DiploMat. Løsninger til skriftlig prøve maj 2007

Preben Alsholm

16. maj 2007

Opgave 1

Ligningen

$$z^6 = a$$

har som én af sine rødder $z = i$. Vi skal ved brug heraf finde konstanten a og de andre rødder. Rødderne skal angives på rektangulær form og deres placering i den komplekse plan skal vises.

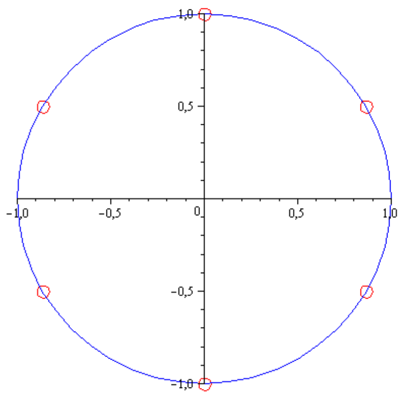
Da i er rod har vi $i^6 = a$, altså

$$a = i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1$$

Da roden i ligger på enhedscirklen gør de andre rødder det også, og de ligger med en vinkelafstand på $\frac{\pi}{3}$ fra hinanden. Rødderne er dermed givet ved

$$z = ie^{ip\frac{\pi}{3}}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Hermed har vi

$$\begin{aligned}
z_0 &= i \\
z_1 &= ie^{i\frac{\pi}{3}} = i\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= ie^{i\frac{2\pi}{3}} = i\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \\
z_3 &= ie^{i\pi} = -i \\
z_4 &= ie^{i\frac{4\pi}{3}} = i\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= ie^{i\frac{5\pi}{3}} = i\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Opgave 2

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 8 \\ -4x_1 + 13x_2 + ax_3 - 10x_4 &= 2a - 14 \end{aligned}$$

hvor a er en konstant.

1. Vi skal løse ligningssystemet for enhver værdi af a.
Totalmatricen er
$$T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 5 & 2 & 8 \\ -4 & 13 & a & -10 & 2a-14 \end{bmatrix}$$
Vi bruger Gausselimination. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 2R_1, R_3 := R_3 + 4R_1$ giver
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 & -2 & 2a+2 \end{bmatrix}$$
Herefter giver rækkeoperationen $R_3 := R_3 - R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 2a+2 \end{bmatrix}$$
Vi ser, at uanset værdien af a er matricen nu på echelonform. Hvis $a + 1 \neq 0$, så har systemet én fri variabel, nemlig x_4. Hvis $a + 1 = 0$, så har systemet to frie variable nemlig x_3 og x_4.
Vi løser først systemet i tilfældet $a \neq -1$. Vi får ved rækkeoperationerne $R_3 := \frac{1}{a+1}R_3, R_2 := R_2 - 3R_3, R_1 := R_1 - R_3$ matricen
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Rækkeoperationen $R_1 := R_1 + 3R_2$ bringer matricen på reduceret echelonform:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Det tilsvarende ligningssystem er
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_4 &= -16 \\ x_2 - 2x_4 &= -6 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$
Hermed fås løsningerne til
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 + 4x_4 \\ -6 + 2x_4 \\ 2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
hvor x_4 er fri.
Vi løser nu systemet i tilfældet $a = -1$. Den reducerede totalmatrix har nu udseendet
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_1 := R_1 + 3R_2$ bringer matricen på reduceret echelonform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Hermed fås løsningerne til

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 10x_3 + 4x_4 \\ -3x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor x_3 og x_4 er frie.

2. Af løsningerne ovenfor fremgår, at en basis for nulrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem for $a \neq -1$ er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og for $a = -1$ er en basis for nulrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 3

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 4x' + 29x = 200 \sin t \qquad (*)$$

1. Vi skal finde den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
Karakterligningen er

$$R^2 + 4R + 29 = 0$$

der har rødderne

$$R = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i$$

Hermed er den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \cos(5t) + c_2 e^{-2t} \sin(5t)$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

2. Differentialligningen (*) har en partikulær løsning af formen $x_p(t) = a \cos t + b \sin t$, hvor a og b er konstanter. Vi skal bestemme denne løsning og angive den fuldstændige løsning til (*).
Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -a \sin t + b \cos t \\ x_p''(t) &= -a \cos t - b \sin t \end{aligned}$$

Ved indsættelse i (*) fås

$$(-a\cos t - b\sin t) + 4(-a\sin t + b\cos t) + 29(a\cos t + b\sin t) = 200\sin t$$

Efter omordning har vi

$$(28a + 4b)\cos t + (-4a + 28b)\sin t = 200\sin t$$

Dette skal gælde for alle $t \in R$, så vi konkluderer, at

$$\begin{aligned} 28a + 4b &= 0 \\ -4a + 28b &= 200 \end{aligned}$$

Heraf fås $a = -1$ og $b = 7$, så $x_p(t) = -\cos t + 7\sin t$. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er derfor

$$x(t) = -\cos t + 7\sin t + c_1 e^{-2t}\cos(5t) + c_2 e^{-2t}\sin(5t)$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter.

