DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

Fredag den 4. juni 2004, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (15 point).

Polynomiet p er givet ved

$$p(z) = z^8 - 6z^7 + 25z^6 + 64z^2 - 384z + 1600$$

Det oplyses, at polynomiet også kan skrives således

$$p(z) = \left(z^6 + 64\right)\left(z^2 - 6z + 25\right)$$

Find polynomiets rødder på rektangulær form. Vis på en figur roddernes placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = \frac{1}{t(t+1)}$$

1. Bestem den fuldstændige løsning for $t > 0$.
2. Bestem den løsning, der opfylder betingelsen $x(1) = \ln 2$.
3. Bestem grænseværdien
$$\lim_{t \downarrow 0} x(t)$$
for den fundne løsning.

Opgave 3 (15 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = -x^2(y+1) + 8(x+y)y + 8x + y$$

for alle $(x,y) \in R^2$. I forbindelse med ekstremumsbestemmelse for funktionen f er der i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
f:=(x,y)->-x^2*(y+1)+8*(x+y)*y+8*x+y:
fx:=diff(f(x,y),x):
fy:=diff(f(x,y),y):
solve({fx=0,fy=0},{x,y});
```

og Maple viser resultatet

$$\{x=3, y=-1\}, \left\{x=4, y=-\frac{17}{16}\right\}, \{x=5, y=-1\}$$

Herefter giver Maplekommandoerne

```
with(LinearAlgebra):
H:=unapply(VectorCalculus[Hessian](f(x,y),[x,y]),x,y):
Eigenvalues(H(3,-1));
Eigenvalues(H(4,-17/16));
```

følgende resultater

$$\begin{bmatrix} 8+2\sqrt{17} \\ 8-2\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Desuden giver den simple Maplekommando

```
H(5,-1);
```

resultatet

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$$

Angiv de stationære punkter for f og bestem deres type ud fra de givne oplysninger.

Opgave 4 (20 point).

Eksekvering af Maplekommandoerne

```
ligning:=diff(x(t),t,t)+4*diff(x(t),t)+13*x(t)=(11+5*t)*exp(-t):
dsolve({ligning,x(0)=1,D(x)(0)=-1/2});
```

giver som resultat

$$x(t) = \frac{1}{2}(2+t)\,e^{-t}$$

1. Udnyt dette resultat til at finde den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$x'' + 4x' + 13x = (11+5t)\,e^{-t}$$

2. Lad $x = f(t)$ være den løsning til differentialligningen, der opfylder betingelserne $f(0) = 1$ og $f'(0) = 1$. Bestem det 3. Taylorpolynomium $P_3(t)$ med udviklingspunkt $t = 0$ for løsningen $f(t)$.

Opgave 5 (20 point).

1. Løs ligningssystemet
$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & & & x_3 & & & = 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 4 \\ -x_1 & + & & & x_3 & & & = 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 2 \end{array}$$

2. Angiv for enhver værdi af a, om ligningssystemet
$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & & & x_3 & & & = 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & ax_4 & = 4 \\ -x_1 & + & & & x_3 & & & = 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & a^2x_4 & = a+1 \end{array}$$
har én løsning, uendeligt mange løsninger eller ingen løsning.

Opgave 6 (15 point).

Der er givet planintegralet

$$\iint_S 2xe^y dA$$

hvor S er det trekantede område i xy-planen, der begrænses af linierne $y = x$, $x = 1$ og x-aksen. Omskriv planintegralet til et dobbeltintegral på to måder. Udregn det af de to dobbeltintegraler, der forekommer lettest at udregne.