Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
DiploMat 01905

lørdag den 16. december 2006, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

På kuverten bedes med stor skrift anført retningsbetegnelse (Byg, Elektro, IT, Kemi, Maskin, TekØ/IT, eller TekØ/Kemi) og klasse (A eller B).

Opgave 1 (15 point).

Løs ligningen

$$\frac{z^3 + 65 - 64i}{z^3 - i} = i$$

Rødderne skal angives på rektangulær form. Angiv röddernes placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (15 point).

Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -6 & 12 & -10 & -21 \end{bmatrix}$$

Løs det homogene system $Ax = 0$ og angiv en basis for nulrummet for A og en basis for søjlerummet for A.

Opgave 3 (15 point).

Find det 3. Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x'(t) = (t+1)\,x(t) + \cos t$$

der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$.

Opgave 4 (20 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Gør rede for, at vektorerne
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
er egenvektorer for A, og find de tilhørende egenværdier.

2. A har en tredie egenværdi. Find denne og bestem en dertil hørende egenvektor.

3. Find ved brug af svarene på spørgsmål 1 og 2 den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\dot{x} = Ax$.

Opgave 5 (20 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = \frac{2x}{1 + 2x^2 + 2xy + y^2}$$

for alle $(x, y) \in R^2$.

1. Kontrollér, at $(1, -1)$ og $(-1, 1)$ er stationære punkter for f.

2. Maplekommandoerne
```
f:=(x,y)->2x/(1+2*x^2+2*x*y+y^2):
H:=unapply(VectorCalculus[Hessian](f(x,y),[x,y]),x,y):
H(1,-1),H(-1,1);
```
resulterer i følgende output
$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem på grundlag heraf typen af de to stationære punkter givet ovenfor.

Opgave 6 (15 point).

1. Lad D være det begrænsede område i planen, der afgrænses af parablen $x = y^2$ og linien $x = y + 2$. Skitsér D.

2. Find planintegralet
$$\iint_D \left(6x - 3y^2\right) dA$$