DiploMat
Løsninger til 4-timersprøven 4/6 2004

Preben Alsholm

4/6 2004

1 Opgave 1

Polynomiet p er givet ved

$$p(z) = z^8 - 6z^7 + 25z^6 + 64z^2 - 384z + 1600$$

Det oplyses, at polynomiet også kan skrives således

$$p(z) = \left(z^6 + 64\right)\left(z^2 - 6z + 25\right)$$

Vi skal finde polynomiets rødder på rektangulær form samt på en figur vise roddernes placering i den komplekse plan.

Rødderne er løsningerne til de to ligninger

$$\begin{aligned} z^6 + 64 &= 0 \\ z^2 - 6z + 25 &= 0 \end{aligned}$$

Den sidste er blot en andengradsligning og har rødderne

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

Den anden er en binom ligning. Vi har

$$z^6 = -64 = 64e^{i\pi}$$

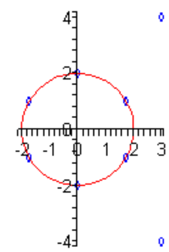
Så løsningerne er givet ved

$$z = \sqrt[6]{64}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + p\frac{2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{3}\right)}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Hermed finder vi

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i \\ z_1 &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \\ z_2 &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3} + i \\ z_3 &= \overline{z_2} = -\sqrt{3} - i \\ z_4 &= \overline{z_1} = -2i \\ z_5 &= \overline{z_0} = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Polynomiets rødder er derfor $3 \pm 4i, \sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i, \pm 2i$. Figur:



2 Opgave 2

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = \frac{1}{t(t+1)}$$

1. Vi skal først bestemne den fuldstændige løsning for $t > 0$. Ligningen er lineær og allerede normeret. Vi bruger Panserformlen og finder

   $$P(t) = \int p(t)\, dy = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$$

   således at $e^{P(t)} = e^{\ln t} = t$ og $e^{-P(t)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t}$. Hermed har vi

   $$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t}\int t \cdot \frac{1}{t(t+1)} dt + \frac{C}{t} \\ &= \frac{1}{t}\int \frac{1}{t+1} dt + \frac{C}{t} = \frac{1}{t}\ln(t+1) + \frac{C}{t} \end{aligned}$$

   hvor C er en arbitrær konstant.

2. Vi skal bestemme den løsning, der opfylder betingelsen $x(1) = \ln 2$. Ved indsættelse i den fuldstændige løsning fås

   $$\ln 2 = x(1) = \ln(2) + C$$

   Heraf findes $C = 0$, således at løsningen er

   $$x(t) = \frac{1}{t}\ln(t+1)$$

3. Vi skal bestemme grænseværdien

   $$\lim_{t \downarrow 0} x(t)$$

for den fundne løsning. Vi ser, at

$$\frac{\ln(t+1)}{t} \rightarrow "\frac{0}{0}"$$

for $t \downarrow 0$. Vi bruger l'Hospitals regel og finder

$$\frac{\frac{1}{t+1}}{1} \rightarrow 1$$

for $t \downarrow 0$. Derfor gælder, at $\lim_{t \downarrow 0} x(t) = 1$.

3 Opgave 3

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = -x^2 (y+1) + 8(x+y) y + 8x + y$$

for alle $(x, y) \in R^2$. I forbindelse med ekstremumsbestemmelse for funktionen f er der i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
f:=(x,y)->-x^2*(y+1)+8*(x+y)*y+8*x+y:
fx:=diff(f(x,y),x):
fy:=diff(f(x,y),y):
solve({fx=0,fy=0},{x,y});
```

og Maple viser resultatet

$$\{x = 3, y = -1\}, \left\{x = 4, y = -\frac{17}{16}\right\}, \{x = 5, y = -1\}$$

Herefter giver Maplekommandoerne

