DiploMat
Løsninger til 4-timersprøven 10/12 2007

Preben Alsholm

3/12 2007

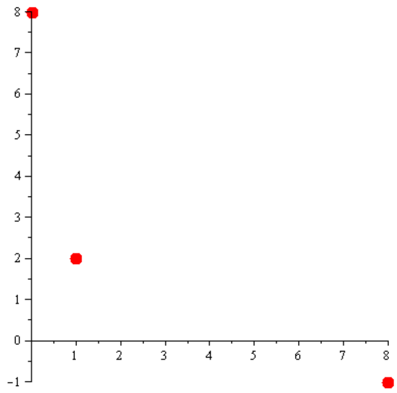
Opgave 1

1. Vi skal tegne tallene

$$1+2i, \qquad (2+i)(3-2i), \qquad e^{\ln(8)+i\frac{\pi}{2}}$$

i den komplekse plan. Det hjælper unægteligt at simplificere først:

$$(2+i)(3-2i) = 8-i, \qquad e^{\ln(8)+i\frac{\pi}{2}} = 8i$$



2. Vi skal finde samtlige komplekse løsninger til den binome ligning

$$z^3 = e^{\ln(8)+i\frac{\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

på rektangulær form. Vi finder

$$z = \sqrt[3]{8}\exp\left(i\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{3}\right) = 2\exp\left(i\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{3}\right) \text{ hvor } p=0,1,2$$

Hermed fås de 3 rødder

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i \\ z_1 &= 2\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i \\ z_2 &= 2\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \end{aligned}$$

Opgave 2

Matricen A og vektoren b er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & -1 \\ -2 & -2 & -18 \\ -1 & -8 & 19 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

1. Vi løser ligningssystemet $Ax = b$. Totalmatricen er

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -18 & 2 \\ -1 & -8 & 19 & -6 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 3R_1, R_3 := R_3 + 2R_1, R_4 := R_4 + R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -16 & 4 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \end{bmatrix}$$

Herefter giver rækkeoperationerne $R_3 := R_3 - 4R_2, R_4 := R_4 + 5R_2$ matricen på echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser, at x_3 er fri. Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Heraf fås ved løsning nedefra

$$x = \begin{bmatrix} -2 - 13x_3 \\ 1 + 4x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -13 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $x_3 \in \mathbb{R}$ er fri.

2. Vi kan nu let angive en basis for søjlerummet for matricen A og en basis for nulrummet for A. En basis for søjlerummet fås ved at tage pivoteringssøjlerne i A. Disse er åbenbart de to første ifølge resultatet af Gausseliminationen af T ovenfor (der jo samtidigt Gausseliminerede A). En basis for søjlerummet er derfor

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$$

En basis for nulrummet for A kan aflæses fra resultatet af løsningen af $Ax = b$ idet vi kun tager den del af løsningen, der afhænger af x_3. En basis er derfor

$$\left\{ \begin{bmatrix} -13 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 3

Der er givet differentialligningen

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 144\,t\,e^t \tag{*}$$

1. Vi finder den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning

   $$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

   Karakterligningen er

   $$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

   der har rødderne -2 og -3. Derfor er den fuldstændige løsning

   $$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

   hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Differentialligningen (*) har en partikulær løsning af formen $x_p(t) = a\,e^t + b\,t\,e^t$. Denne finder vi ved indsættelse i (*):

   $$\frac{d^2}{dt^2}\left(a\,e^t + b\,t\,e^t\right) + 5\frac{d}{dt}\left(a\,e^t + b\,t\,e^t\right) + 6\left(a\,e^t + b\,t\,e^t\right) = 144\,t\,e^t$$

   Efter differentiation fås

   $$12bte^t + (12a + 7b)\,e^t = 144\,t\,e^t$$

   der skal gælde for alle $t \in \mathbb{R}$. Derfor må vi forlange, at $12b = 144$ og $12a + 7b = 0$. Dermed fås $b = 12$ og $a = -7$. Den fuldstændige løsning til (*) er dermed

   $$x(t) = -7e^t + 12te^t + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

   hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Vi finder den løsning til differentialligningen (*) som opfylder begyndelsesbetingelserne $x(0) = 5$ og $x'(0) = 0$. Ved differentiation fås

   $$x'(t) = 5e^t + 12te^t - 2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$$

   Hermed fås

   $$\begin{aligned} 5 &= x(0) = -7 + c_1 + c_2 \\ 0 &= x'(0) = 5 - 2c_1 - 3c_2 \end{aligned}$$

   altså

   $$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 12 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 5 \end{aligned}$$

   dvs. $c_1 = 31$ og $c_2 = -19$. Løsningen er derfor

   $$x(t) = -7e^t + 12te^t + 31e^{-2t} - 19e^{-3t}$$

Opgave 4

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y, z) = \left(e^{\sqrt{5}y} - \sqrt{5}y + (x+y)^3 - 3(x+y)\right) e^{-(z-2)^2}$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Med henblik på at bestemme lokale ekstremumspunkter for f er i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
f:=(x,y,z) -> (exp(sqrt(5)*y)-sqrt(5)*y+(x+y)^3-3*(x+y))*exp(-(z-2)^2):
solve({diff(f(x,y,z),x)=0,diff(f(x,y,z),y)=0,diff(f(x,y,z),z)=0},[x,y,z]);
```

Maple svarer herpå

$$[[x=-1,y=0,z=2],[x=1,y=0,z=2]]$$

Herefter er indtastet kommandoerne

