DiploMat. Eksempel på 4-timersprøve.

Preben Alsholm

Maj 2004

1 Opgave 1

Vi skal løse ligningen

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z} - \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i} = 0$$

Løsningen skal angives på polær form, dvs. på formen $re^{i\theta}$, hvor $r > 0$ og $\theta \in R$.

Først finder vi

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i}$$

Heraf fås

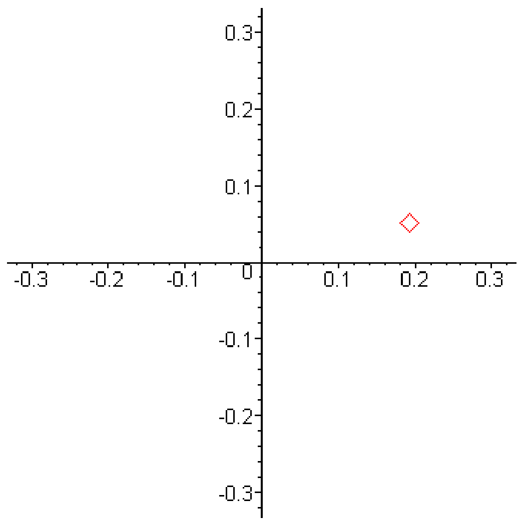
$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i}{5}$$

Tallet $w = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ er kønt i polære koordinater: Modulus af w er $|w| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1$, et argument v er givet ved, at $\sin v = -\frac{1}{2}$ og at w ligger i 4. kvadrant, således at vi kan vælge $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Dermed fås $v = -\frac{\pi}{6}$, altså

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i}{5} = \frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$



2 Opgave 2

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 3x' + 2x = 10t\sin t$$

Vi har givet en partikulær løsning

$$x_p(t) = -3t\cos(t) + t\sin(t) + \frac{6}{5}\sin(t) + \frac{17}{5}\cos(t)$$

Vi behøver derfor blot selv finde den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning:

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

Denne har konstante koefficienter. Karakterligningen er $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Rødderne er -2 og -1. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning er derfor

$$x(t) = -3t\cos(t) + t\sin(t) + \frac{6}{5}\sin(t) + \frac{17}{5}\cos(t) + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

3 Opgave 3

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = \left(x^2 - 2xy + 2y^2\right) e^{-x}$$

for alle $(x,y) \in R^2$.

Ud fra de givne Mapleoplysninger slutter vi, at $(0,0)$ og $(2,1)$ er de stationære punkter for f, da f netop i disse to punkter opfylder $f_x(x,y) = 0$ og $f_y(x,y) = 0$.

Vi skal bestemme deres type. Vi ser, at Hessematricen i $(0,0)$ har egenværdierne $3 \pm \sqrt{5}$. Begge er positive, så $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt.

Vi ser, at Hessematricen i $(2,1)$ har egenværdierne $2e^{-2} \pm 2\sqrt{2}e^{-2}$. Den ene er positiv, den anden negativ, så $(2,1)$ er et saddelpunkt.

4 Opgave 4

Lad A og b være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -24 & -6 \\ 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal løse ligningssystemet $Ax = b$. Totalmatricen opstilles

   $$T = \begin{pmatrix} 7 & -24 & -6 & 1 \\ 2 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Rækkeoperationen $R_2 := R_2 - \frac{2}{7}R_1$ giver

   $$\begin{pmatrix} 7 & -24 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Herefter giver $R_2 := -7R_2$

   $$\begin{pmatrix} 7 & -24 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Totalmatricen er nu på echelonform og vi kan se, at systemet har præcis én løsning. Vi fortsætter til reduceret echelonform. Operationerne $R_2 := R_2 - 2R_3, R_1 := R_1 + 6R_3$ giver

   $$\begin{pmatrix} 7 & -24 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operationen $R_1 := R_1 + 24R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -161 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hvorefter operationen $R_1 := \frac{1}{7}R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på reduceret echelonform, og vi kan aflæse løsningen til

$$x = \begin{pmatrix} -23 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Vi skal finde egenværdier og tilhørende egenvektorer for A. Karakterpolynomiet er

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 7-\lambda & -24 & -6 \\ 2 & -7-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -24 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Egenværdierne er altså -1 og 1, der har algebraisk multiplicitet 2.
De til egenværdien -1 hørende egenvektorer v er bestemt ved $(A+I)\,v = 0$. Totalmatricen herfor er

$$\begin{pmatrix} 8 & -24 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_2 := \frac{1}{4}R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 8 & -24 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Følgende operationer udføres i rækkefølge $R_2 := -2R_2, R_3 := R_3 - 2R_2, R_1 := R_1 + 6R_2, R_1 := \frac{1}{8}R_1$. Herved fås

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er $v_1 - 3v_2 = 0, v_3 = 0$. Vi sætter $v_2 = t$, hvorefter vi har

$$v = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor $t \neq 0$.
De til egenværdien 1 hørende egenvektorer v er bestemt ved $(A - I)\,v = 0$. Totalmatricen herfor er

$$\begin{pmatrix} 6 & -24 & -6 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_2 := \frac{1}{3}R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 6 & -24 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operationen $R_1 := \frac{1}{6}R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er $v_1 - 4v_2 - v_3 = 0$. Vi sætter $v_3 = t, v_2 = s$, hvorefter vi har

$$v = \begin{pmatrix} 4s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $(s, t) \neq (0, 0)$. Vi ser altså, at den geometriske multiplicitet af egenværdien -1 er 2, altså den samme som den algebraiske multiplicitet.