```
with(LinearAlgebra):
H:=unapply(VectorCalculus[Hessian](f(x,y),[x,y]),x,y):
Eigenvalues(H(3,-1));
Eigenvalues(H(4,-17/16));
```

følgende resultater

$$\begin{bmatrix} 8 + 2\sqrt{17} \\ 8 - 2\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Desuden giver den simple Maplekommando

```
H(5,-1);
```

resultatet

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$$

Vi skal angive de stationære punkter for f og bestemme deres type ud fra de givne oplysninger.

Da Mapleoplysningerne viser, at

$$f_x(x,y) = 0 \wedge f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (3,-1) \vee (x,y) = \left(4, -\frac{17}{16}\right) \vee (x,y) = (5,-1)$$

er de stationære punkter for f altså $(3,-1)$, $\left(4,-\frac{17}{16}\right)$ og $(5,-1)$.

Ifølge Maple er egenværdierne for Hessematricen i punktet $(3,-1)$ tallene $8 \pm 2\sqrt{17}$. Den ene egenværdi er derfor positiv, den anden negativ, så punktet $(3,-1)$ er et (egentligt) saddelpunkt.

Ifølge Maple er egenværdierne for Hessematricen i punktet $\left(4,-\frac{17}{16}\right)$ tallene 16 og $\frac{1}{8}$. Begge egenværdier er altså positive, så punktet $\left(4,-\frac{17}{16}\right)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt.

Ifølge Maple er Hessematricen i punktet $(5,-1)$ givet ved

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu enten bestemme egenværdierne for denne matrix, eller vi kan nøjes med at finde dens determinant og spor. Vi prøver begge metoder. Determinanten er $\det H = -4 < 0$, så produktet af egenværdierne er negativt. Altså er den ene positiv og den anden negativ: Punktet $(5,-1)$ er et (egentligt) saddelpunkt.

Egenværdierne er løsning til

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dvs. $\lambda^2 - 16\lambda - 4 = 0$. Løsningerne er $8 \pm 2\sqrt{17}$. Den ene egenværdi er derfor positiv, den anden negativ, så punktet $(5,-1)$ er et (egentligt) saddelpunkt.

4 Opgave 4

Eksekvering af Maplekommandoerne

