

Skriftlig prøve i Matematik DiploMat 01905

onsdag den 17. maj 2006, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6

Tilladte hjælpemidler: Alle.

Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.

Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

På kuerten bedes med stor skrift anført retningsbetegnelse (B, E, IT, K eller M).

Opgave 1 (15 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Løs det homogene system $Ax = 0$.
2. Find en basis for nulrummet for A .
3. Find en basis for søjlerummet for A .

Opgave 2 (20 point).

I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
A:=Matrix([[5,-4,1,1],[8,-7,1,1],[16,-8,-1,2],[-18,9,4,1]]):  
CharacteristicPolynomial(A,lambda):  
factor(%);  
ReducedRowEchelonForm(A+3);  
ReducedRowEchelonForm(A-2);
```

Output fra Maple er i rækkefølge (og her adskilt af mellemrum i stedet for linieskift):

$$(\lambda + 3)^2 (\lambda - 2)^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I de følgende spørgsmål kan disse oplysninger benyttes.

1. Angiv egenverdierne for matricen A .
2. Find for hver egenverdi samtlige egenvektorer.
3. Afgør, om matricen A er diagonaliserbar.

Opgave 3 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 6x' + 58x = 116t + 13 \quad (*)$$

1. Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
2. Der er netop én løsning til (*), der har formen $x(t) = x_p(t) = at + b$, hvor a og b er konstanter. Bestem denne løsning. Angiv dernæst den fuldstændige løsning til (*).

Opgave 4 (10 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = \cosh(x-1) \cdot \ln x$$

Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for f , idet udviklingspunktet er 1.

Opgave 5 (20 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = ye^{-2y^2} \sin x$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Kontrollér, at $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$ og $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ er stationære punkter for f .
2. Bestem typen af de tre stationære punkter givet ovenfor.

Opgave 6 (20 point).

1. Cirklen med centrum i $(0, 1)$ og radius 1 har ligningen $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Forklar, hvorfor den i polære koordinater kan beskrives ved ligningen

$$r = 2 \sin \theta$$

2. Find planintegralet

$$\iint_D xy dA$$

hvor integrationsområdet D er det område i første kvadrant, der ligger indenfor cirklen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ og mellem y -aksen og linien $y = x$. Man kan frit vælge, om man vil udregne integralet ved brug af polære koordinater eller ved brug af rektangulære (cartesiske) koordinater.