DiploMat 4-timersprøve: Løsninger

Preben Alsholm

8. december 2005

Opgave 1 Maplekommandoen
`combine(sin(x)^2*cos(3*x)`giver som resultat

$$\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(5x)$$

1. Vi skal vise, at dette resultat er korrekt ved at bruge Eulers formler:
   Vi finder

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2\cos(3x) &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^2 \frac{1}{2}\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}\right)\frac{1}{2}\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i5x} + e^{-i5x} - 2e^{3ix} - 2e^{-3ix} + e^{ix} + e^{-ix}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cos(5x) + \frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

2. Vi skal udnytte Maple-resultatet til at finde integralet

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos(3x)\, dx$$

   Vi finder

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos(3x)\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(5x)\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(x) - \frac{1}{20}\sin(5x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\left(\frac{1}{6}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{20}\sin\left(5\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{14}{15}
\end{aligned}$$

Opgave 2 I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
A:=Matrix([[4,1,26],[-1,6,12],[0,0,-2]]):
Determinant(A-lambda*IdentityMatrix(3)):
factor(%);
NullSpace(A+2);
```

Output fra Maple er

$$-(2+\lambda)(\lambda-5)^2$$

$$\left\{\begin{bmatrix}-4\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

I de følgende spørgsmål kan disse oplysninger benyttes.

1. Vi skal finde egenværdierne for matricen A. Af karakterpolynomiet på den faktoriserede form $-(2+\lambda)(\lambda-5)^2$ ses umiddelbart, at egenværdierne for A er 5 og -2. Den sidste med algebraisk multiplicitet 2.

2. Vi skal for hver egenværdi finde samtlige egenvektorer. Vi ser af det sidste Maple-resultat, at en basis for nulrummet for matricen $A+2I$ er vektoren
$$\begin{bmatrix}-4\\-2\\1\end{bmatrix}$$
dvs. at samtlige egenvektorer hørende til egenværdien -2 er givet ved
$$t\begin{bmatrix}-4\\-2\\1\end{bmatrix}$$
hvor $t \in R$, men $t \neq 0$.
Vi skal bestemme egenvektorerne hørende til egenværdien 5 og betragter derfor systemet $(A-5I)\,v=0$. Totalmatricen for dette system er
$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 26 & 0\\-1 & 1 & 12 & 0\\0 & 0 & -7 & 0\end{bmatrix}$$
Rækkeopertionen $R_2 := R_2 - R_1$ giver
$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 26 & 0\\0 & 0 & -14 & 0\\0 & 0 & -7 & 0\end{bmatrix}$$
Herefter giver operationen $R_3 := R_3 - \frac{1}{2}R_2$ resultatet
$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 26 & 0\\0 & 0 & -14 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Operationerne $R_3 := -\frac{1}{14}R_2$ og $R_1 := R_1 - 26R_2$ giver

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tilsvarende ligninger er

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

x_2 er fri. Vi sætter $x_2 = t$, og finder

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in R$, men $t \neq 0$.

3. Vi skal afgøre, om matricen A er diagonaliserbar. Egenværdien 5 har kun geometrisk multiplicitet 1, men har algebraisk multiplicitet 2, så matricen er ikke diagonaliserbar.

Opgave 3 I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
ligning:=diff(x(t),t,t)+6*diff(x(t),t)+25*x(t)=102*sin(t):
dsolve({ligning,x(0)=-1,D(x)(0)=4});
```

Output fra Maple er

$$x(t) = 4\sin(t) - \cos(t)$$

Vi skal bl.a. ved brug heraf finde den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'' + 6x' + 25x = 102\sin(t)$$

Maple har givet os en partikulær løsning til den inhomogene ligning. Den tilsvarende homogene ligning

$$x'' + 6x' + 25x = 0$$

har karakterligning

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

Rødderne er

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i$$

Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$x(t) = c_1 e^{-3t}\cos(4t) + c_2 e^{-3t}\sin(4t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er så

$$x(t) = 4\sin(t) - \cos(t) + c_1 e^{-3t}\cos(4t) + c_2 e^{-3t}\sin(4t)$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Opgave 4 Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = \cos(t)\, x(t)^2 + \sin(t)$$

med begyndelsesværdien $x(0) = 1$. Vi skal finde det 2. Taylorpolynomium P_2 for løsningen, idet udviklingspunktet er 0.
Vi har

$$P_2(t) = x(0) + x'(0)\, t + \frac{1}{2} x''(0)\, t^2$$

For at finde $x'(0)$ indsætter vi $t = 0$ i differentialligningen

$$x'(0) = \cos(0)\, x(0)^2 + \sin(0) = 1$$

Differentiation af differentialligningen giver

$$x''(t) = -\sin(t)\, x(t)^2 + \cos(t)\, 2x(t)\, x'(t) + \cos(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ giver

$$x''(0) = -\sin(0)\, x(0)^2 + \cos(0)\, 2x(0)\, x'(0) + \cos(0) = 3$$

Altså fås

$$P_2(t) = 1 + t + \frac{3}{2} t^2$$

Opgave 5 Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x^2 + 6y^3 + 6xy$$

for alle $(x, y) \in R^2$. Vi skal finde de stationære punkter for f, og for ethvert af disse bestemme , om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.
De partielle afledede er

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 2x + 6y \\ f_2(x, y) &= 18y^2 + 6x \end{aligned}$$

De stationære punkter er løsningerne til $f_1(x, y) = 0$ og $f_2(x, y) = 0$. Vi finder

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \wedge f_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 0 \wedge 3y^2 + x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3y \wedge 3y^2 - 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3y \wedge 3y(y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3y \wedge (y = 0 \vee y = 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (-3, 1) \end{aligned}$$

De stationære punkter er altså $(0, 0)$ og $(-3, 1)$.
Hessematricen

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \begin{bmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{12}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 36y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Altså finder vi

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten af denne er -36, altså negativ. Den ene egenværdi er positiv, den anden negativ. Punktet $(0,0)$ er et saddelpunkt.
Videre finder vi

$$H(-3,1) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 36 \end{bmatrix}$$

Determinanten er 36, altså positiv. Sporet er 38, altså positiv. Egenværdierne er derfor begge positive: Punktet $(-3,1)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt.

Opgave 6 Vi skal udregne planintegralet

$$\iint_D y dA$$

hvor den indre og den ydre begrænsning af integrationsområdet D er givet i polære koordinater r og θ ved ligningerne $r = \cos^2(\theta)$ og $r = 1$ med $0 \leq \theta \leq \pi$.
Vi har

$$\begin{aligned}
\iint_D y dA &= \int_0^\pi d\theta \int_{\cos^2\theta}^1 r^2 \sin\theta \, dr \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{\cos^2\theta}^1 \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\pi \left(1 - \cos^6\theta\right) \sin\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_1^{-1} \left(1 - t^6\right) dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \left(1 - t^6\right) dt \\
&= \frac{1}{3}\left[t - \frac{1}{7}t^7\right]_{-1}^1 = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$