Opgave 4

Om en funktion f af 3 variable vides, at den har de stationære punkter $(1,0,0)$ og $(1,1,0)$.

1. Værdien af de partielle afledede af første orden af f i punktet $(1,0,0)$ er alle 3 nul, da punktet er et stationært punkt.

2. Hessematricen $H(1,0,0)$ for f i punktet $(1,0,0)$ har egenværdierne $2,3$ og 4. Da alle tre er positive er $(1,0,0)$ et egentligt lokalt minimumspunkt.

3. Hessematricen $H(1,1,0)$ for f i punktet $(1,1,0)$ er givet ved

$$H(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   Vi skal finde egenværdierne for $H(1,1,0)$ og bestemme typen af det stationære punkt $(1,1,0)$.
   Vi har (med $H = H(1,1,0)$)

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 6\right) = (1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-2) \end{aligned}$$

   Egenværdierne er altså $1, 2$ og -3. Da begge fortegn er repræsenteret, er punktet $(1,1,0)$ et (egentligt) saddelpunkt.

4. En af egenværdierne for $H(1,1,0)$ er (som vi også så) -3. Vi skal finde en tilhørende egenvektor. En egenvektor v skal opfylde $(H + 3I)v = 0$. Totalmatricen for dette homogene system er

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Rækkeoperationerne $R_2 := \frac{1}{2}R_2, R_3 := R_3 - R_2$ giver

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser, at x_3 er fri. Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} 4x_1 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Egenvektorerne er altså givet ved

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor x_3 er fri.

Opgave 5

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{5}{4} + \sin t\right) dt$$

for alle $x \in R$.

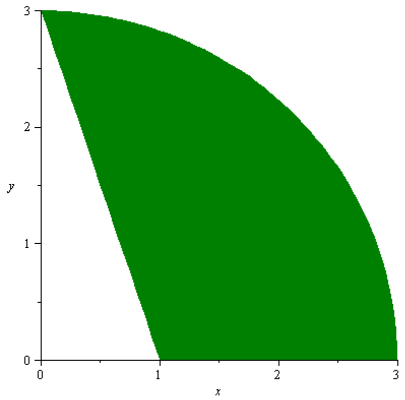
1. Vi skal finde det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0 for f.
   P_2 er givet ved
   $$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$
   Af definitionen af f fås umiddelbart, at $f(0) = 0$. Ved differentiation fås
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{5}{4} + \sin x\right) \\ f''(x) &= \frac{\cos x}{\frac{5}{4} + \sin x} \end{aligned}$$
   Heraf ses, at $f'(0) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ og $f''(0) = \frac{4}{5}$. Altså har vi
   $$P_2(x) = x\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{5}x^2$$

2. Det oplyses, at $|f'''(x)| \leq 0.7$ for alle $x \in [-0.5, 0.5]$. Vi skal ved en vurdering af restleddet i Taylors formel angive en øvre grænse for den fejl man begår ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$, når $x \in [-0.5, 0.5]$.
   Vi har
   $$f(x) - P_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3$$
   hvor ξ ligger mellem 0 og x. Heraf fås
   $$|f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3\right| = \frac{1}{3!}|f'''(\xi)||x|^3 \leq \frac{1}{6}\cdot 0.7|x|^3 \leq \frac{1}{6}\cdot 0.7\cdot(0.5)^3 \approx 0.01\,46$$

3. Det kan vises, at $f(2\pi) = 0$. Find det 2. Taylorpolynomium Q_2 med udviklingspunkt 2π for f.
   Vi har
   $$Q_2(x) = f(2\pi) + f'(2\pi)(x - 2\pi) + \frac{1}{2}f''(2\pi)(x - 2\pi)^2$$
   Da f' og f'' begge er periodiske med perioden 2π, fås dermed
   $$Q_2(x) = (x - 2\pi)\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{5}(x - 2\pi)^2$$

Opgave 6

1. Lad D være det begrænsede område i første kvadrant, der afgrænses af cirklen $x^2 + y^2 = 9$, linien $3x + y = 3$ og x-aksen.



2. Vi skal finde planintegralet
$$\iint_D 2xy \, dA$$
Ved at dreje hovedet 90 grader fås
$$\begin{aligned}\iint_D 2xy \, dA &= \int_0^3 dy \int_{1-\frac{1}{3}y}^{\sqrt{9-y^2}} 2xy \, dx = \int_0^3 \left[x^2 y\right]_{1-\frac{1}{3}y}^{\sqrt{9-y^2}} dy \\ &= \int_0^3 \left(\left(9 - y^2\right) y - \left(1 - \frac{1}{3}y\right)^2 y \right) dy \\ &= \int_0^3 \left(-\frac{10}{9}y^3 + \frac{2}{3}y^2 + 8y \right) dy \\ &= \left[-\frac{5}{18}y^4 + \frac{2}{9}y^3 + 4y^2 \right]_0^3 = \frac{39}{2}\end{aligned}$$