta \in R$. Vis på en figur løsningens placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (10 point).

Eksekvering af Maplekommandoerne

```
ligning:=diff(x(t),t,t)+3*diff(x(t),t)+2*x(t)=10*t*sin(t):  
dsolve({ligning,x(0)=17/5,D(x)(0)=-9/5});  
giver som resultat
```

$$x(t) = -3t \cos(t) + t \sin(t) + \frac{6}{5} \sin(t) + \frac{17}{5} \cos(t)$$

Udnyt dette resultat til at finde den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$x'' + 3x' + 2x = 10t \sin t$$

Opgave 3 (15 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = (x^2 - 2xy + 2y^2) e^{-x}$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Eksekvering af Maplekommandoerne

```
f:=(x,y)->(x^2-2*x*y+2*y^2)*exp(-x):
```

```
fx:=diff(f(x,y),x):
```

```
fy:=diff(f(x,y),y):
```

```
solve({fx=0,fy=0},{x,y});
```

resultater i

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 2, y = 1\}$$

hvorefter Maplekommandoerne

```
H:=unapply(VectorCalculus[Hessian](f(x,y),[x,y]),x,y):
```

```
LinearAlgebra[Eigenvalues](H(0,0));
```

```
LinearAlgebra[Eigenvalues](H(2,1));
```

resultater i

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} + 3 \\ 3 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-2} + 2\sqrt{2}e^{-2} \\ 2e^{-2} - 2\sqrt{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

Angiv de stationære punkter for f og bestem deres type ud fra de givne oplysninger.

Opgave 4 (20 point).

Lad A og b være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -24 & -6 \\ 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Løs ligningssystemet $Ax = b$.
2. Find egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
3. Angiv en diagonalmatrix D og en invertibel matrix P , således at $A = PDP^{-1}$.

Opgave 5 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x' - \frac{1}{t}x = -2te^{-t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 2e^{-1}$.

1. Find løsningen.
2. Find løsningens 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 1.

Opgave 6 (10 point).

Udregn planintegralet

$$\int_S (x^2 - y^2) dA$$

hvor S er området i planen givet ved

$$S = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge -x \leq y \leq x\}$$

Opgave 7 (15 point).

Maplekommandoen

```
int(ln(x)/x^5,x);
```

resulterer i

$$-\frac{1}{4} \frac{\ln(x)}{x^4} - \frac{1}{16x^4}$$

Hvad bør Maplekommandoen

```
int(ln(x)/x^5,x=1..infinity);
```

resultere i?