DiploMat. Løsninger til skriftlig prøve foråret 2005

Preben Alsholm

23/5 2005

Opgave 1

Vi skal finde rødderne i polynomiet

$$\left(z^3+27i\right)\left(z^2+2z+2\right)$$

og indtegne deres placering i den komplekse plan. Rødderne skal angives *både* på rektangulær form *og* på polær form.
Polynomiet er nul netop hvis mindst én af faktorerne er nul. Derfor skal vi altså finde rødderne i polynomierne z^3+27i og z^2+2z+2. Det sidste polynomium er et andetgradspolynomium og rødderne er

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

Disse 2 rødder har modulus $|-1\pm i|=\sqrt{2}$ og argumenter $\arg(-1\pm i)=\pm\frac{3}{4}\pi$. Vi har dermed

$$-1\pm i=\sqrt{2}\exp\left(\pm\frac{3}{4}\pi i\right)$$

Det andet polynomium z^3+27i har rødder, der opfylder den binome ligning

$$z^3=-27i=27\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$$

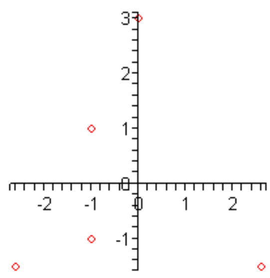
Rødderne er derfor givet ved

$$z=\sqrt[3]{27}\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p=0,1,2$. Vi finder derfor de 3 rødder til

$$\begin{aligned}
z_0 &= 3\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i\\
z_1 &= 3\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=3\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=3i\\
z_2 &= 3\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=3\exp\left(i\frac{7\pi}{6}\right)=3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i
\end{aligned}$$

Hermed er alle 5 rødder for det oprindelige polynomium fundet.



Opgave 2

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ -3x_1 & + & -2x_2 & + & (a-9)\,x_3 & = & 2-3a \\ 2x_1 & & & + & \left(a^2+2a+6\right)x_3 & = & 3a+1 \end{array} \tag{1}$$

hvor a er en konstant.

Ved input af følgende i Maple

```
with(LinearAlgebra):
T:=Matrix([[1,2,3,a],[-3,-2,a-9,2-3*a],[2,0,a^2+2*a+6,3*a+1]]):
GaussianElimination(T);
```

fås følgende output

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2+3a & a+3 \end{pmatrix}$$

Desuden giver inputtet

```
ReducedRowEchelonForm(T);
```

følgende output

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2a^2-a-6}{2a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Vi får at vide, at Maple under den *sidste* regning ikke har taget hensyn til eventuelle specialtilfælde for konstanten a, og vi skal finde løsningerne til ligningssystemet (1) for enhver værdi af a.

Vi ser af den Gausseliminerede version af totalmatricen, at systemet har præcis en løsning netop når $a^2+3a \neq 0$, dvs. netop når $a \neq 0 \wedge a \neq -3$. I så fald kan vi aflæse systemets løsning af outputtet fra ReducedRowEchelonform. Løsningen er altså for $a \neq 0 \wedge a \neq -3$:

$$x = \begin{pmatrix} \dfrac{2a^2-a-6}{2a} \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Vi må nu betragte de to resterende værdier af a.

Vi begynder med $a = 0$. Totalmatricen er nu efter Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sidste række svarer til ligningen $0x_3 = 3$. Systemet har altså ingen løsning for $a = 0$.

Lad nu $a = -3$. Totalmatricen Gausselimineret er nu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser, at x_3 er fri. Vi reducerer videre til reduceret echelonform. Operationerne $R_2 := \frac{1}{4}R_2$ og $R_1 := R_1 - 2R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{9}{2}x_3 &= -4 \\ x_2 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hermed fås

$$x = \begin{pmatrix} -4 - \frac{9}{2}x_3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor altså x_3 er fri.

Opgave 3

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal gøre rede for, at vektorerne

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   er egenvektorer for A, og finde de tilhørende egenværdier.
   Vi har

   $$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Hermed er vist, at de to vektorer er egenvektorer samt, at de tilhørende egnværdier er henholdsvis -3 og -2.

2. Vi skal finde den fuldstændige løsning til differentiallignings-systemet $\dot{x} = Ax$ og tillige finde den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Den fuldstændige løsning er givet ved

   $$x(t) = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   hvor $c_1, c_2 \in R$. Den løsning, der opfylder den givne begyndelsesbetingelse skal opfylde

   $$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Dette kan skrives

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Totalmatricen for dette ligningssystem er

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Herefter giver operationen $R_1 := R_1 - R_2$ matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Altså har vi fundet, at $c_1 = 4$ og $c_2 = -3$. Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen er altså

$$x(t) = 4e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-3t} - 3e^{-2t} \\ 12e^{-3t} - 12e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Opgave 4

Vi skal finde grænseværdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x\sin(x)}$$

Vi ser, at

$$\frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x\sin(x)} \to „\frac{0}{0}“$$

for $x \to 0$. Vi bruger l'Hospitals regel:

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\cos(x) - \exp(x^2)\right)}{\frac{d}{dx}\left(x\sin(x)\right)} = \frac{-\sin(x) - 2x\exp(x^2)}{\sin(x) + x\cos(x)} \to „\frac{0}{0}“$$

for $x \to 0$. Vi bruger igen l'Hospitals regel:

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(-\sin(x) - 2x\exp(x^2)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sin(x) + x\cos(x)\right)} = \frac{-\cos(x) - 2\exp(x^2) - 4x^2\exp(x^2)}{2\cos(x) - x\sin(x)} \to \frac{-3}{2}$$

for $x \to 0$. Derfor har vi, at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x\sin(x)} = -\frac{3}{2}$$

Opgave 5

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = y^2e^x - e^x - y^2$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Vi skal finde de stationære punkter for f, og for ethvert af disse bestemme, om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.

Vi finder de partielle afledede:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y^2e^x - e^x = e^x\left(y^2 - 1\right) \\ f_2(x,y) &= 2ye^x - 2y = 2y\left(e^x - 1\right) \end{aligned}$$

Hermed fås

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow y = \pm 1 \wedge (y = 0 \vee x = 0) \Longleftrightarrow y = \pm 1 \wedge x = 0$$

Der er altså to stationære punkter, nemlig $(0, \pm 1)$.
Hessematricen er

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} e^x (y^2 - 1) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2(e^x - 1) \end{pmatrix}$$

Hermed fås

$$H(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

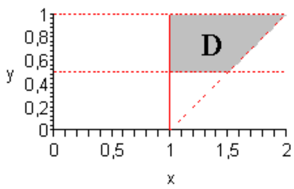
Denne matrix har determinant lig med -4, altså negativ. Dermed er den ene egenværdi positiv, den anden negativ: Punktet $(0,1)$ er et saddelpunkt.
For det andet punkt fås

$$H(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Denne matrix har samme determinant -4. Konklusionen er altså den samme som for det første punkt. Begge punkter er altså saddelpunkter.

Opgave 6

Området D i (x,y)-planen er begrænset af linierne $y = x - 1$, $\quad y = 1$, $\quad y = \frac{1}{2}$ og $x = 1$, som vist på figuren.



Vi skal udregne planintegralet

$$\iint_D \frac{2x-2}{y} dA$$

ved at omskrive det til et dobbeltintegral med passende valgt integrationsorden.
Vi har ved at dreje hovedet eller papiret:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{1}^{y+1} \frac{2x-2}{y} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{1}{y} (x^2 - 2x) \right]_1^{y+1} dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y} \left((y+1)^2 - 2(y+1) + 1 \right) dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$