Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
DiploMat 01905

onsdag den 16. maj 2007, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

På kuverten bedes med stor skrift anført retningsbetegnelse (Byg, Elektro, IT, Kemi eller Maskin).

Opgave 1 (15 point).

Ligningen

$$z^6 = a$$

har som én af sine rødder $z = i$.

1. Find ved brug heraf konstanten a.
2. Find de andre rødder og angiv røddernes placering i den komplekse plan. Rødderne skal angives på rektangulær form.

Opgave 2 (15 point).

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 8 \\ -4x_1 + 13x_2 + ax_3 - 10x_4 &= 2a - 14 \end{aligned}$$

hvor a er en konstant.

1. Løs ligningssystemet for enhver værdi af a.
2. Angiv for enhver værdi af a en basis for nulrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem.

Opgave 3 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 4x' + 29x = 200 \sin t \qquad (*)$$

1. Find den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
2. Differentialligningen (*) har en partikulær løsning af formen $x_p(t) = a \cos t + b \sin t$, hvor a og b er konstanter. Bestem denne løsning. Angiv dernæst den fuldstændige løsning til (*).

Opgave 4 (20 point).

Om en funktion f af 3 variable vides, at den har de stationære punkter $(1,0,0)$ og $(1,1,0)$.

1. Hvad er værdien af de partielle afledede af første orden af f i punktet $(1,0,0)$?
2. Hessematricen $H(1,0,0)$ for f i punktet $(1,0,0)$ har egenværdierne $2,3$ og 4. Hvilken type punkt er det stationære punkt $(1,0,0)$?
3. Hessematricen $H(1,1,0)$ for f i punktet $(1,1,0)$ er givet ved

$$H(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   Find egenværdierne for $H(1,1,0)$ og bestem typen af det stationære punkt $(1,1,0)$.

4. En af egenværdierne for $H(1,1,0)$ er -3. Find en tilhørende egenvektor.

Opgave 5 (20 point).

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{5}{4} + \sin t\right) \, dt$$

for alle $x \in R$. Forsøg ikke at udregne integralet!

1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0 for f.
2. Det oplyses, at $|f'''(x)| \leq 0.7$ for alle $x \in [-0.5, 0.5]$. Angiv ved en vurdering af restleddet i Taylors formel en øvre grænse for den fejl man begår ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$, når $x \in [-0.5, 0.5]$.
3. Det kan vises, at $f(2\pi) = 0$. Find det 2. Taylorpolynomium Q_2 med udviklingspunkt 2π for f.

Opgave 6 (15 point).

1. Lad D være det begrænsede område i første kvadrant, der afgrænses af cirklen $x^2 + y^2 = 9$, linien $3x + y = 3$ og x-aksen. Skitsér D.
2. Find planintegralet

$$\iint_D 2xy \, dA$$