```
ligning:=diff(x(t),t,t)+4*diff(x(t),t)+13*x(t)=(11+5*t)*exp(-t):
dsolve({ligning,x(0)=1,D(x)(0)=-1/2});
```

giver som resultat

$$x(t) = \frac{1}{2}(2+t)e^{-t}$$

1. Vi skal udnytte dette resultat til at finde den fuldstændige løsning til differentialligningen

   $$x'' + 4x' + 13x = (11+5t)e^{-t}$$

   Vi kender altså en partikulær løsning til den inhomogene ligning, nemlig $\frac{1}{2}(2+t)e^{-t}$ og mangler derfor kun den fuldstændige løsning til den homogene ligning

   $$x'' + 4x' + 13x = 0$$

Karakterligningen er

$$R^2 + 4R + 13 = 0$$

Løsningerne er $R = -2 \pm 3i$. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \sin(3t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Altså er den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

$$x(t) = \frac{1}{2}(2+t)e^{-t} + c_1 e^{-2t} \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \sin(3t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

2. Lad $x = f(t)$ være den løsning til differentialligningen, der opfylder betingelserne $f(0) = 1$ og $f'(0) = 1$. Vi skal bestemme det 3. Taylorpolynomium $P_3(t)$ med udviklingspunkt $t = 0$ for løsningen $f(t)$. Vi vælger at gøre det direkte ud fra differentialligningen. Polynomiet er givet ved

$$P_3(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)t^3$$

Her er $f(0) = 1$ og $f'(0) = 1$ jo givet, mens $f''(0)$ kan findes direkte ved indsættelse af $x = f(t)$ og $t = 0$ i differentialligningen:

$$f''(0) + 4f'(0) + 13f(0) = 11$$

Heraf findes $f''(0) = -6$. Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''' + 4x'' + 13x' = 5e^{-t} - (11+5t)e^{-t} = (-6-5t)e^{-t}$$

Ved indsættelse af $x = f(t)$ og $t = 0$ heri fås:

$$f'''(0) + 4f''(0) + 13f'(0) = -6$$

Heraf fås $f'''(0) = 5$. Altså har vi

$$P_3(t) = 1 + t - 3t^2 + \frac{5}{6}t^3$$

5 Opgave 5

1. Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & & & x_3 & & & = 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 4 \\ -x_1 & + & & & x_3 & & & = 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 2 \end{array}$$

men vi skal også betragte systemet i spørgsmål 2. Det første system fås ud fra det andet ved at sætte $a = 1$. De indledende regninger bliver derfor udført for generelt a. Totalmatricen er

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & a^2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Vi laver Gausselimination. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_1, R_3 := R_3 + R_1, R_4 := R_4 + R_1$ giver matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & a^2 & a+4 \end{bmatrix}$$

Herefter giver rækkeoperationen $R_4 := R_4 - R_2$ matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & a^2 - a & a+3 \end{bmatrix}$$

Endelig giver operationen $R_4 := R_4 - R_3$ matricen

$$T_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a & a-1 \end{bmatrix}$$

For at løse spørgsmål 1, sætter vi nu $a = 1$ i T_G. Herved fås matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_3 := \frac{1}{2}R_3$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operationerne $R_2 := R_2 - 3R_3, R_1 := R_1 - R_3$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= -5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Vi sætter $x_4 = t$ og finder løsningerne til ligningssystemet til

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -5-t \\ 2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in R$.

2. Vi skal for enhver værdi af a angive, om ligningssystemet

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & & & x_3 & & & = 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & ax_4 & = 4 \\ -x_1 & + & & & x_3 & & & = 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & a^2x_4 & = a+1 \end{array}$$

har én løsning, uendeligt mange løsninger eller ingen løsning. Totalmatricen blev ovenfor reduceret til

$$T_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a & a-1 \end{bmatrix}$$

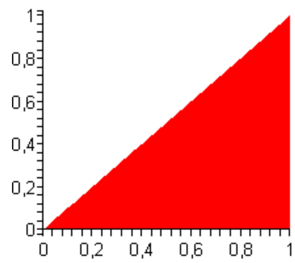
Heraf ses, at hvis $a^2 - a \neq 0$, dvs. hvis $a \neq 0$ og også $\neq 1$, så har systemet præcis én løsning. Hvis $a = 0$, så har systemet ingen løsning, da sidste række svarer til ligningen $0 = -1$. Hvis $a = 1$, så har systemet uendeligt mange løsninger, og disse fandt vi i øvrigt under punkt 1.

6 Opgave 6

Der er givet planintegralet

$$\iint\limits_S 2xe^y dA$$

hvor S er det trekantede område i xy-planen, der begrænses af linierne $y = x$, $x = 1$ og x-aksen. Vi skal omskrive planintegralet til et dobbeltintegral på to måder og udregne det af de to dobbeltintegraler, der forekommer lettest at udregne.



Vi finder først

$$\iint\limits_S 2xe^y dA = \int_0^1 \left(\int_0^x 2xe^y dy \right) dx$$

og med omvendt integrationsorden

$$\iint\limits_S 2xe^y dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 2xe^y dx \right) dy$$

Vi prøver at udregne begge dobbeltintegraler. Det første:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x 2xe^y dy \right) dx &= \int_0^1 [2xe^y]_0^x \, dx = \int_0^1 (2xe^x - 2x) \, dx \\ &= \left[2xe^x - 2e^x - x^2\right]_0^1 = 2e - 2e - 1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Det andet

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_y^1 2xe^y dx \right) dy &= \int_0^1 \left[x^2 e^y\right]_y^1 dy = \int_0^1 \left(e^y - y^2 e^y\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(e^y - y^2 e^y\right) dy = \left[-y^2 e^y + 2ye^y - e^y\right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$