```
Hesse:=VectorCalculus[Hessian]:
H:=unapply(Hesse(f(x,y,z),[x,y,z]),x,y,z):
H(-1,0,2), H(1,0,2);
```

og Maple svarer

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I det følgende benyttes disse oplysninger.

1. Punkterne $(-1,0,2)$ og $(1,0,2)$ er stationære punkter for f fordi de partielle afledede af første orden alle er nul i disse punkter, jf. solve-kommandoen.

2. Punktet $(-1,0,2)$ har Hessematricen $H(-1,0,2)$. Vi finder egenværdierne:

$$\begin{aligned}\det\left(H(-1,0,2)-\lambda I\right) &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & -6 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -6 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-6-\lambda)\left(\lambda^2+7\lambda-30\right) = -(6+\lambda)(\lambda+10)(\lambda-3)\end{aligned}$$

   Egenværdierne er altså $-6,-10$ og 3. Begge fortegn er repræsenterede så punktet er et saddelpunkt.
   Punktet $(1,0,2)$ har Hessematricen $H(1,0,2)$. Vi finder egenværdierne:

$$\begin{aligned}\det\left(H(-1,0,2)-\lambda I\right) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 11-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2-17\lambda+30\right) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-15)\end{aligned}$$

   Egenværdierne er altså 2 (med algebraisk multiplicitet 2) og 15. Egenværdierne er alle positive, så punktet er et egentligt lokalt minimumspunkt.

3. En af egenværdierne for matricen $H(1,0,2)$ er som vi så 2. Vi finder samtlige egenvektorer hørende til denne egenværdi. Egenvektorerne x skal opfylde $(A-2I)x=0$. Totalmatricen for dette homogene system er

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Rækkeoperationerne $R_1 := \frac{1}{2}R_1$ og $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Det tilsvarende ligningssystem er blot ligningen $2x_1+3x_2=0$. Både x_2 og x_3 er frie variable. Hermed fås

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   hvor $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Opgave 5

Vi finder det 3. Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x'(t) = -t + x(t)^2$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$.
Polynomiet er givet ved

$$P_3(t) = x(0) + x'(0)\,t + \frac{1}{2}x''(0)\,t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)\,t^3$$

Vi observerer først, at $x'(0) = x(0)^2 = 1$. Vi differentierer differentialligningen et par gange

$$\begin{aligned} x''(t) &= -1 + 2x(t)\,x'(t) \\ x'''(t) &= 2\left(x'(t)\right)^2 + 2x(t)\,x''(t) \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $t = 0$ i den første fås $x''(0) = -1 + 2x(0)\,x'(0) = 1$. Indsættelse i den anden giver $x'''(0) = 2\left(x'(0)\right)^2 + 2x(0)\,x''(0) = 4$. Altså

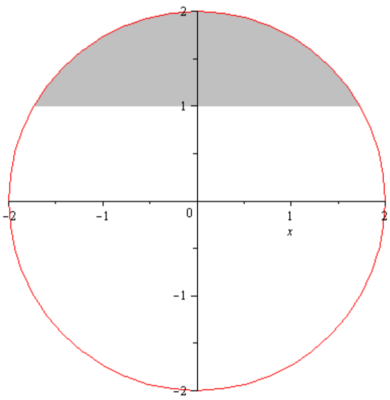
$$P_3(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3$$

Opgave 6

Lad D være mængden af de punkter i $\mathbb{R}^2$ som ligger indenfor cirklen $x^2 + y^2 = 4$ og over linien $y = 1$, dvs.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ og } y \geq 1\}$$

1. En skitse af D fra Maple:



2. Skæringspunkterne mellem $y = 1$ og cirklen $x^2 + y^2 = 4$ er $\left(\pm\sqrt{3}, 1\right)$. Arealet af D kan findes således

$$\begin{aligned} \iint_D 1\, dA &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [y]_1^{\sqrt{4-x^2}}\, dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - x^2} - 1\right) dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) - x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Det bør bemærkes, at arealet selvfølgelig også kan udregnes på elementær vis ved brug af geometri.

3. Vi finder planintegralet $\iint_D 4y\, dA$. Grænserne er jo som før, så vi får

$$\begin{aligned}\iint_D 4y\, dA &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_1^{\sqrt{4-x^2}} 4y dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[2y^2\right]_1^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(3-x^2\right) dx = 2\left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

Integralerne kan udregnes i polære koordinater, men det er næppe en fordel. Her udregner vi eksempelvist det sidste, idet vi benytter, at $y = 1$ i polære koordinater er $r = \frac{1}{\sin\theta}$.

$$\begin{aligned}\iint_D 4y\, dA &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} 4r\sin\theta \cdot r dr = \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \left[r^3\right]_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} d\theta \\ &= \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(8\sin\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) d\theta = \frac{4}{3}\left[-8\cos\theta + \cot\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= 8\sqrt{3}\end{aligned}$$