Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
DiploMat 01905

mandag den 10. december 2007, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.
På kuverten bedes med stor skrift anført holdbetegnelse (Byg+IT, Elektro+Kemi+TekØ eller Maskin).

Opgave 1 (15 point).

1. Tegn tallene
$$1+2i, \qquad (2+i)(3-2i), \qquad e^{\ln(8)+i\frac{\pi}{2}}$$
i den komplekse plan.

2. Find samtlige komplekse løsninger til den binome ligning
$$z^3 = e^{\ln(8)+i\frac{\pi}{2}}$$
Rødderne skal angives på rektangulær form.

Opgave 2 (15 point).

Matricen A og vektoren b er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & -1 \\ -2 & -2 & -18 \\ -1 & -8 & 19 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

1. Løs ligningssystemet $Ax = b$.

2. Angiv en basis for søjlerummet for matricen A og en basis for nulrummet for A.

Opgave 3 (20 point).

Der er givet differentialligningen

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 144\, t\, e^t \qquad (*)$$

1. Find den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

2. Differentialligningen (*) har en partikulær løsning af formen $x_p(t) = a\, e^t + b\, t\, e^t$. Find denne og angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen (*).

3. Find den løsning til differentialligningen (*) som opfylder begyndelsesbetingelserne $x(0) = 5$ og $x'(0) = 0$.

Opgave 4 (20 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y,z) = \left(e^{\sqrt{5}y} - \sqrt{5}y + (x+y)^3 - 3(x+y)\right) e^{-(z-2)^2}$$

for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Med henblik på at bestemme lokale ekstremumspunkter for f er i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
f:=(x,y,z) -> (exp(sqrt(5)*y)-sqrt(5)*y+(x+y)^3-3*(x+y))*exp(-(z-2)^2):
solve({diff(f(x,y,z),x)=0,diff(f(x,y,z),y)=0,diff(f(x,y,z),z)=0},[x,y,z]);
```

Maple svarer herpå

$$[[x=-1, y=0, z=2], [x=1, y=0, z=2]]$$

Herefter er indtastet kommandoerne

```
Hesse:=VectorCalculus[Hessian]:
H:=unapply(Hesse(f(x,y,z),[x,y,z]),x,y,z):
H(-1,0,2), H(1,0,2);
```

og Maple svarer

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I det følgende kan disse oplysninger benyttes.

1. Forklar kort, hvorfor $(-1,0,2)$ og $(1,0,2)$ er stationære punkter for f.
2. Afgør for ethvert af de to stationære punkter om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.
3. En af egenværdierne for matricen $H(1,0,2)$ er 2. Find samtlige egenvektorer hørende til denne egenværdi.

Opgave 5 (15 point).

Find det 3. Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x'(t) = -t + x(t)^2$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$.

Opgave 6 (15 point).

Lad D være mængden af de punkter i $\mathbb{R}^2$ som ligger indenfor cirklen $x^2 + y^2 = 4$ og over linien $y = 1$, dvs.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ og } y \geq 1\}$$

1. Skitsér D.
2. Find arealet af D.
3. Find planintegralet

$$\iint_D 4y \, dA$$