DiploMat. Løsninger til skriftlig prøve foråret 2006

Preben Alsholm

21/4 2006

Opgave 1

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal løse det homogene system $Ax = 0$. Totalmatricen er

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeperationerne $R_1 \longleftrightarrow R_2, R_3 := R_3 - R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Herefter giver operationen $R_3 := R_3 - R_2$ matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform. En enkelt operation mere bringer den på reduceret echelonform, nemlig $R_1 := R_1 - R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser, at x_3, x_4 og x_5 er frie variable. Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Heraf fås

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 - 2x_5 \\ -x_3 - 2x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $x_3, x_4, x_5 \in R$.

2. Vi skal finde en basis for nulrummet for A. Basen kan umiddelbart aflæses af resultatet ovenfor:
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
Disse vektorer udspænder jo åbenbart nulrummet, og de er lineært uafhængige, hvilket ses ved betragtning af de positioner, der svarer til numrene på de frie variable.

3. Vi skal finde en basis for søjlerummet for A. En basis for søjlerummet fås ved at tage pivoteringssøjlerne i den oprindelige matrix, altså
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Opgave 2

I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
A:=Matrix([[5,-4,1,1],[8,-7,1,1],[16,-8,-1,2],[-18,9,4,1]]):
CharacteristicPolynomial(A,lambda):
factor(%);
ReducedRowEchelonForm(A+3);
ReducedRowEchelonForm(A-2);
```

Output fra Maple er i rækkefølge (og her adskilt af mellemrum i stedet for linieskift):
$$(\lambda+3)^2(\lambda-2)^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I de følgende spørgsmål kan disse oplysninger benyttes.

1. Vi skal angive egenværdierne for matricen A. Af karakterpolynomiet $(\lambda+3)^2(\lambda-2)^2$ ses, at egenværdierne er -3 og 2, begge med algebraisk multiplicitet 2.

2. Vi skal for hver egenværdi bestemme samtlige egenvektorer.
Vi begynder med -3. Af Mapleinformationen følger, at løsningerne til $(A+3I)\,x=0$ opfylder
$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$
hvor x_2 og x_4 er frie. Egenvektorerne er altså givet ved
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
hvor $x_2, x_4 \in R$. Vi ser, at den geometriske multiplicitet af egenværdien -3 er 2.
Så tager vi egenværdien 2. Af Mapleinformationen følger, at løsningerne til $(A-2I)\,x=0$ opfylder
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

hvor x_4 er fri. Egenvektorerne er altså givet ved

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $x_4 \in R$. Vi ser, at den geometriske multiplicitet af egenværdien 2 er 1.

3. Da den geometriske multiplicitet for egenværdien 2 kun er 1, og da den algebraiske multiplicitet er 2, er matricen A ikke diagonaliserbar.

Opgave 3

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 6x' + 58x = 116t + 13 \qquad (*)$$

1. Vi skal bestemme den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning:

$$x'' + 6x' + 58x = 0$$

Karakterligningen er

$$R^2 + 6R + 58 = 0$$

der har rødderne

$$R = \frac{-6 \pm \sqrt{-196}}{2} = \frac{-6 \pm 14i}{2} = -3 \pm 7i$$

Hermed er den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \cos(7t) + c_2 e^{-3t} \sin(7t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

2. Vi får at vide, at der netop er én løsning til (*), der har formen $x(t) = x_p(t) = at + b$, hvor a og b er konstanter. vi skal bestemme denne løsning og dernæst angive den fuldstændige løsning til (*).
Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= a \\ x_p''(t) &= 0 \end{aligned}$$

indsættelse (*) giver

$$0 + 6a + 58(at + b) = 116t + 13$$

der skal gælde for alle $t \in R$. Men så må nødvendigvis

$$\begin{aligned} 58a &= 116 \\ 6a + 58b &= 13 \end{aligned}$$

Altså må $a = 2$ og $b = \frac{1}{58}$, og dermed $x_p(t) = 2t + \frac{1}{58}$. Den fuldstændige løsning til (*) er dermed

$$x(t) = 2t + \frac{1}{58} + c_1 e^{-3t} \cos(7t) + c_2 e^{-3t} \sin(7t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Opgave 4

