DiploMat. Løsninger til skriftlig prøve december 2006

Preben Alsholm

16. december 2006

Opgave 1

Vi skal løse ligningen

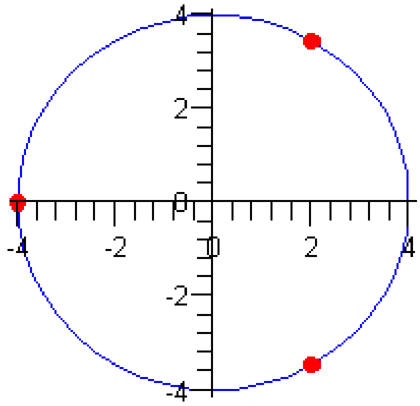
$$\frac{z^3+65-64i}{z^3-i}=i$$

og angive røddernes placering i den komplekse plan.
Vi har

$$\begin{aligned}\frac{z^3+65-64i}{z^3-i} &= i \Leftrightarrow z^3+65-64i=i\left(z^3-i\right)\\ &\Leftrightarrow z^3(1-i)=-64+64i\\ &\Leftrightarrow z^3=\frac{-64+64i}{1-i}=\frac{(-64+64i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\ &\Leftrightarrow z^3=\frac{-128}{2}=-64\end{aligned}$$

Vi skal altså løse den binome ligning $z^3=-64$. Men én løsning er klart $z_1=-4$. De to andre fås derfor som følger

$$\begin{aligned}z_2 &= -4e^{i\frac{2\pi}{3}}=-4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2-2i\sqrt{3}\\ z_3 &= -4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{z_2}=2+2i\sqrt{3}\end{aligned}$$



Opgave 2

Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -6 & 12 & -10 & -21 \end{bmatrix}$$

Vi skal løse det homogene system $Ax = 0$ og angive en basis for nulrummet for A og en basis for søjlerummet for A.
For systemet $Ax = 0$ har vi totalmatricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 7 & 0 \\ -6 & 12 & -10 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi udfører Gausselimination. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 2R_1$ og $R_3 := R_3 + 6R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Herefter giver $R_3 := R_3 + 4R_2$ matricen på echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan allerede nu se, at x_2 er fri. Vi fortsætter dog til reduceret echelonform. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_3$ og $R_1 - 3R_3$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Endelig bringer operationen $R_1 := R_1 - R_2$ matricen på reduceret echelonform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Som sagt er x_2 fri så vi får

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med $x_2 \in R$.

En basis for nulrummet for A udgøres dermed af vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. En basis for søjlerummet udgøres af de søjler i A, der er pivoteringssøjler, dvs. søjlerne 1, 3 og 4, altså er en basis for søjlerummet

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -21 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi kunne også have argumenteret således: Da søjlerummets dimension er lig med antal søjler i A $-\dim N(A) = 4 - 1 = 3$, og da søjlerne ligger i R^3, kan en basis vælges som 3 vilkårlige lineært uafhængige vektorer, f.eks. kunne vi vælge den kanoniske basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 3

Vi skal finde det 3. Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x'(t) = (t+1)\,x(t) + \cos t$$

der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$.
Vi har

$$P_3(t) = x(0) + x'(0)\,t + \frac{1}{2}x''(0)\,t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)\,t^3$$

$x(0)$ er jo opgivet. $x'(0)$ findes ved indsættelse af $t = 0$ i differentialligningen:

$$x'(0) = x(0) + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = x(t) + (t+1)\,x'(t) - \sin t$$

Ved indsættelse af $t = 0$ her i opnås

$$x''(0) = x(0) + x'(0) - \sin 0 = 1 + 2 = 3$$

Endnu en differentiation giver

$$x'''(t) = 2x'(t) + (t+1)\,x''(t) - \cos t$$

Ved indsættelse af $t = 0$ her i opnås

$$x'''(0) = 2x'(0) + x''(0) - \cos 0 = 4 + 3 - 1 = 6$$

Altså

$$P_3(t) = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + t^3$$

Opgave 4

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vi skal gøre rede for, at vektorerne

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A, og finde de tilhørende egenværdier.
Vi har

$$Au = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} = -3u$$

så vektoren u er egenvektor hørende til egenværdien -3. Tilsvarende fås

$$Av = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -v$$

så vektoren v er egenvektor hørende til egenværdien -1.

