Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

mandag den 23. maj 2005, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (15 point).

Find rødderne i polynomiet

$$\left(z^3+27i\right)\left(z^2+2z+2\right)$$

og indtegn deres placering i den komplekse plan. Rødderne skal angives *både* på rektangulær form *og* på polær form.

Opgave 2 (20 point).

Givet ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ -3x_1 & + & -2x_2 & + & (a-9)\,x_3 & = & 2-3a \\ 2x_1 & & & + & \left(a^2+2a+6\right)x_3 & = & 3a+1 \end{array} \tag{1}$$

hvor a er en konstant.

Ved input af følgende i Maple

```
with(LinearAlgebra):
T:=Matrix([[1,2,3,a],[-3,-2,a-9,2-3*a],[2,0,a^2+2*a+6,3*a+1]]):
GaussianElimination(T);
```

fås følgende output

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2+3a & a+3 \end{pmatrix}$$

Desuden giver inputtet

```
ReducedRowEchelonForm(T);
```

følgende output

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2a^2-a-6}{2a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Idet det oplyses, at Maple under den *sidste* regning ikke har taget hensyn til eventuelle specialtilfælde for konstanten a, skal man finde løsningerne til ligningssystemet (1) for enhver værdi af a.

Opgave 3 (20 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Gør rede for, at vektorerne
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
er egenvektorer for A, og find de tilhørende egenværdier.

2. Find ved brug af svaret på spørgsmål 1 den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\dot{x} = Ax$, altså til systemet
$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
Find tillige den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 4 (10 point).

Find grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x \sin(x)}$$

Opgave 5 (15 point).

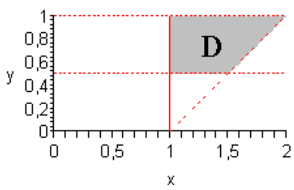
Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = y^2 e^x - e^x - y^2$$

for alle $(x, y) \in R^2$. Find de stationære punkter for f, og bestem for ethvert af disse, om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.

Opgave 6 (20 point).

Området D i (x, y)-planen er begrænset af linierne $y = x - 1$, $\quad y = 1$, $\quad y = \frac{1}{2}$ og $x = 1$, som vist på figuren.



Udregn planintegralet

$$\iint_D \frac{2x - 2}{y} dA$$

ved at omskrive det til et dobbeltintegral med passende valgt integrationsorden.