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = \cosh(x - 1) \cdot \ln x$$

Vi skal finde det 2. Taylorpolynomium P_2 for f, idet udviklingspunktet er 1.
Vi har

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

Åbenbart gælder, at $f(1) = 0$. Videre finder vi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sinh(x-1)\ln x + \cosh(x-1)\frac{1}{x} \\
f''(x) &= \cosh(x-1)\ln x + 2\sinh(x-1)\frac{1}{x} - \cosh(x-1)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Heraf følger, at $f'(1) = 1$ og $f''(1) = -1$, således at

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Opgave 5

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = y\exp\left(-2y^2\right)\sin x$$

for alle $(x,y) \in R^2$.

1. Vi skal kontrollere, at $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ er stationære punkter for f. Vi finder

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = y\exp\left(-2y^2\right)\cos x \\
f_2(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(-2y^2\right)\sin x - 4y^2\exp\left(-2y^2\right)\sin x \\
&= \sin x \cdot e^{-2y^2}\left(1-4y^2\right)
\end{aligned}$$

   Vi indsætter nu de 3 punkter i gradienten og får

$$\begin{aligned}
\nabla f(0,0) &= (0,0) \\
\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) &= (0,0) \\
\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= (0,0)
\end{aligned}$$

   hvilket skulle vises. Det er i øvrigt ikke så svært at bestemme samtlige stationære punkter, men det blev vi ikke bedt om. Der er uendeligt mange.

2. Vi skal bestemmetypen af de tre stationære punkter givet ovenfor. Hertil finder vi de anden afledede:

$$\begin{aligned}
f_{11}(x,y) &= -y\exp\left(-2y^2\right)\sin x \\
f_{12}(x,y) &= e^{-2y^2}\left(1-4y^2\right)\cos x \\
f_{22}(x,y) &= e^{-2y^2}\left(16y^3 - 12y\right)\sin x
\end{aligned}$$

   Hessematricen er altså

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -y\exp\left(-2y^2\right)\sin x & e^{-2y^2}\left(1-4y^2\right)\cos x \\ e^{-2y^2}\left(1-4y^2\right)\cos x & e^{-2y^2}\left(16y^3-12y\right)\sin x \end{pmatrix}$$

   Vi finder så

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

der har karakterligning $\lambda^2 - 1 = 0$. Egenværdierne er altså ± 1. De har altså modsat fortegn. $(0,0)$ er et saddelpunkt. Dernæst finder vi

$$H\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & -4\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

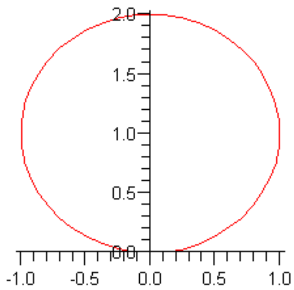
Egenværdierne for denne diagonalmatrix står i diagonalen. Da begge er negative, er $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et egentligt maksimumspunkt. Til sidst finder vi

$$H\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 4\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for denne diagonalmatrix står i diagonalen. Da begge er positive, er $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et egentligt minimumspunkt.

Opgave 6

1. Cirklen med ligningen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ er givet. Vi skal forklare, hvorfor den i polære koordinater kan beskrives ved ligningen $r = 2\sin\theta$.



Ved at gange ud fås

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

altså

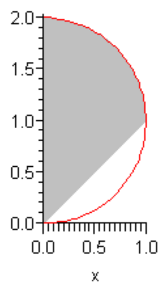
$$r^2 - 2r\sin\theta = 0$$

hvoraf fås $r = 2\sin\theta$.

2. Vi skal finde planintegralet

$$\iint_D xy dA$$

hvor integrationsområdet D er det område i første kvadrant, der ligger indenfor cirklen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ og mellem linierne $y = x$ og $x = 0$.



Integrationsområdet er skitseret.
I polære koordinater fås

$$
\begin{aligned}
\iint_D xydA &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 \cos\theta \sin\theta dr \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^5\theta d\theta = 4\left[\frac{1}{6}\sin^6\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

I cartesiske koordinater fås

$$
\begin{aligned}
\iint_D xydA &= \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} xydy \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(2-2x^2+2\sqrt{1-x^2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x - x^3 + x\sqrt{1-x^2}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$