2. A har en tredie egenværdi. Vi skal finde denne og bestemme en dertil hørende egenvektor. Egenværdien er let bestemt, hvis man ved, at sporet er lig med summen af egenværdierne:

$$Spor\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Sporet er summen af diagonalelementerne, dvs. $-1 - 6 + 1 = -6$. Desuden har vi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3 - 1 + \lambda_3$, men så fås $\lambda_3 = -2$. Den tredie egenværdi kan naturligvis også bestemmes udfra karakterpolynomiet som er $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6 = -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$.
Egenvektorerne hørende til egenværdien -2 opfylder $(A + 2I)\,x = 0$. Totalmatricen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_2 := R_2 - 2R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Derefter giver $R_3 := R_3 - \frac{1}{2}R_2$ matricen på echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er $x_1 = 0, -4x_2 + 6x_3 = 0$, hvor x_3 er fri. Løsningerne er

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for egenrummet består af vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Find ved brug af svarene på spørgsmål 1 og 2 den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\dot{x} = Ax$.
Da A åbenbart er diagonaliserbar (3 indbyrdes forskellige egenværdier) er den fuldstændige løsning givet ved

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in R$.

Opgave 5

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{2x}{1+2x^2+2xy+y^2}$$

for alle $(x,y) \in R^2$.

1. Vi skal kontrollere, at $(1,-1)$ og $(-1,1)$ er stationære punkter for f.
   Vi finder

   $$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{2\left(1-2x^2+y^2\right)}{\left(1+2x^2+2xy+y^2\right)^2} \\ f_2(x,y) &= -\frac{4x(x+y)}{\left(1+2x^2+2xy+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

   Ved indsættelse her i fås

   $$\begin{aligned} f_1(1,-1) &= f_2(1,-1) = 0 \\ f_1(-1,1) &= f_2(-1,1) = 0 \end{aligned}$$

   hvilket viser, at punkterne $(1,-1)$ og $(-1,1)$ er stationære punkter for f.

2. Maplekommandoerne
   ```
   f:=(x,y)->2x/(1+2*x^2+2*x*y+y^2):
   H:=unapply(VectorCalculus[Hessian](f(x,y),[x,y]),x,y):
   H(1,-1),H(-1,1);
   ```
   resulterer i følgende output

   $$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

På dette grundlag skal vi bestemme typen af de to stationære punkter.
Vi har jo fået de to Hessematricer forærende. Vi finder

$$\det(H(1,-1)) = 1, Spor(H(1,-1)) = -3$$

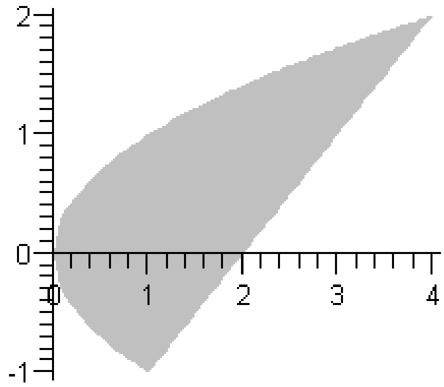
Heraf følger, at egenværdierne begge er negative. Altså er $(1,-1)$ et egentligt lokalt maksimumspunkt.
For det andet punkt fås

$$\det(H(-1,1)) = 1, Spor(H(-1,1)) = 3$$

Heraf følger, at egenværdierne begge er positive. Altså er $(-1,1)$ et egentligt lokalt minimumspunkt.

Opgave 6.

1. Lad D være det begrænsede område i planen, der afgrænses af parablen $x = y^2$ og linien $x = y + 2$. Vi skal skitsere D.



2. Vi skal finde planintegralet

$$\iint_D \left(6x - 3y^2\right) dA$$

Vi finder y-koordinaterne for skæringspunkterne mellem linien og parablen: Vi skal løse $y^2 = y + 2$, dvs. $y^2 - y - 2 = 0$. Rødderne er -1 og 2. Vi dreger hovedet og får

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(6x - 3y^2\right) dA &= \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} \left(6x - 3y^2\right) dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[3x^2 - 3xy^2\right]_{y^2}^{y+2} dy \\
&= 3 \int_{-1}^{2} \left(-y^3 - y^2 + 4y + 4\right) dy \\
&= 3 \left[-\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 + 4y\right]_{-1}^{2} = \frac{135}{4}
\end{aligned}$$