3. Angiv en diagonalmatrix D og en invertibel matrix P, således at $A = PDP^{-1}$. Med forarbejdet ovenfor er dette nu let:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Opgave 5

Der er givet differentialligningen

$$x' - \frac{1}{t}x = -2te^{-t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 2e^{-1}$.

1. Vi skal først finde løsningen. Differentialligningen er lineær. Vi bemærker først, at vi må forudsætte $t \neq 0$. Da endvidere begyndelsesbetingelsen er givet for $t = 1 > 0$, skal vi altså forudsætte, at $t > 0$. Vi kan bruge

Panserformlen. Vi finder $P(t) = \int -\frac{1}{t}dt = -\ln t$. Altså fås $e^{P(t)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t}$ og $e^{-P(t)} = e^{\ln t} = t$. Hermed er den fuldstændige løsning givet ved

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt + Ce^{-P(t)} \\ &= t \int \frac{1}{t} \left(-2te^{-t}\right) dt + Ct \\ &= -2t \int e^{-t} dt + Ct = 2te^{-t} + Ct \end{aligned}$$

hvor $C \in R$. Konstanten bestemmes nu ud fra begyndelsesbetingelsen $x(1) = 2e^{-1}$. Ved indsættelse fås

$$2e^{-1} = x(1) = 2e^{-1} + C$$

hvoraf åbenbart findes $C = 0$. Løsningen er altså

$$x(t) = 2te^{-t}$$

2. Vi skal nu finde løsningens 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 1:

$$P_2(t) = x(1) + x'(1)(t-1) + \frac{1}{2}x''(1)(t-1)^2$$

Polynomiet kan bestemmes direkte ud fra det fundne formeludtryk for løsningen eller ved brug af differentialligningen. Vi viser begge metoder.

   (a) Først ud fra differentialligningen uden brug af det fundne formeludtryk. Vi skynder os at skrive den med de udeladte t'er:

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = -2te^{-t}$$

   $x(1)$ er direkte givet som $2e^{-1}$. $x'(1)$ kan findes ved indsættelse af $t = 1$ i differentialligningen:

$$x'(1) - x(1) = -2e^{-1}$$

   hvoraf fås $x'(1) = x(1) - 2e^{-1} = 0$. Den anden afledede $x''(t)$ kan findes ved differentiation af differentialligningen:

$$x''(t) + \frac{1}{t^2}x(t) - \frac{1}{t}x'(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t}$$

   Indsættelse af $t = 1$ giver

$$x''(1) + x(1) - x'(1) = -2e^{-1} + 2e^{-1}$$

   Altså finder vi $x''(1) = -x(1) = -2e^{-1}$, så

$$P_2(t) = 2e^{-1} - e^{-1}(t-1)^2$$

(b) Direkte ud fra den konkret fundne løsning $x(t) = 2te^{-t}$. Vi skal finde $x'(t)$ og $x''(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2e^{-t} - 2te^{-t} \\ x''(t) &= -2e^{-t} - 2e^{-t} + 2te^{-t} = -4e^{-t} + 2te^{-t} \end{aligned}$$

Heraf findes $x(1) = 2e^{-1}, x'(1) = 0, x''(1) = -2e^{-1}$, hvorefter $P_2(t)$ kan skrives ned som ovenfor.

6 Opgave 6

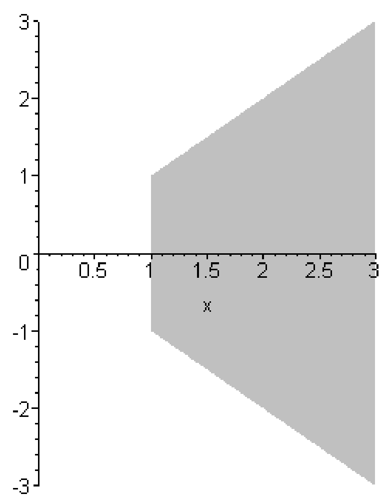
Vi skal udregne planintegralet

$$\int_S \left(x^2 - y^2\right) dA$$

hvor S er området i planen givet ved

$$S = \{(x, y) \,|1 \leq x \leq 3 \wedge -x \leq y \leq x\}$$

Vi tegner først området:



Planintegralet omskrives til et dobbeltintegral, der derefter udregnes:

$$\begin{aligned} \int_S \left(x^2 - y^2\right) dA &= \int_1^3 dx \int_{-x}^{x} \left(x^2 - y^2\right) dy \\ &= \int_1^3 \left[x^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_{-x}^{x} dx = \int_1^3 \left(x^3 - \frac{1}{3}x^3 - \left(x^2(-x) - \frac{1}{3}(-x)^3\right)\right) dx \\ &= \int_1^3 \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

7 Opgave 7

Vi får at vide, at

$$\int \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{1}{4}\frac{\ln x}{x^4} - \frac{1}{16x^4}$$

Vi bliver så bedt om at finde

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^5} dx$$

Vi har for $R > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{\ln x}{x^5} dx &= \left[-\frac{1}{4}\frac{\ln x}{x^4} - \frac{1}{16x^4}\right]_1^R \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\ln R}{R^4} - \frac{1}{16R^4} + \frac{1}{16} \to \frac{1}{16} \end{aligned}$$

for $R \to \infty$. Dette bygger på, at

$$\frac{\ln R}{R^4} \to 0$$

for $R \to \infty$. Dette kan vises vha. l'Hospitals regel, da problemet er af typen "$\frac{\infty}{\infty}$". Vi finder ved brug af l'Hospitals regel

$$\frac{\frac{1}{R}}{4R^3} = \frac{1}{4R^4} \to 0$$

for $R \to \infty$. Hermed har vi også $\frac{\ln R}{R^4} \to 0$ for $R \to \infty$.

Vi har hermed vist, at

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^5} dx = \frac{1}{16}$$